Indice

1 Introduzione **2**

2 Gruppi di Lie **3**
2.1 Gruppi e gruppi topologici 3
2.2 Proprietà topologiche dei gruppi di Lie 3
2.3 Sottogruppi di Lie 6

3 Algebre di Lie **9**
3.1 Definizione e prime proprietà 9
3.2 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie 10
3.3 L'esponenziale 15

4 La corrispondenza di Lie **17**

5 I gruppi di Lie classici **19**
5.1 Gruppi di matrici 19
5.2 Gruppi di Lie classici e loro algebra di Lie 22

6 Ideali differenziali e forme invarianti **23**
6.1 Il teorema di Frobenius 24
6.2 Ideali differenziali 25
6.3 Forme invarianti 27
6.4 Morfismi di gruppi di Lie e forme invarianti 28
6.5 Rivestimenti di gruppi di Lie e π_1 30

7 Il teorema di Cartan e l'inversione del funtore di Lie **33**
7.1 Sottogruppi e sottoalgebre 34
7.2 L'inversione del funtore di Lie 38
7.3 La mappa esponenziale 39
7.4 La sottocategoria $\mathcal{G}$ è completa in $\mathcal{TG}$ 42
7.5 Il teorema di Cartan 43

1 Introduzione

In questa breve trattazione studieremo la corrispondenza di Lie-Cartan fra gruppi ed algebre di Lie. In notazione categoriale, denoteremo con $\mathcal{G}$ la categoria dei gruppi di Lie, con $\mathcal{G}_0$ la categoria dei gruppi di Lie connessi e con $\mathcal{G}_{00}$ la categoria dei gruppi di Lie semplicemente connessi (i gruppi di Lie connessi e con gruppo fondamentale banale). Infine $\mathcal{AL}_f$ indicherà la categoria delle algebre di Lie finito dimensionali. Dimostreremo che sarà possibile produrre questo diagramma funtoriale:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{G}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_{00} \arrow[dl] \\
 & \mathcal{AL}_f \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dove ogni freccia è un funtore. Il funtore fra la categoria dei gruppi di Lie e quella delle algebre di Lie sarà detto funtore di Lie e costituirà il centro della trattazione.

Più nel dettaglio:

- Nel capitolo 2 si introducono le proprietà topologiche e differenziali dei gruppi di Lie che saranno utili nel seguito.
- Nel capitolo 3 si introducono le algebre di Lie e se ne studiano le proprietà in relazione ai gruppi di Lie.
- Nel capitolo 4 si definisce la corrispondenza di Lie.
- Il capitolo 5 approfondisce gli esempi classici di gruppi di Lie: i gruppi di Lie di matrici.
- Il capitolo 6 presenta i teoremi di geometria differenziale e di topologia algebrica che permettono di ottenere i due risultati fondamentali di questa trattazione: l'inversione del funtore di Lie e il teorema di Cartan.
- Nel capitolo 7 si studiano l'inversione del funtore di Lie (postulando il teorema di Ado) e il teorema di Cartan.

2 Gruppi di Lie

2.1 Gruppi e gruppi topologici

Sia G un gruppo e uno spazio topologico. Salvo diverso avviso, indicheremo con $m : G \times G \to G$ l'operazione di gruppo, con e l'elemento neutro e con $\mathcal{T}$ la topologia di G. Se $g \in G$, esiste (unico) un elemento $x \in G$ tale che $m(x, g) = m(g, x) = e$. Indicheremo nel seguito l' elemento x con g^{-1}.

Definizione 2.1 Diremo G un *gruppo topologico* se la mappa $(x, y) \to m(x, y^{-1})$ è continua. Se G e H sono gruppi topologici, diremo $f : G \to H$ *morfismo di gruppi topologici* se f è un omomorfismo e una mappa continua.

I gruppi topologici e i morfismi di gruppi topologici costituiscono la categoria $\mathcal{TG}$.

Nota 2.2 D'ora in avanti non espliciteremo più l'operazione m quando non necessario. Adottando la notazione moltiplicativa scriveremo xy in luogo di $m(x, y)$.

Sia $a \in G$. Denoteremo con $L_a, R_a : G \to G$ le mappe $L_a(x) = ax, R_a(x) = xa$: rispettivamente la moltiplicazione a sinistra e a destra per un fissato elemento del gruppo. Tali mappe sono morfismi di $\mathcal{TG}$, le loro inverse in $\mathcal{S}$ (la categoria degli insiemi) sono $L_{a^{-1}}$ e $R_{a^{-1}}$, che sono ovviamente morfismi in $\mathcal{TG}$. Perciò sia L_a, sia R_a sono isomorfismi in $\mathcal{TG}$.
Sia $a \in G$, $U \subset G$, $V \subset G$. Indicheremo con

$Ua = \{g \in G| \quad g = ua, u \in U\}$
$aU = \{g \in G| \quad g = au, u \in U\}$
$U^{-1} = \{g \in G| \quad g^{-1} \in U\}$
$UV = \{g \in G| \quad g = uv, u \in U, v \in V\}$

$\Delta \subset G \times G$ (la diagonale) è la controimmagine di $\{e\}$ tramite l'operazione di moltiplicazione $m : G \times G \to G$, chiaramente continua. Pertanto una condizione necessaria e sufficiente perché G sia di Hausdorff è che $\{e\}$ sia un chiuso in G. Nella definizione che segue introdurremo una sottoclasse della classe dei gruppi topologici (nella proposizione immediatamente seguente vedremo che la richiesta di regolarità è stata solo rafforzata).

2.2 Proprietà topologiche dei gruppi di Lie

Definizione 2.3 Sia G un gruppo e una varietà differenziabile liscia. Diremo G *gruppo di Lie* se il prodotto in G, $m : G \times G \to G$ è liscio.

La regolarità sarà fissata all'inizio del discorso C^∞, anche se quasi tutta la costruzione può essere ripetuta con gruppi di Lie di ordine k, $k \in \mathbb{N}$ strettamente positivo. Espliciteremo solo i due casi estremi di regolarità C^ω e C^0: gruppi di Lie ottenuti a partire rispettivamente da varietà analitiche e da varietà topologiche (con analoga regolarità per l'operazione di prodotto). L'aggettivo 'liscio' riferito a varietà o mappe verrà usato per indicare che queste hanno regolarità C^∞.

Proposizione 2.4 *Un gruppo di Lie G è un gruppo topologico e la mappa $\phi : G \times G \to G$, $\phi(x,y) = m(x, y^{-1})$ è liscia.*

Dimostrazione: Siano $\Phi, \Psi : G \times G \to G \times G$, definite dalle formule

$$\Phi(x,y) = (R_y(x), y) \qquad \Psi(z,y) = (R_y^{-1}(z), y) \qquad x, y, z \in G$$

Queste mappe sono lisce se e solo se lo sono rispettivamente R_y e R_y^{-1}. Inoltre una semplice verifica mostra che

$$\Psi \circ \Phi(x,y) = (x,y) \qquad \Phi \circ \Psi(z,y) = (z,y) \qquad x, y, z \in G$$

Φ e Ψ sono quindi biunivoche, Φ è liscia. Il teorema è dimostrato se mostriamo che Φ è un diffeomorfismo locale. Usando il teorema della funzione inversa, verifichiamo che $d\Phi_{(x,y)} : T_x(G) \times T_y(G) \to T_x(G) \times T_y(G)$ è un isomorfismo. Per definizione di Φ,

$$d\Phi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} (dR_y)_x & B \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Pertanto, qualunque sia la forma dell'operatore lineare B, la dimostrazione è conclusa. $\square$

Poichè una qualsiasi varietà topologica è certamente T_1, i gruppi di Lie sono tutti varietà differenziali di Hausdorff.

Definizione 2.5 Se G e H sono gruppi di Lie, un morfismo $f : G \to H$ di gruppi topologici è un *morfismo di gruppi di Lie* quando f è una mappa liscia.

Nel seguito faremo uso della seguente nozione di teoria delle categorie:

Definizione 2.6 Siano A una categoria e B una sua sottocategoria. Diremo che B è completa quando vale la seguente proprietà: per ogni morfismo f di A, se $dom(f)$ e $codom(f)$ sono oggetti di B, allora f è un morfismo di B.

E' immediato constatare che la categoria $\mathcal{G}$ dei gruppi di Lie è una sottocategoria della categoria $\mathcal{TG}$. Vedremo più avanti che tale sottocategoria è sorprendentemente completa. Così, se un gruppo topologico ammette una struttura di gruppo di Lie, tale struttura è unica. Stabilire se un gruppo topologico ammetta una (unica) struttura di gruppo di Lie è il quinto dei ventitrè problemi che Hilbert propose come sfida per il secolo successivo nella famosa conferenza di Parigi del 1900. Certamente un gruppo topologico, per avere una struttura di gruppo di Lie, deve essere di Hausdorff e localmente compatto (ogni varietà topologica lo è). Riportiamo l'enunciato del seguente teorema (senza dimostrazione).

