ИСЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И СВЯЗИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Акименко Д.А., к.т.н., доц., КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Калуга
Вихорев К.С., студент, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Калуга
Нгуен Хоай Нам, студент, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Калуга

Предлагается новый подход к исследованию устойчивости линейных нестационарных систем с запаздыванием, построен алгоритм.

The new approach is considered to the exploration of a problem of the stability in a class of linear nonstationary systems with delay, constructed algorith.

Пусть динамика системы с запаздыванием описывается дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{v=0}^{n} a_v(t) x^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{m} b_v(t) x^{(v)}(t-\theta) = \sum_{v=0}^{r} c_v(t) y^{(v)}(t). \qquad (1)$$

Будем полагать, что на отрезке $[-\theta, 0]$ $x(t) = \xi(t)$, причем известны начальные условия

$$x(0) = x_0 = \xi(0);\; x'(0) = x_1 = \xi'(0);\ldots;\; x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} = \xi^{(n-1)}(0); \qquad (2)$$

$$\xi(-\theta) = 0;\; \xi'(-\theta) = 0;\ldots;\; \xi^{(n-1)}(-\theta) = 0.$$

Допустим также, что $m < n$ и выполнены условия теоремы существования и единственности решения.

Пусть $0 < t < \theta$. Подставив в уравнение (1) начальную функцию и ее производные, мы приведем это уравнение к виду

$$\sum_{v=0}^{n} a_v(t) x^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{m} b_v(t) \xi^{(v)}(t-\theta) = \sum_{v=0}^{r} c_v(t) y^{(v)}(t). \qquad (3)$$

Уравнение (3) при $0 < t < \theta$ является обыкновенным дифференциальным уравнением без запаздывания и начальное условие (2) определяет решение $x(t)$

Таким образом, для исследования устойчивости системы (1) перейдем к исследованию устойчивости системы (3). Все критерии устойчивости для класса линейных нестационарных систем справедливы и для линейных нестационарных систем с запаздыванием.

Ниже показан один из критериев, использующий понятие ИПФ .

Как известно, *ЛНС* (1), (2) *является устойчивой на конечном интервале для* $\eta_у, \varepsilon, T_у$ *по отношению к управлению, если при* $\|\mathbf{Y}(t)\| \le \eta_у$ *выполняется* $\|\mathbf{X}(t)\| \le \varepsilon$ *на интервале* $[t_0, t_0 + T_у]$.

Нетрудно показать, что *необходимым и достаточным критерием такой устойчивости ЛНС является выполнение условия*

$$\int_{t_0}^{t_0+T_{\text{у}}} \left|k\left(t,\tau\right)\right| d\tau \le \frac{\varepsilon}{\eta_{\text{у}}},\ t_0 \le t \le t+T_{\text{у}}. \qquad (4)$$

Получим выражение для импульсной переходной функции САУ с запаздыванием

$$\left.\begin{array}{l} \left[x\left(t,\tau\right)\right]_{t=[\tau-\theta,\tau]}=0, \\ \left[\dfrac{dx\left(t,\tau\right)}{dt}\right]_{t=[\tau-\theta,\tau]}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[\dfrac{d^{(n-1)}x\left(t,\tau\right)}{dt^{(n-1)}}\right]_{t=[\tau-\theta,\tau]}=0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Тогда нормальной ИПФ системы (1) должно соответствовать уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\left(t\right)\frac{d^i k_{\text{Н}}\left(t,\tau\right)}{dt^i}+\sum_{i=0}^{m} b_i(t)\frac{d^i k_{\text{Н}}\left(t-\theta,\tau\right)}{dt^i}=\sum_{i=0}^{r} c_i\left(t\right)\frac{d^i\delta\left(t-\tau\right)}{dt^i}, \qquad (6)$$

При нулевых начальных условиях, везде $x\left(t,\tau\right)$ следует заменить на $k_{\text{н}}\left(t,\tau\right)$. Прикладывая дельта-функцию при различных τ, получим уравнения для семейства нормальных ИПФ.

Установим связь между входом $y(t)$, выходом $x(t)$ ИПФ $k(t,\tau)$ нестационарной системы с запаздыванием, пользуясь следующими рассуждениями ИПФ определяется уравнением

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}k\left(t,\tau\right)+\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}k\left(t-\theta,\tau\right)=\sum_{\nu=0}^{r} c_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\delta(t-\tau), \quad . \qquad (7)$$
$$\tau\in(-\infty,+\infty)$$

Умножим обе части (7) на $y(\tau)$ и проинтегрируем по τ на промежутке $(-\infty,+\infty)$. Результат имеет вид

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} k\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} k\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{r} c_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\tau\right)\delta(t-\tau)d\tau\ . \qquad (8)$$

Используя фильтрующее свойство δ-функции, получим

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} k(t,\tau)y(\tau)d\tau + \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} k(t-\theta,\tau)y(\tau)d\tau =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{r} c_\nu(t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}y(t)\ . \tag{9}$$

Сравнивая (1) и (9), получаем

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t,\tau)y(\tau)d\tau\,. \tag{10}$$

Анализ уравнения (10) показывает следующее:

$$\begin{aligned} &k(t,\tau)\,y(\tau)=0 \ \text{при}\ \tau<0;\\ &k(t,\tau)\,y(\tau)=0 \ \text{при}\ \tau>t. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда (10) перепишем в виде

$$x(t) = \int_{0}^{t} k(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Рассмотрим систему, описываемую соответственно уравнением

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu(t)x^{(\nu)}(t-\theta) = y(t)\,. \tag{13}$$

Математической основой для получения зависимости, определяющей колебания на выходе одномерной нестационарной системы, описываемой укороченным уравнением (13), является следующая теорема (теорема Коши) .