Teorema 2.7 *(Gleason-Yamabe) Un gruppo topologico G di Hausdorff è un gruppo di Lie se e solo se è localmente compatto ed esiste un intorno di e all'interno del quale l'unico sottogruppo di G è $\{e\}$.*

Un lavoro successivo (Montgomery, Zippin, Iwasawa, Gleason, Yamabe) mostra che le varietà topologiche verificano anche l'ultima condizione del teorema appena enunciato. Se ne deduce che un gruppo topologico che sia anche una varietà topologica ammette certamente una struttura differenziabile rispetto alla quale è un gruppo di Lie. Per ulteriori dettagli rimandiamo a [3].

Torniamo ora alle proprietà dei gruppi di Lie.

Proposizione 2.8 *Un gruppo di Lie connesso soddisfa al II assioma di numerabilità.*

Dimostrazione: Sia G un gruppo di Lie connesso. Si consideri un aperto $U \ni e$ connesso e incluso in una carta coordinata con $U = U^{-1}$. Sia $Y \subset U$ numerabile, denso in U. Vediamo che l'insieme $\{Uy\}_{y \in Z}$, dove Z è l'insieme degli elementi che sono prodotti finiti di elementi di Y, ricopre G. Sia $x \in G$. Osservando che gli elementi di G che possono essere scritti come prodotti finiti di elementi di U costituiscono un aperto e un chiuso di G, grazie all'ipotesi di connessione, si conclude che è sempre possibile scrivere:

$$x = x_1 x_2 ... x_k, \quad x_i \in U \quad 1 \leq i \leq k$$

Sia $x_{(i)} = x_1 x_2 ... x_i$. Dalla continuità della moltiplicazione si trova un intorno $V \ni e$ tale che:

$$V x_{(1)} V x_{(1)}^{-1} x_{(2)} V x_{(2)}^{-1} ... x_{(k)} V x_{(k)}^{-1} \subset U$$

Siccome Y è denso in U, esiste un punto $y_i \in Y$ nell'intorno $V x_i$ di un qualunque $x_i \in U$. Sia $v_i = y_i x_i^{-1} \in V$. Allora:

$$y_1 y_2 ... y_k = v_1 x_1 v_2 x_2 ... v_k x_k = v_1 x_{(1)} v_2 x_{(1)}^{-1} x_{(2)} v_3 x_{(2)}^{-1} ... x_{(k-1)} v_k x_{(k-1)}^{-1} x_{(k)} = ux$$

con $u \in U$. Ma allora $x \in Uy_1y_2...y_k$, quindi $\{Uy\}_{y\in Z}$ è un ricoprimento di G. Questo è sufficiente a verificare che G è II-numerabile, poichè ogni varietà topologica è I-numerabile. $\Box$
Dalla dimostrazione segue il

Corollario 2.9 *Sia G un gruppo di Lie connesso, e sia $e \in U$ un intorno di e. Allora U genera G, cioè*

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$$

I gruppi di Lie connessi soddisfano automaticamente alle due fondamentali proprietà topologiche che vengono talvolta aggiunte alla definizione di varietà regolare: il fatto di essere T_2 e il fatto di essere II-numerabile.

La seguente proposizione riconduce lo studio dei gruppi di Lie allo studio dei gruppi di Lie *connessi* e dei gruppi di Lie discreti. Indicheremo con G_e la componente connessa di G contenente e.

Proposizione 2.10 *Sia G un gruppo di Lie. Allora G_e è un suo sottogruppo di Lie. Inoltre G_e come sottogruppo di G è normale, e il gruppo quoziente G/G_e, con la topologia più fine che rende continua la proiezione sul quoziente, è un gruppo topologico discreto, quindi anche (in modo unico) un gruppo di Lie di dimensione 0. Inoltre G è il gruppo di Lie prodotto $G = G/G_e \times G_e$.*

Dimostrazione: Osserviamo innanzi tutto che se $a \in G_e$, allora $a \in L_a(G_e)$. Poiché G_e (e quindi $L_a(G_e)$) sono componenti connesse di G (quindi massimali), si ha che $L_a(G_e) = G_e$; analogamente $R_a(G_e) = G_e$ quando $a \in G_e$. Allo stesso modo $G_e^{-1} = G_e$. Questo significa che G_e è un sottogruppo di G. Sempre ragionando per massimalità e connessione, si ha che ogni endomorfismo T di G manda G_e in un suo sottoinsieme: $T(G_e) \subset G_e$. Quindi G_e è un sottogruppo normale di G. Poiché G è localmente connesso, G_e è aperto e quindi è un sottogruppo di Lie di G. La topologia quoziente di G/G_e è fatta in modo tale che la componente identica (l'elemento la cui immagine inversa è G_e) sia un aperto e un chiuso di G/G_e. Per omogeneità possiamo ripetere tale argomento per ogni classe $a[G_e]$, e vedere che ogni punto di G/G_e è aperto e chiuso in G/G_e. Pertanto G/G_e ha la topologia discreta e la dimostrazione è conclusa. $\Box$

2.3 Sottogruppi di Lie

Diamo ora la nozione di sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie.

Definizione 2.11 Siano M, N varietà differenziabili, e sia $\psi : M \to N$ liscia. Diremo che

1. ψ è un'*immersione* se $d\psi_m$ è iniettivo per ogni $m \in M$.
2. la coppia (M, ψ) è una *sottovarietà* di N se ψ è un'immersione che in aggiunta è (globalmente) iniettiva.
3. ψ è un *embedding* se ψ è un'immersione iniettiva che è anche un omeomorfismo sull'immagine.

C'è una naturale nozione di identificazione fra due sottovarietà, che verrà in seguito tradotta in una identificazione fra sottogruppi di Lie di un gruppo di Lie.

Definizione 2.12 Sia M una varietà differenziabile. Due sottovarietà (N_1, ϕ_1) e (N_2, ϕ_2) di M verranno dette *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $\alpha : N_1 \to N_2$ tale che $\phi_1 = \phi_2 \circ \alpha$:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & M \\ & N_2 \arrow[u, "\phi_2"'] \end{tikzcd}$$

In questo caso, α sarà detto *isomorfismo fra sottovarietà*.

Definizione 2.13 Sia G un gruppo di Lie. Sia (H, ϕ) una sottovarietà regolare di G. Diremo (H, ϕ) *sottogruppo di Lie* se H è un sottogruppo di G e se ϕ è un omomorfismo di gruppi.

Nei capitoli seguenti otterremo risultati di esistenza ed unicità di sottogruppi di Lie. Per l'unicità quasi sempre non si farà riferimento a un sottogruppo, ma ad una classe di equivalenza di sottogruppi di Lie. La seguente definizione esplicita tale equivalenza

Definizione 2.14 Sia G un gruppo di Lie e siano (H_1, ϕ_1) e (H_2, ϕ_2) due suoi sottogruppi di Lie. Diremo che questi due sottogruppi sono *equivalenti come sottogruppi di Lie* o, in breve, *equivalenti*, se esiste un isomorfismo di gruppi di Lie $\alpha : H_1 \to H_2$ tale che $\phi_2 \circ \alpha = \phi_1$.

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & M \\ & H_2 \arrow[u, "\phi_2"'] \end{tikzcd}$$

In questo caso, α sarà detto *isomorfismo fra sottogruppi.*

Finora abbiamo posto l'attenzione sulle proprietà topologiche dei gruppi di Lie, nel capitolo seguente inizieremo a studiarne le proprietà differenziali. Concludiamo la sezione con alcuni

Esempi:

1. Un qualunque spazio vettoriale reale (o complesso) V di dimensione finita rispetto alla sua operazione di somma, con la topologia indotta dalla norma euclidea e con l'unica carta banale che si ottiene dalla scelta di una base dello spazio è un gruppo di Lie.

2. $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ e $\mathbb{H}^*$, con le relative operazioni di prodotto, la topologia euclidea e le carte ovvie sono gruppi di Lie.

3. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$ con la topologia discreta sono i più semplici esempi di gruppi di Lie discreti.

4. $S^0 \subset \mathbb{R}^*, S^1 \subset \mathbb{C}^*$ e $S^3 \subset \mathbb{H}^*$ con le relative inclusioni e con le operazioni e le topologie ereditate sono esempi di sottogruppi di Lie.

5. il prodotto di gruppi di Lie è ancora un gruppo di Lie: il dato del prodotto diretto dei gruppi e della struttura differenziabile prodotto.

6. $GL(n)$: il gruppo lineare su $\mathbb{R}^n$, con l'operazione di prodotto fra matrici e la topologia euclidea è un esempio di gruppo di Lie non abeliano. Analogamente, se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$, $Aut(V)$ (canonicamente isomorfo a $GL(n)$) è un gruppo di Lie. Tale esempio cardine verrà trattato diffusamente più avanti.

7. $\mathbb{Q}$ con l'operazione di somma, $\mathbb{Q}^*$ con l'operazione di prodotto, entrambi con la topologia euclidea, sono esempi di gruppi topologici che non sono varietà topologiche. In modo analogo, anche GL(n)($\mathbb{Q}$) è un gruppo topologico che non è anche un gruppo di Lie.