Если:

1) имеет место линейное ДУ вида

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu(t)x^{(\nu)}(t-\theta) = y(t);\ \mathbf{X}^0 = 0; \tag{14}$$

2) $a_\nu(t)$ – непрерывна на $[0,T]$, $\nu=\overline{0,n-1}$; $a_n(t)=1$;

3) $y(t)$ – непрерывна на $[0,T]$;

4) $k(t,\tau)$ – решение однородного уравнения, т.е. $Lk(t,\tau)=0$, причем

$$\begin{aligned} &k(t,\tau)\big|_{t=\tau} = k_t'(t,\tau)\big|_{t=\tau} = \ldots = k_t^{(n-2)}(t,\tau)\Big|_{t=\tau} = 0;\\ &k_t^{(n-1)}(t,\tau)\Big|_{t=\tau} = 1, \end{aligned} \tag{15}$$

тогда частное решение неоднородного уравнения, соответствующее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$x(t)=\int_0^t k\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau \text{ – формула Коши,} \tag{16}$$

$k\left(t,\tau\right)$ – ядро Коши.

Уравнение (14) перепишем в виде $Lx=y$. Тогда $x=L^{-1}y$, L^{-1} – оператор, обратный линейному дифференциальному оператору L. Таким образом, *задача заключается в нахождении оператора* L^{-1}.
Воспользуемся формулой:

$$x^{(k)}(t)=\int_{t_0}^t \frac{\partial^k}{\partial t^k}k(t,\tau)y(\tau)d\tau+\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}k(t,t)y(t) \tag{17}$$

Дифференцируя формулу Коши, получаем

$$x(t)=\int_0^t k\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau;$$

$$x'(t)=\int_0^t k_t'\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k(t,t)y\left(t\right)=\int_0^t k_t'\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau;$$

$$x''(t)=\int_0^t k_t''\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k_t'\left(t,t\right)y\left(t\right)=\int_0^t k_t''\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau; \tag{18}$$

$$\vdots$$

$$x^{(n-1)}(t)=\int_0^t k_t^{(n-1)}\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k_t^{(n-2)}\left(t,t\right)y\left(t\right)=\int_0^t k_t^{(n-1)}\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau,$$

т.к. $k\left(t,t\right)=k_t'\left(t,t\right)=\ldots=k_t^{(n-2)}\left(t,t\right)=0$.

Вместе с тем имеем

$$x^{(n)}(t)=\int_0^t k_t^{(n)}\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k_t^{(n-1)}\left(t,t\right)y\left(t\right)=\int_0^t k_t^{(n)}\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+y(t), \tag{19}$$

т.к. $k_t^{(n-1)}(t,t)=1$.

$$x(t-\theta)=\int\limits_0^{t-\theta} k\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau;$$

$$x'(t-\theta)=\int\limits_0^{t-\theta} k'_t\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k(t-\theta,t-\theta)y\left(t\right)=\int\limits_0^{t-\theta} k'_t\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau;$$

$$x''(t-\theta)=\int\limits_0^{t-\theta} k''_t\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k'_t(t-\theta,t-\theta)y\left(t\right)=\int\limits_0^{t-\theta} k''_t\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau;$$

.....

$$x^{(m)}(t)=\int\limits_0^{t-\theta} k_t^{(m)}\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+k_t^{(m-1)}\left(t-\theta,t-\theta\right)y\left(t\right)$$

$$=\int\limits_0^{t-\theta} k_t^{(m)}\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau$$

При $t-\theta<\tau<t$

$$\int\limits_{t-\theta}^{t}\frac{\partial^k}{\partial t^k}k(t-\theta,\tau)y(\tau)d\tau=0$$

Подставляя полученные выражения в исходное ДУ (13), находим

$$\sum_{v=0}^{n}a_v(t)\int\limits_0^t k_t^{(v)}\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+\sum_{v=0}^{m}b_v(t)\int\limits_0^t k_t^{(v)}\left(t-\theta,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau+y(t)=y(t), \quad (20)$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_0^t\left[\sum_{v=0}^{n}a_v(t)\frac{d^v}{dt^v}k\left(t,\tau\right)+\sum_{v=0}^{m}b_v(t)\frac{d^v}{dt^v}k\left(t-\theta,\tau\right)\right]y\left(\tau\right)d\tau+y(t)=y(t). \quad (21)$$

Последнее равенство равносильно следующему

$$\int\limits_0^t\left[L_t k\left(t,\tau\right)\right]y\left(\tau\right)d\tau+y(t)=y(t). \quad (22)$$

Но $L_t k\left(t,\tau\right)=0$, т.к. $k\left(t,\tau\right)$ – решение однородного ДУ, отсюда следует тождество $y\left(t\right)=y\left(t\right)$.