8. Sia K la varietà prodotto $GL(n) \times \mathbb{R}^n$. Definiamo un prodotto su K in questo modo $(A_1, v_1)(A_2, v_2) = (A_1A_2, A_1v_2 + v_1)$. K è il gruppo delle trasformazioni affini di $\mathbb{R}^n$.

3 Algebre di Lie

3.1 Definizione e prime proprietà

Iniziamo con la descrizione di un'altra struttura:

Definizione 3.1 Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia A un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Diremo che A è un'*algebra* se A è dotato di un prodotto in modo che siano soddisfatte le condizioni:

$$a(x+y) = ax + ay \quad (x+y)a = xa + ya \quad \forall a, x, y \in A$$

$$(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b) \quad \forall a, b, \lambda \quad a, b \in A, \lambda \in \mathbb{K}$$

Un sottospazio vettoriale V di A verrà detto sottoalgebra di A se è verificata la condizione

$$ab \in V \quad \forall a, b \in V$$

Un *morfismo di algebre* è una mappa $f : A \to B$ lineare e tale che

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in A$$

I due prodotti si intendono rispettivamente in A e in B.

In queste pagine denoteremo con $\mathcal{A}$ la categoria delle algebre su $\mathbb{R}$ con i relativi morfismi di algebre e con $\mathcal{A}_f$ la categoria delle algebre di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Ci occuperemo in particolare di $\mathcal{AA}$, la sottocategoria delle algebre associative e di $\mathcal{AL}$, la sottocategoria delle algebre di Lie.

Definizione 3.2 Sia A un oggetto di $\mathcal{A}$

1. Diremo A un'*algebra associativa* se il prodotto in A è associativo.

2. Diremo A un'*algebra di Lie* se il prodotto è anticommutativo (supercommutativo) e se verifica la cosiddetta *Identità di Jacobi*:

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \quad \forall a, b, c \in A$$

Le categorie $\mathcal{AA}$ e $\mathcal{AL}$ sono sottocategorie complete di $\mathcal{A}$. Con $\mathcal{AA}_f$ e $\mathcal{AL}_f$ indicheremo ancora le algebre di dimensione finita su $\mathbb{R}$. La seguente costruzione associa ad ogni oggetto di $\mathcal{AA}$ un oggetto in $\mathcal{AL}$:

Definizione 3.3 Sia A un'algebra associativa. Definiamo l'operazione *Bracket di Lie* $[,] : A \times A \to A$ così:

$$[a, b] = ab - ba \quad \forall a, b \in A$$

E' chiaro che il *Bracket di Lie* è anticommutativo e verifica l' *Identità di Jacobi*. Dotando lo spazio vettoriale A del prodotto $[,]$ otteniamo un'algebra di Lie, che denoteremo con $[A]$, detta *algebra di Lie commutata* da A.

Sia V uno spazio vettoriale (reale). Sia $End(V)$ l'algebra degli endomorfismi su V. Un esempio di algebra commutata è $[End(V)]$. Una sua sottoalgebra è l'algebra delle derivazioni su V (le mappe $D : V \to V$ tali che $D(xy) = D(x)y + xD(y)$).

3.2 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie

Ritorniamo ai gruppi di Lie. Vedremo che esiste una corrispondenza

$$\mathcal{L} : \mathcal{G} \to \mathcal{AL}_f$$

Questa è la corrispondenza di Lie. $\mathcal{L}$ costituisce l'argomento principale delle prossime pagine.

Se M è una varietà, indicheremo con $T(M)$ il suo fibrato tangente, con $\mathcal{X}(M)$ l'algebra di Lie dei campi vettoriali (sezioni del fibrato tangente) su M con l'operazione di bracket di Lie, con $\mathcal{X}^\infty(M)$ le sezioni lisce del fibrato tangente.

Definizione 3.4 Siano M e N due varietà differenziabili, $\phi : M \to N$ un diffeomorfismo. Siano $X \in \mathcal{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}(N)$. Diremo X e Y *ϕ-connessi* se $Y \circ \phi = d\phi \circ X$. In modo equivalente, X e Y sono ϕ-connessi se il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "d\phi"] & T(N) \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 3.5 *Nelle ipotesi della definizione data sopra, se X_1 e X_2 sono campi vettoriali su M e Y_1 e Y_2 su N rispettivamente ϕ-connessi, allora $[X_1, X_2]$ è ϕ-connesso a $[Y_1, Y_2]$.*

Dimostrazione: Infatti, la ϕ-connessione di X_1 e Y_1 e quella di X_2 e Y_2 significa che, per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, valga

$$X_1(f \circ \phi) = X_2(f) \circ \phi \quad Y_1(f \circ \phi) = Y_2(f) \circ \phi$$

Ma allora, da un calcolo diretto:

$$[X_1, Y_1](f \circ \phi) = X_1(Y_2(f) \circ \phi) - Y_1(X_2(f) \circ \phi) = [X_2, Y_2](f \circ \phi) \quad \square$$

Definizione 3.6 Sia G un gruppo di Lie, $X \in \mathcal{X}(G)$ un campo vettoriale su G. Diremo X *invariante sinistro* quando, per ogni $a \in G$, X è L_a-connesso a se stesso, ossia:

$$X_a = dL_a(X_e) \quad \forall a \in G$$

Proposizione 3.7 *Sia G un gruppo di Lie e g l'insieme dei suoi campi vettoriali invarianti sinistri. Allora*

1. *g è uno spazio vettoriale reale e la mappa $\alpha : g \to T_e(G)$ definita da $\alpha(X) = X(e)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Pertanto $dim(g) = dim(T_e(G)) = dim(G)$;*

2. *i campi vettoriali invarianti sinistri sono lisci;*

3. *il bracket di Lie di due campi invarianti sinistri è un campo invariante sinistro;*

4. *g costituisce un'algebra di Lie con l'operazione di bracket di Lie;*

Dimostrazione: è chiaro che g è uno spazio vettoriale e che α è lineare. α è iniettiva, infatti se $\alpha(X) = \alpha(Y)$ si ha che

$$X(a) = dL_a(X_e) = dL_a(Y_e) = Y(a) \quad \forall a \in G$$

Inoltre α è suriettiva: se $X \in T_e(G)$, poniamo $X(a) = dL_a(X), a \in G$. Che questo campo X sia invariante sinistro è una semplice verifica. Questo dimostra (1). Per vedere (2) mostriamo che, per ogni $f \in C^\infty(G)$, $X(f) \in C^\infty(G)$.

$$Xf(a) = X_a(f) = (dL_a(X_e))(f) = X_e(f \circ L_a)$$

Così è sufficiente mostrare che $a \to X_e(f \circ L_a) \in C^\infty(G)$. Denotiamo con $m : G \times G \to G$ il prodotto. Fissato $a \in G$, siano $i_a^1, i_a^2 : G \to G \times G$ definite da:

$i_a^1(x) = (a, x) \quad \forall x \in G$

$i_a^2(x) = (x, a) \quad \forall x \in G$
Sia Y un campo vettoriale su G liscio e tale che $Y_e = X_e$. Allora $(0, Y)$ è un campo vettoriale liscio su $G \times G$ e $[(0, Y)(f \circ m)] \circ i_e^1$ è un elemento di $C^\infty(G)$. Ma

$$[(0, Y)(f \circ m)] \circ i_e^1(x) = (0, Y)_{(x,e)}(f \circ m) = 0_x(f \circ m \circ i_e^1) + Y_e(f \circ m \circ i_x^2) \quad \forall x \in G$$

L'ultimo membro è chiaramente $X_e(f \circ L_x)$. Così la mappa $x \to X_e(f \circ L_x)$ è una funzione liscia su G. Questo prova (2). Il punto (3) è un'applicazione del lemma precedente, mentre il (4) è una verifica diretta che discende dalle proprietà del bracket di Lie. □
Il seguente risultato semplifica molto lo studio del fibrato tangente di un gruppo di Lie e segue abbastanza semplicemente dalla teoria sui gruppi di Lie fin qui svolta. Per la nozione di varietà parallelizzabile si veda [8] o [2].

Corollario 3.8 *I gruppi di Lie sono varietà parallelizzabili (in modo equivalente, il loro fibrato tangente è banale).*

Dimostrazione: Si consideri una base dello spazio vettoriale dei campi invarianti sinistri, $< X_1, ..., X_n >$. Per quanto visto nella proposizione precedente, $< (X_1)_e, ..., (X_n)_e >$ è una base di $T_e(G)$. Fissato $a \in G$, L_a è un automorfismo di G. Sappiamo per definizione che

$$dL_a \circ (X_i) = (X_i) \circ L_a \quad i \in \{1, ..., n\}$$

Calcolando X_i in e, troviamo che $dL_a(X_i)_e = (X_i)_a$. Siccome il differenziale manda isomorfismi fra varietà in isomorfismi fra fibrati tangenti, $< (X_1)_a, ..., (X_n)_a >$ non può che essere una base di $T_a(G)$. □
Un celebre risultato di topologia afferma che un campo vettoriale tangente su S^2 continuo si annulla almeno in un punto. Questo dimostra che su S^2 non è possibile introdurre una struttura di gruppo di Lie (a differenza di quanto accade con S^0, S^1 e S^3).

Definizione 3.9 Nelle notazioni della proposizione precedente, diremo g *l'algebra di Lie del gruppo G.*

Vediamo ora come sia possibile interpretare in un altro modo l'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie.

Definizione 3.10 Sia M una varietà differenziabile, $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$ un campo liscio su M, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto reale. Diremo $\phi : I \to M$ una *curva integrale* di X se

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = X(t) \quad \forall t \in I$$

Se il campo e la varietà sono lisci e se in aggiunta la varietà è di Hausdorff (come nel caso dei gruppi di Lie lisci), è definita la nozione di curva integrale massimale (per una dimostrazione rimandiamo a [9]). Per ogni $g \in G$, esiste un unico intervallo $I \ni 0$, un'unica funzione $\phi : I \to G$, tali che $\phi(0) = g$, ϕ è integrale per X e inoltre l'intervallo I è massimale. Fissato X, denoteremo tale unica funzione con ϕ_g (tralasciando di indicare l'intervallo massimale).

Definizione 3.11 Sia G un gruppo di Lie. Diremo $\phi : \mathbb{R} \to G$ un *sottogruppo a un parametro* di G se ϕ è un morfismo di gruppi di Lie.

Lemma 3.12 *Sia G un gruppo di Lie, allora*

1. *$X \in \mathcal{X}(G)$ è invariante a sinistra se e solo se la sua curva integrale $\phi : I \to G$ verifica*

$$\phi_{ab}(t) = L_a \circ \phi_b(t) \quad \forall a, b, t \quad a, b \in G, t \in I \tag{3.1}$$

2. *le curve integrali massimali dei campi vettoriali invarianti sinistri, passanti per e in 0, coincidono con i sottogruppi a un parametro di G.*

Dimostrazione: Poniamo

$$\psi_b(t) = L_a \phi_{a^{-1}b}(t) \quad \forall a, b, t \quad a, b \in G, t \in I$$

e successivamente

$$Y_b = \frac{d\psi_b(t)}{dt}|_{t=0}$$

otteniamo così un campo vettoriale su G, $Y : b \to Y_b$. Con un calcolo diretto troviamo

$$Y_b = \frac{d\psi_b(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{d(L_a \circ \phi_{a^{-1}b}(t))}{dt}|_{t=0} = (dL_a)_{a^{-1}b}(\frac{d\phi_{a^{-1}b}(t)}{dt})|_{t=0} = (dL_a)_{a^{-1}b}(X_{a^{-1}b})$$

Supponiamo ora che valga l'uguaglianza (3.1). Allora $\psi_b = \phi_b$ e quindi $Y_b = X_b$. Quindi in particolare, usando la formula testè ottenuta con $b = a$, otteniamo $X_a = (dL_a)_e(X_e)$. Viceversa, supponiamo X invariante sinistro. Allora $Y_b = X_b$ per ogni punto $b \in G$. Quindi $X = Y$ e $\psi_b = \phi_b$, cioè $\phi_b = a\phi_{a^{-1}b}$, che è equivalente a (3.1). Il punto (1) è così dimostrato.
Passiamo ora a (2). Sia β un sottogruppo a un parametro di G. Fissato $a \in G$, la curva

$$\phi_a(t) = a\beta(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

passa in a per $t = 0$ ed è liscia. Poniamo

$$X_a = \frac{d\phi_a(t)}{dt}|_{t=0}$$

$X \in \mathcal{X}(G)$ e una verifica diretta mostra che le curve ϕ_a sono sue curve integrali (con la solita convenzione che $\phi(0) = a$). La curva $\phi_e = \beta$ in particolare è una sua curva integrale ed è certamente massimale (essendo definita su tutto $\mathbb{R}$). Verifichiamo che X è invariante sinistro usando il punto (1) appena dimostrato:

$$\phi_{ab}(t) = ab\beta(t) = a(b\beta(t)) = a\phi_b(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Resta da vedere che una curva integrale massimale β di un campo vettoriale X invariante sinistro, con $\beta(0) = e$ è un sottogruppo a un parametro del gruppo di Lie G. Usando ancora l'equazione (3.1) vediamo che l'intervallo I_a in cui è definita ϕ_a è indipendente da a: lo denoteremo fino alla fine della dimostrazione con I. Fissato $s \in I$, la curva $t \to \phi_e(t + s)$ è una curva integrale del campo X che passa in 0 per il punto $b = \phi_e(s)$. Così vediamo che $\phi_e(t + s) = \phi_b(t)$. Usando ancora (3.1) per $s, t \in I, s + t \in I$:

$$\beta(t + s) = \beta(s + t) = \phi_e(t + s) = \phi_b(t) = b\phi_e(t) = \phi_e(s)\phi_e(t) = \beta(s)\beta(t)$$

Per concludere la dimostrazione dobbiamo vedere che $I = \mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Ridefiniamo la curva β per ogni $t \in \mathbb{R}$. Fissato t, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{t}{n} \in I$. Definiamo ora:

$$\beta(t) = \beta(\frac{t}{n})^n$$

Questa definizione è corretta ed estende la precedente definizione di β su I. Infatti, se $\frac{t}{n}$ e $\frac{t}{m} \in I$, $\frac{t}{nm} \in I$ si ha che:

$$\beta(\frac{t}{n})^n = [\beta(\frac{t}{nm})^m]^n = [\beta(\frac{t}{nm})^n]^m = \beta(\frac{t}{m})^m$$

Vediamo che la nuova β è una curva integrale del campo X. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$, poniamo $a = \beta(t_0)$. Per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, ricordiamo che vale la formula

$$\frac{d\beta(0)}{dt}f = \frac{d(f \circ \beta)(t)}{dt}|_{t=0}$$

(è la definizione di vettore tangente), così ricaviamo questa catena di uguaglianze:

$$[(dL_a)_e\frac{d\beta(t)}{dt}]f = \frac{d\beta(0)}{dt}(f \circ L_a) = \frac{d(f \circ L_a \circ \beta)(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{df(\beta(t + t_0))}{dt}|_{t=0} = \frac{d(\beta(t_0))}{dt})f$$

poichè la precedente formula vale per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty$ si trova che

$$(dL_a)_e \frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{d(\beta(t_0))}{dt}$$

Per $t \in I$ la curva β è curva integrale per X. In particolare:

$$\frac{d\beta(0)}{dt} = X_{\beta(0)} = X_e$$

e, essendo X invariante sinistro, $(dL_a)_e X_e = X_a = X_{\phi(t_0)}$. Pertanto:

$$X_{\phi(t_o)} = \frac{d\beta(t_0)}{dt}$$

β è curva integrale del campo vettoriale X. $\Box$

Ricordiamo che un campo $X \in \mathcal{X}(M)$ si dice completo quando la sua curva integrale massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Corollario 3.13 *I campi vettoriali invarianti sinistri sono completi.*

Teorema 3.14 *Sia G un gruppo di Lie. Allora, se la sua algebra di Lie g, come spazio vettoriale reale, ammette le seguenti tre interpretazioni:*

1. *gli elementi di g sono i campi vettoriali invarianti sinistri di G;*
2. *g è $T_e(G)$: lo spazio tangente all'identità di G;*
3. *gli elementi di g sono i sottogruppi a un parametro di G;*

Se $X \in g$ come in (1), $X_e \in T_e(G)$ è il suo elemento associato in (2) e ϕ_e il suo corrispondente in (3).

Osserviamo che la struttura di algebra per g, da quanto visto finora, risulta solamente dalla sua interpretazione (1).

3.3 L'esponenziale

In questa sezione approfondiamo il passaggio $G \to \mathcal{L}(G)$ in un caso semplice. Sia A un'algebra con elemento neutro moltiplicativo, di dimensione finita su $\mathbb{R}$, dotata di una topologia ottenuta a partire da una qualunque norma su A. Si può verificare in modo banale che l'insieme degli elementi invertibili di A costituisce un gruppo di Lie di dimensione $dim_{\mathbb{R}}(A)$. Inoltre, G è un aperto di A, che può essere canonicamente interpretata come lo spazio tangente a G nell'identità. Si trova che $\mathcal{L}(G) = [A]$: l'algebra commutata da A. Vedremo come sia possibile passare da un campo invariante sinistro al sottogruppo a un parametro associato: troveremo una formula più esplicita per il passaggio dall'interpretazione di $\mathcal{L}(G)$ fornita nel punto (1) a quella fornita nel punto (3) del teorema che conclude la precedente sezione, almeno nel caso semplice in cui A e G siano come sopra.

Definizione 3.15 Sia A un'algebra. Sia $||.|| : A \to \mathbb{R}$ una norma su A. Diremo la norma *moltiplicativa* se vale

$$||ab|| \leq ||a||||b|| \quad \forall a, b \in A$$

Lemma 3.16 *Per ogni algebra A finito dimensionale esiste una norma moltiplicativa $||.|| : A \to \mathbb{R}$.*

Dimostrazione: Fissata una base $< e_1, ..., e_n >$ di A, sia $a \to (a_1, ...a_n)$ la mappa che associa ad ogni elemento dell'algebra le sue coordinate. Poniamo

$$||a|| = max(|a_1|, ..., |a_n|)$$

Con una verifica diretta si mostra che questa è una norma ed è moltiplicativa.
□
Data un'algebra di Lie e una sua norma moltiplicativa, osserviamo che vale la formula

$$||e|| + \sum_{i=1}^{n} ||\frac{(t^i a^i)}{i!}|| \leq e^{t||a||} \quad \forall a, t, n \quad a, t \in A, n \in \mathbb{N}$$

Quindi la serie $e + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(t^i a^i)}{i!}$ è assolutamente convergente e pertanto converge. Per brevità scriveremo quest'ultima somma nella forma più compatta $exp(ta)$ o e^{ta} (con e qui naturalmente non si intende l'identità di G).

Definizione 3.17 Fissato $a \in A$, chiameremo *esponenziale* (associata ad a) la mappa $t \to e^{ta}, t \in \mathbb{R}$.

Si può introdurre la nozione di derivata per funzioni a valori in un'algebra A, ripercorrendo esattamente la definizione di derivata (come limite del rapporto incrementale) per funzioni reali di variabile reale. Si ritrovano così le proprietà fondamentali della derivata (linearità, formula di Leibniz,...). L'unica differenza rispetto al caso reale è la non commutatività del prodotto. Maggior dettaglio su questa costruzione può essere trovato in [8]. Come nel caso reale, l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = c \end{cases}$$

è espressa dalla formula

$$x(t) = e^{ta}c$$

Useremo queste nozioni per integrare l'equazione che determina i sottogruppi a un parametro di un gruppo di Lie G. Questa è l'equazione

$$x(s+t) = x(s)x(t) \tag{3.2}$$

(e inoltre $x(0) = e$). Differenziando rispetto a s la (3.2) e ponendo $s = 0$ otteniamo il problema di Cauchy appena visto. La sua soluzione è

$$x(t) = e^{ta} \tag{3.3}$$

Dove abbiamo posto $a = x'(0)$. Questo ci dice che i sottogruppi a un parametro sono tutte e sole le mappe della forma (3.3).

4 La corrispondenza di Lie

In questa sezione definiamo la corrispondenza di Lie $\mathcal{L} : \mathcal{G} \to \mathcal{AL}_f$ e ne studiamo le proprietà funtoriali. Sia G un oggetto di $\mathcal{G}$ e sia g la sua algebra di Lie: un elemento di $\mathcal{AL}_f$. La corrispondenza di Lie $\mathcal{L}$ manda G in g, ovvero

$$\mathcal{L}(G) = g$$

Sia ora ϕ un morfismo in $\mathcal{G}$, $\phi : G \to H$. Vogliamo associare a $\phi \to d\phi_e$. Questo è un morfismo in $\mathcal{V}$, la categoria degli spazi vettoriali: manda G_e in H_e. Attraverso l'isomorfismo dato dal teorema (3.13), la mappa lineare $d\phi_e$ induce una mappa lineare dall'algebra dei campi vettoriali invarianti sinistri su G nell'algebra dei campi vettoriali invarianti sinistri su H.

$$d\phi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$$

dove, se $X \in \mathcal{L}(G)$, $d\phi(X)$ è l'unico campo vettoriale invariante sinistro su H tale che

$$d\phi(X)(e) = d\phi(X_e)$$

(pensando a X come a una sezione della fibrazione, questo coincide naturalmente col comporre $d\phi \circ X : G \to T(H)$). Per mostrare che $\mathcal{L} : \mathcal{G} \to \mathcal{AL}_f$, con la scelta

$$\mathcal{L}(\phi) = d\phi$$

occorre verificare che $d\phi$ è un morfismo in $\mathcal{AL}_f$.

Teorema 4.1 *Siano G e H oggetti di $\mathcal{G}$, e sia ϕ un morfismo in $\mathcal{G}$ $\phi : G \to H$. Allora*

1. *X e $d\phi(X)$ sono ϕ-connessi per ogni $X \in \mathcal{L}(G)$.*

2. *$d\phi$ è un morfismo di algebre di Lie, $d\phi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$.*

Dimostrazione: $d\phi(X)$ e X sono ϕ-connessi. Ricordiamo che, essendo ϕ un morfismo di gruppi di Lie, vale che $L_{\phi(g)} \circ \phi = \phi \circ L_g$ per ogni $g \in G$. Passando ai differenziali in questa relazione, si ottiene che: $dL_{\phi(g)} \circ d\phi = d\phi \circ dL_g$. Ma $d\phi$ manda campi invarianti sinistri in campi invarianti sinistri, quindi

$$d\phi(X) \circ L_{\phi(g)} = dL_{\phi(g)} d\phi(X)$$

e quindi troviamo che:

$$d\phi(X)(\phi(g)) = dL_{\phi(g)} d\phi(X_e) = d(L_{\phi(g)} \circ \phi) X_e) = d(\phi \circ L_g) X_e = d\phi \circ X_g$$

Questo prova (1). Per il lemma (3.5) e per il punto (1), $[X, Y]$ è ϕ-connesso al campo vettoriale invariante a sinistra $[d\phi(X), d\phi(Y)]$. Quindi in particolare

$$[d\phi(X), d\phi(Y)](e) = d\phi([X, Y](e))$$

(ricordiamo che $\phi(e) = e$ dove con e abbiamo indicato l'elemento neutro rispettivamente in G e in H).
Ma $d\phi[X, Y]$ è l'unico campo vettoriale invariante a sinistra su H che nell'identità vale $d\phi([X, Y](e))$. Pertanto vale la (2) e il teorema è completamente dimostrato. □

La corrispondenza $\mathcal{L}$ è l'argomento centrale di questa trattazione: ne studieremo le proprietà funtoriali e interne. Con proprietà interne di un funtore intendiamo tutte quelle proprietà che afferiscono a come esso agisce all'interno di un singolo oggetto. Per le proprietà funtoriali i risultati sono legati al nome di Sophus Lie, per le proprietà interne di $\mathcal{L}$ il risultato fondamentale porta il nome di Cartan. Come preannunciato, vedremo che in certe situazioni un aiuto decisivo allo studio di un gruppo di Lie è dato dalla completa determinazione della sua algebra di Lie.

Teorema 4.2 *La corrispondenza $\mathcal{L} : \mathcal{G} \to \mathcal{AL}_f$ di Lie è un funtore covariante.*

Dimostrazione: Sia G un oggetto di $\mathcal{G}$. Dobbiamo vedere per prima cosa che

$$\mathcal{L}(Id_G) = Id_{\mathcal{L}(G)}$$

Sappiamo che $\mathcal{L}(Id_G) = d(Id_G)_e$. Il differenziale di un'applicazione lineare è l'applicazione stessa. Controlliamo infine che, se G, H e I sono oggetti in $\mathcal{G}$, e $\phi : G \to H$ e $\psi : H \to I$ sono morfismi in $\mathcal{G}$, vale la formula

$$\mathcal{L}(\phi \circ \psi) = \mathcal{L}(\phi) \circ \mathcal{L}(\psi)$$

Questa è una banale verifica che si basa sulla formula del differenziale della funzione composta. $\square$

5 I gruppi di Lie classici

In questo capitolo applicheremo i risultati sviluppati in precedenza ai gruppi di Lie classici, cioè i gruppi di matrici.

5.1 Gruppi di matrici

Iniziamo subito con una

Definizione 5.1 Un sottogruppo G di $GL(n)$ è detto un *gruppo di Lie di matrici* se:

1. G è un gruppo di Lie;
2. l'inclusione $i : G \to GL(n)$ è liscia (e quindi è un morfismo di gruppi di Lie).

$gl(n)$ è un'algebra associativam dal capitolo (3) abbiamo che il gruppo di Lie dei suoi elementi invertibili è $GL(n)$ e che $\mathcal{L}(GL(n)) = [gl(n)]$. I sottogruppi a un parametro di $GL(n)$ sono tutti della forma $t \to e^{ta}$ (in questo caso è equivalente la nozione di esponenziale di una matrice e quella sviluppata nel capitolo (3)). Se G è come nella definizione testè data, ogni sottogruppo a un parametro di G è automaticamente un sottogruppo a un parametro di $GL(n)$. Quindi ogni gruppo di Lie di matrici ha algebra di Lie che, come spazio vettoriale, è naturalmente identificato a un sottospazio di $\mathbb{R}^{n^2}$. Vediamo ora i risultati che permettono di concludere rapidamente che un certo sottoinsieme di $GL(n)$ è un gruppo di Lie di matrici e di calcolarne l'algebra di Lie (o almeno la sua struttura di spazio vettoriale).

Proposizione 5.2 *Un sottogruppo G del gruppo $GL(n)$ è un gruppo di Lie di matrici se esiste un diffeomorfismo $f : V \to V'$ di un certo intorno V della* *matrice identità di $GL(n)$ in un aperto $V' \subset \mathbb{R}^n$ con la seguente proprietà: esiste $G^\#$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ tale che:*

$$f(G \cap V) = G^\# \cap V'$$

Dimostrazione: Sia $\phi : G^\# \to \mathbb{R}^m$ un isomorfismo dello spazio $G^\#$ con lo spazio $\mathbb{R}^m$. Poniamo inoltre $U = G \cap V$ e $U' = \phi(G^\# \cap V')$. Allora U' è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e la mappa $h = \phi \circ f$ è una mappa biunivoca $U \to U'$. In altre parole, (U, h) è una carta per G. Ora sia A una matrice in G e poniamo $U_A = L_A(U)$ come di consueto, $h_A = h \circ L_A^{-1}$. La coppia (U_A, h_A) è una carta su G. Verifichiamo la compatibilità. Su $h_A(U_A \cap U_B)$, la mappa $h_B \circ h_A^{-1}$ è la restrizione del diffeomorfismo

$$h \circ L_B^{-1} \circ L_a \circ h^{-1} = \phi \circ f \circ L_{B^{-1}A} \circ f^{-1} \circ \phi^{-1}$$

e così è lui stesso un diffeomorfismo. Pertanto (U_A, h_A) definisce un atlante e la dimostrazione è conclusa. $\Box$
La condizione che il teorema dimostra essere sufficiente è anche necessaria: per ogni sottogruppo di Lie di matrici G è possibile trovare $V, V', G^\#, f$ come nella proposizione appena vista. Inoltre se la mappa f è analitica (tale richiesta ha senso, essendo $GL(n) \subset \mathbb{R}^n$), $G^\#$ è isomorfo a G_e. Non vedremo le dimostrazioni di questi teoremi, queste ultime possono essere trovate in [8].

Proposizione 5.3 *Se, per un sottogruppo G di $GL(n)$ esistono $V, V', G^\#, f$ che soddisfano la condizione sufficiente della proposizione appena vista, e se f in aggiunta è analitica, allora $\mathcal{L}(G) = G^\#$ (sono isomorfi come spazi vettoriali).*

In vista del prossimo esempio, introduciamo la seguente

Definizione 5.4 Una matrice $n \times n$, A sarà detta *nonexceptional*, se $det(E + A) \neq 0$. Per una matrice nonexceptional A, è definita la matrice

$$A^\# = (E - A)(E + A)^{-1}$$

(con E si intende naturalmente la matrice identica). Chiameremo $A^\#$ *l'immagine di Cayley di A*.

E' chiaro che l'insieme delle matrici regolari è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$ e pertanto una varietà differenziabile. La denoteremo nel seguito con $\mathbb{R}(n)^0$

Esempio 5.5 In questo esempio studiamo il caso particolare in cui la mappa f è la cosiddetta *trasformata di Cayley*.
Con un calcolo diretto si vede subito che la mappa $A \to A^{\#}$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}(n)^0$ in sè. Inoltre tale mappa è involutoria. Useremo tale trasformazione in vece della mappa f che compare nelle proposizioni (5.2) e (5.3). (si può verificare che questa mappa è analitica). Questo darà un criterio semplice per stabilire che un sottoinsieme di $GL(n)$ è sottogruppo di Lie di matrici e per trovarne l'algebra di Lie associata.

1. l'immagine di Cayley di $O(n) \cap \mathbb{R}(n)^0$ è lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche. Questo prova che $O(n)$ è un sottogruppo di Lie di $GL(n)$. Il suo tangente nell'identità è lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche (e prodotto da determinare).

2. una matrice di ordine pari $n = 2m$ è detta *simplettica* se soddisfa l'equazione
$$A^T J A = J$$
dove
$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$
L'immagine di Cayley delle matrici simplettiche regolari è lo spazio vettoriale delle matrici *J-antisimmetriche*, cioè tali che $(A^{\#})^T J = -JA^{\#}$. Le matrici simplettiche formano pertanto un gruppo di Lie. Questo gruppi di Lie ha come spazio tangente nell'origine lo spazio vettoriale delle matrici J-antisimmetriche.

3. generalizzando i due esempi appena visti, si trova che l'insieme delle matrici J-ortogonali costituisce un gruppo di Lie, con tangente nell'origine che è lo spazio vettoriale delle matrici J-antisimmetriche.

4. un altro sottogruppo di Lie di $GL(n)$ importante è il gruppo delle matrici ortogonali e simplettiche.

5. una costruzione simile può essere ripetuta per $SL(n)$ e per i gruppi di matrici complesse.

Concludiamo la sezione con un'osservazione (spiacevole). Il funtore di Lie, che manda un gruppo di Lie in uno spazio vettoriale dotato anche della struttura di algebra di Lie, non è invertibile. Questo significa che studiare l'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie non è sufficiente a determinarne univocamente la struttura: due gruppi di Lie potrebbero avere la medesima algebra di Lie associata. L'esempio più semplice con cui si vede che questo funtore non è iniettivo, è il caso dei due gruppi di Lie $\mathbb{R}$ e S^1. Queste sono due varietà di dimensione 1: il loro tangente nell'identità è $\mathbb{R}$. Sono inoltre uguali come algebre di Lie. La condizione di anticommutatività e il fatto che i due spazi vettoriali abbiano dimensione 1, impone che in entrambi ogni prodotto sia nullo. Così le due algebre di Lie associate sono uguali, ma i due gruppi di Lie non sono diffeomorfi (uno è compatto e l'altro no). Vedremo che l'algebra di Lie identifica univocamente il proprio gruppo di Lie solo a livello locale: perché il funtore di Lie sia biunivoco a livello di gruppi di Lie (globali) occorre considerare la classe dei gruppi di Lie semplicemente connessi.

5.2 Gruppi di Lie classici e loro algebra di Lie

Vediamo ora una tabella con i gruppi di Lie "classici". Nella tabella compaiono le algebre di Lie associate. Per quanto visto finora, solo la struttura di spazio vettoriale dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie è stata determinata: tali asserzioni saranno pertanto compiutamente dimostrate solo nel capitolo 7.

Nome	Gruppo di Lie	Nome	Sua algebra di Lie	Dim su $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$	Lo spazio euclideo n-dimensionale con la somma	$\mathbb{R}^n$	I bracket di Lie sono tutti nulli	n
$\mathbb{R}^*$	I reali non nulli con il prodotto	$\mathbb{R}$	I bracket di Lie sono tutti nulli	1
$\mathbb{R}^{>0}$	I reali positivi con il prodotto	$\mathbb{R}$	I bracket di Lie sono tutti nulli	1
S^1	I complessi di modulo 1 con il prodotto ereditato da $\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	I bracket di Lie sono tutti nulli	1
$\mathbb{H}^*$	I quaternioni di Hamilton con il prodotto	$\mathbb{H}$	L'algebra di Lie commutata da $\mathbb{H}$	4
S^3	I quaternioni di Hamilton di modulo 1 con il prodotto ereditato da $\mathbb{H}$	$Im(\mathbb{H})$	I quaternioni di Hamilton con parte reale nulla e con il prodotto commutato dall'ordinario prodotto quaternionico	3

Nome	Gruppo di Lie	Nome	Sua algebra di Lie	Dim su $\mathbb{R}$
$GL(n)$	Il gruppo generale lineare: le matrici quadrate reali con determinante non nullo con l'usuale prodotto	$gl(n)$	Tutte le matrici quadrate di ordine n con il prodotto commutato dall'usuale prodotto	n^2
$GL^+(n)$	Le matrici del gruppo generale lineare con determinante positivo e il prodotto indotto dal prodotto in $GL(n)$	$gl(n)$	Tutte le matrici quadrate di ordine n con il prodotto commutato dall'usuale prodotto	n^2
$SL(n)$	Il gruppo lineare speciale: le matrici del gruppo generale lineare con determinante 1	sl(n)	Le matrici quadrate di traccia nulla con il prodotto comutato dall'usuale prodotto	$n^2 - 1$
$O(n)$	Il gruppo ortogonale: le matrici quadrate tali che $A^t A = Id$	$o(n)$	Le matrici quadrate antisimmetriche ($A^t = -A$) con il prodotto commutato dall'usuale prodotto	$(n-1)n/2$
$SO(n)$	Il gruppo ortogonale speciale, le matrici di $SL(n)$ che sono in $O(n)$	so(n)	Le matrici quadrate antisimmetriche ($A^t = -A$) con il prodotto commutato dall'usuale prodotto	$(n-1)n/2$
$Sp(2n)$	Il gruppo simplettico	$sp(2n)$	Le matrici J- antisimmetriche	$(2n+1)n$

6 Ideali differenziali e forme invarianti

In questo capitolo studieremo un'applicazione del teorema di Frobenius, che costituirà lo strumento fondamentale per ottenere i risultati dei capitoli successivi. Riscriveremo l'enunciato del teorema di Frobenius nel linguaggio delle forme differenziali per ottenere, alla fine della prima sezione di questo capitolo, il risultato fondamentale che ci consentirà di invertire il funtore di Lie e di dedurre il teorema di Cartan. Ometteremo buona parte delle dimostrazioni di questo capitolo, per le quali facciamo riferimento a [9], come anche per le nozioni di forma differenziale, differenziale esterno, prodotto wedge, pull-back, integrale di una forma, distribuzione, distribuzione involutiva, distribuzione integrabile, varietà integrale. Useremo, in riferimento a queste nozioni, le notazioni del testo [9]. Se M è una varietà liscia, indicheremo con $E^k(M)$ lo spazio vettoriale delle k-forme su M, con $E^*(M)$ l'algebra graduata delle forme differenziali su M.

6.1 Il teorema di Frobenius

Vediamo ora l'enunciato del teorema di Frobenius.

Definizione 6.1 Una *sottovarietà integrale massimale* (N, ψ) di una distribuzione $\mathcal{D}$ su una varietà M è una sottovarietà connessa e integrale di $\mathcal{D}$, tale che non esiste una sottovarietà integrale connessa (N_2, ψ_2) di $\mathcal{D}$ con $\psi(N) \subset \psi_2(N_2)$.

Teorema 6.2 *(di Frobenius) Sia M una varietà liscia di dimensione d. Sia $\mathcal{D}$ una distribuzione c-dimensionale su M involutiva. Sia $m \in M$. Per m passa un'unica sottovarietà integrale massimale di $\mathcal{D}$ (a meno di isomorfismi fra sottovarietà). Infatti, esiste una carta coordinata (U, ϕ) a valori in un cubo aperto di $\mathbb{R}^c$ tale che, se $\phi = (x_1, ..., x_d)$, la "fetta"*

$$x_i = \text{costante} \quad c + 1 \leq i \leq d$$

è una varietà integrale di $\mathcal{D}$. Inoltre se (N, ψ) è una sottovarietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ con $\psi(N) \subset U$, allora $\psi(N)$ è inclusa in una tale "fetta".

Prima di riformulare il teorema in termini di ideali differenziali, vediamo una conseguenza del teorema di Frobenius che discende da questo risultato (a sua volta conseguenza del teorema della funzione inversa):

Proposizione 6.3 *Siano N, M varietà differenziabili e sia $\psi : N \to M$ una mappa liscia. Sia (P, ϕ) una sottovarietà di M. Supponiamo che ψ fattorizzi attraverso (P, ϕ). Dal momento che ϕ è iniettiva, esiste un'unica mappa $\psi_0 : N \to P$ tale che $\phi \circ \psi_0 = \psi$.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_0"'] & M \\ & P \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Allora valgono

1. *Se ψ_0 è continua, allora è $\mathcal{C}^\infty$.*
2. *ψ_0 è continua se ϕ è un embedding.*

Proposizione 6.4 *Siano N, M varietà differenziabili e sia $\psi : N \to M$ una mappa $\mathcal{C}^\infty$. Supponiamo che (P, ϕ) sia una varietà integrale di una distribuzione involutiva $\mathcal{D}$ e che ψ fattorizzi attraverso (P, ϕ), come da diagramma.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_0"'] & M \\ & P \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Se $\psi_0 : N \to P$ è l'unica mappa tale che $\phi \circ \psi_0 = \psi$ allora ψ_0 è continua.

Corollario 6.5 *Nelle ipotesi del teorema precedente, la mappa ψ_0 è anche $\mathcal{C}^\infty$.*

Useremo questi risultati nei prossimi capitoli. In particolare ci si può aspettare che quest'ultimo corollario giocherà un ruolo cruciale nella dimostrazione del teorema di completezza della sottocategoria $\mathcal{G}$ in $\mathcal{TG}$.

6.2 Ideali differenziali

In questa sezione non tratteremo gruppi di Lie, ma varietà lisce. Riportiamo per prima cosa la formula di Cartan:

Proposizione 6.6 *(Formula di Cartan) Sia M una varietà liscia. Sia $\omega \in E^p(M)$ e $Y_0, ..., Y_p \in \mathcal{X}^\infty(M)$. Allora vale la formula:*

$$d\omega(Y_0, ..., Y_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i Y_i \omega(Y_o, ..., \widehat{Y_i}, ..., Y_p) + \sum_{i<j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, ..., \widehat{Y_i}, ..., \widehat{Y_j}, ..., Y_p)$$

Definizione 6.7 Sia M una varietà d-dimensionale e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione p-dimensionale. Diremo che una q-forma ω *annulla* $\mathcal{D}$ se per ogni $m \in M$, vale

$$\omega_m(v_1, ..., v_q) = 0 \quad \forall (v_1, ..., v_q) \in \mathcal{D}(m).$$

Diremo che una forma $\omega \in E^*(M)$ *annulla* $\mathcal{D}$ se ogni sua parte omogenea annulla $\mathcal{D}$. Poniamo

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}) = \{\omega \in E^*(M) | \ \omega \text{ annulla } \mathcal{D}\}$$

Definizione 6.8 Un insieme di 1-forme $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ su una varietà M è detto *indipendente* se $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ è un insieme indipendente di $T_m(M)^*$ per ogni $m \in M$.

Proposizione 6.9 *Sia $\mathcal{D}$ una distribuzione p-dimensionale su M, con M varietà d-dimensionale. Allora*

1. *$\mathcal{I}(\mathcal{D})$ è un ideale in $E^*(M)$.*

2. *$\mathcal{I}(\mathcal{D})$ è localmente generato da $d-p$ 1-forme indipendenti. Questo significa che per ogni $m \in M$ esiste un intorno $U \ni m$ e un insieme di 1-forme indipendenti $\omega_1, ..., \omega_{d-p}$ su U tali che:*

   a) *Se $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$, allora $\omega|_U$ appartiene all'ideale in $E^*(M)$ generato da $\omega_1, ...\omega_{d-p}$.*

   b) *Se $\omega \in E^*(M)$, e se esiste un ricoprimento di M di insiemi U, tale che per ogni U nel ricoprimento, $\omega|_U$ appartiene all'ideale generato da $\omega_1, ...\omega_{d-p}$, allora $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$.*

3. *Se $\mathcal{I} \in E^*(M)$ è un ideale localmente generato da $d-p$ 1-forme indipendenti, allora esiste un'unica distribuzione $\mathcal{C}^\infty$ $\mathcal{D}$ di dimensione p su M tale che $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{D})$.*

Definizione 6.10 Un ideale $\mathcal{I} \subset E^*(M)$ è detto un *ideale differenziale* se è chiuso rispetto all'operazione di differenziazione esterna d, ovvero se

$$d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$$

Proposizione 6.11 *Una distribuzione $\mathcal{C}^\infty$ $\mathcal{D}$ su M è involutiva se e solo se l'ideale $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ è un ideale differenziale.*

Definizione 6.12 Una sottovarietà (N, ψ) di M verrà detta una *sottovarietà integrale di un ideale $\mathcal{I} \subset E^*(M)$* se per ogni $\omega \in \mathcal{I}$, $\delta\psi(\omega) = 0$. Diremo una varietà integrale connessa di un ideale $\mathcal{I}$ *massimale* se la sua immagine non è un sottoinsieme proprio di un' altra varietà integrale connessa di un ideale.

Segue immediatamente dal teorema di Frobenius e dalla proposizione appena vista, il seguente

Teorema 6.13 *(Frobenius) Sia $\mathcal{I} \subset E^*(M)$ un ideale differenziale localmente generato da $d-p$ 1-forme indipendenti. Sia $m \in M$. Allora esiste un'unica (a meno di isomorfismo) sottovarietà integrale massimale connessa di $\mathcal{I}$ passante per m e questa sottovarietà integrale ha dimensione p.*

Questa è la versione del teorema di Frobenius espressa in termini di forme ed ideali differenziali. Il seguente teorema è la base per le prove di esistenza ed unicità per sottogruppi di Lie.

Teorema 6.14 *Siano N e M varietà rispettivamente di dimensione c e d, e siano π_1 e π_2 le proiezioni canoniche di $N \times M$ su N e su M rispettivamente. Supponiamo che esista una base $< \omega_1, ..., \omega_d >$ per le 1-forme su M.*

1. *Se $f : N \to M$ è $\mathcal{C}^\infty$, allora il grafico di f è una varietà integrale dell'ideale delle forme su $N \times M$ generato da*

$$\{\delta\pi_1 \delta f(\omega_i) - \delta\pi_2(\omega_i) |\ i = 1, ..., d\}$$

2. *Se $\{\alpha_i |\ i = 1, ..., d\}$ sono 1-forme su N, e se l'ideale delle forme su $N \times M$ generato da*

$$\{\delta\pi_1(\alpha_i) - \delta\pi_2(\omega_i) |\ i = 1, ..., d\}$$

è un ideale differenziale, allora dati $n_0 \in N$ e $m_0 \in M$, esiste un intorno $U \ni n_0$ e una mappa $\mathcal{C}^\infty$ $f : U \to M$ tale che $f(n_0) = m_0$ e tale che

$$\delta f(\omega_i) = \alpha_i|_U \quad i = 1, ..., d \tag{6.1}$$

Inoltre, se U è un aperto connesso $n_0 \in U$, per il quale esiste una mappa $f : U \to M$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ verificante sia $f(n_0) = m_0$ sia la (6.1), allora questa mappa è unica su U.

6.3 Forme invarianti

Ritorniamo ai gruppi di Lie. Diamo ora una nozione analoga a quella di campo invariante sinistro.

Definizione 6.15 Sia ω una forma differenziale su G gruppo di Lie. Diremo ω *invariante sinistra* se:

$$\delta L_\sigma(\omega) = \omega \quad \forall \sigma \in G$$

Come per i campi invarianti sinistri, non è necessario supporre che le forme siano lisce: è una conseguenza del fatto che sono invarianti sinistre. Denoteremo lo spazio vettoriale delle p-forme su G con $E^p_{linv}(G)$ e con:

$$E^*_{linv}(G) = \sum_{p=0}^{dim(G)} E^p_{linv}(G)$$

La seguente proposizione è del tutto analoga alla proposizione (3.7).

Proposizione 6.16 1. *Le forme invarianti sinistre sono lisce.*

2. *$E^*_{linv}(G)$ è una sottoalgebra dell'algebra $E^*(G)$ di tutte le forme lisce su G e la mappa $\omega \to \omega(e)$ è un isomorfismo di algebre fra E^*_{linv} e $\Lambda(G^*_e)$. In particolare, questa mappa dà un isomorfismo naturale tra $E^1_{linv}(G)$ e $T_e(G)^*$.*

3. *Se ω è una 1-forma invariante sinistra e X è un campo vettoriale invariante sinistro, allora $\omega(X)$ è una funzione costante su G.*

4. *Se $\omega \in E^1_{linv}(G)$ e $X, Y \in \mathcal{L}(G)$, segue dalla formula di Cartan che*

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$$

5. *Sia $< X_1, ..., X_d >$ una base di $\mathcal{L}(G)$ con base duale $< \omega_1, ..., \omega_d >$. Esistono delle costanti c_{ijk} tali che*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ijk} X_k$$

con

$$c_{ijk} + c_{jik} = \sum_r c_{ijr}c_{rks} + c_{jkr}c_{ris} + c_{kir}c_{ris} = 0$$

Vale allora la formula di Maurer-Cartan (le 1-forme invarianti sinistre sono anche dette forme di Maurer-Cartan):

$$d\omega_i = \sum_{j<k} c_{jki}\omega_k \wedge \omega_j$$

6.4 Morfismi di gruppi di Lie e forme invarianti

Vedremo ora come i morfismi di gruppi di Lie agiscano sulle forme invarianti. Alla fine di questa sezione dimostreremo un risultato importante che mira all'inversione del funtore di Lie.

Proposizione 6.17 *Siano G e H gruppi di Lie, e sia $\phi : G \to H$ un morfismo di gruppi di Lie. Allora il pull-back tramite ϕ manda forme invarianti sinistre su H in forme invarianti sinistre su G. Inoltre la mappa $\delta\phi : E^1_{linv}(H) \to E^1_{linv}(G)$, considerata come mappa di $\mathcal{L}(G)^*$ in $\mathcal{L}(H)^*$, è la trasposta di $d\phi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$.*

Dimostrazione: Ricordiamo innanzi tutto che, poichè ϕ è un morfismo di gruppi di Lie, vale la formula:

$$\phi \circ L_a = L_{\phi(a)} \circ \phi$$

Usando questa formula e le proprietà del pull-back di forme, vediamo che vale:

$$\delta L_a \delta\phi(\omega) = \delta(\phi \circ L_a)\omega = \delta(L_{\phi(a)} \circ \phi)\omega = \delta\phi\delta L_{\phi(a)}(\omega) = \delta\phi(\omega)$$

cioè la tesi. $\square$

Teorema 6.18 *Siano G e H gruppi di Lie e sia G connesso. Siano ϕ e $\psi : G \to H$ morfismi di gruppi di Lie, tali che $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\psi)$. Allora $\phi = \psi$.*

Dimostrazione: vogliamo usare il punto (2) del teorema (6.14) della precedente sezione (la parte relativa all'unicità). Essendo ϕ e ψ morfismi di gruppi, mandano $e \to e$. Sia $< \omega_1, ..., \omega_d >$ una base di $E^1_{linv}(H)$. Indichiamo sempre le costanti della proposizione (6.16) punto (5) con c_{ijk}, in modo che

$$d\omega_i = \sum_{i<k} c_{jki}\omega_k \wedge \omega_j$$

Siano $\pi_1 : G \times H \to G$ e $\pi_2 : G \times H \to H$. Dobbiamo vedere che l'ideale $\mathcal{I}$ generato dalle forme:

$$\{\delta\pi_1\delta\phi(\omega_i) - \delta\pi_2(\omega_i)|\ i = 1, ..., d\} \tag{6.2}$$

è un ideale differenziale e successivamente che $\delta\phi(\omega_i) = \delta\psi(\omega_i)$. Il secondo punto è ovvio dal momento che $d\phi = d\psi$. Verifichiamo che l'ideale generato dalle forme (6.2) è differenziale. Per questo facciamo uso nel calcolo che segue del fatto che il pull-back $\delta\phi$ commuta con il differenziale esterno d. Quindi

$$d(\delta\phi(\omega_i)) = \sum_{j<k} c_{jki}\delta\phi(\omega_k) \wedge \delta\phi(\omega_j)$$

Ma allora

$$d(\delta\pi_1\delta\phi(\omega_i) - \delta\pi_2(\omega_i)) = \sum_{j<k} c_{jki}(\delta\pi_1\delta\phi(\omega_k) \wedge \delta\pi_1\delta\phi(\omega_j) - \delta\pi_2(\omega_k) \wedge \delta\pi_2(\omega_j)) =$$

$$= \sum_{j<k} c_{jki}((\delta\pi_1\delta\phi(\omega_k) - \delta\pi_2(\omega_k)) \wedge \delta\pi_1\delta\phi(\omega_j) + \delta\pi_2(\omega_k) \wedge (\delta\pi_1\delta\phi(\omega_j) - \delta\pi_1(\omega_j)))$$

L'ultimo membro appartiene all'ideale $\mathcal{I}$. Ne segue che $\phi = \psi$. $\square$
Si può osservare inoltre che le 1-forme che compaiono nella formula (6.2) sono invarianti sinistre su $G \times H$. Questo segue immediatamente dal fatto che $\pi_1 \circ L_{(g,h)} = L_g \circ \pi_1$ e $\pi_2 \circ L_{(g,h)} = L_h \circ \pi_2$.

Anche il risultato di esistenza del punto (2) del teorema (6.14) ci sarà utile. Per ottenere un teorema di esistenza faremo uso della teoria dei rivestimenti, adattata al caso delle varietà differenziabili e in modo particolare dei gruppi di Lie. Per i risultati essenziali sui rivestimenti, ci riferiamo a [7] o a [8] o a [9]. Useremo le notazioni di [9].

6.5 Rivestimenti di gruppi di Lie e π_1

Diamo per completezza la definizione di rivestimento:

Definizione 6.19 Siano X e Y due spazi topologici di Hausdorff, con X connesso e localmente connesso per archi. Sia $\pi : X \to Y$ una mappa continua e suriettiva. Diremo

1. $U \subset Y$, U aperto *ben rivestito* da X, π se, $\pi^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti omeomorfi tramite π ad U.

2. (X, π) *rivestimento* se ogni punto ha un intorno ben rivestito da (X, π).

Teorema 6.20 *Sia G un gruppo di Lie connesso. Allora esiste $(\tilde{G}, \pi)$ rivestimento universale, con $\tilde{G}$ gruppo di Lie e π morfismo di gruppi di Lie.*

Dimostrazione: Una varietà è localmente connessa per archi, essendo G connesso, è connesso per archi. Essendo localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, G è semilocalmente semplicemente connesso. Quindi esiste il rivestimento universale $(\tilde{G}, \pi)$. Come rivestimento di varietà, $\tilde{G}$ ha un'unica struttura differenziabile che rende π un diffeomorfismo locale. Vediamo come sia possibile indurre sulla varietà $\tilde{G}$ una struttura di gruppo, in modo che $\tilde{G}$ sia un gruppo di Lie e π un morfismo di gruppi di Lie. Si consideri $\alpha : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$, tale che $\alpha(\tilde{a}, \tilde{b}) = \pi(\tilde{a})\pi(\tilde{b})^{-1}$. Si scelga un elemento $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Dal momento che $\tilde{G} \times \tilde{G}$ e $\tilde{G}$ sono entrambi semplicemente connessi, esiste unica una mappa $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ tale che $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, e tale che $\tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

Definiamo

$$\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{t}) \quad \tilde{m}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{\alpha}(\tilde{a}, \tilde{b}^{-1})$$

Bisogna verificare che $\tilde{G}$, con l'operazione introdotta $\tilde{m}$ è un gruppo. Verifichiamo che $\tilde{e}$ è l'elemento neutro. Le mappe $\tilde{a} \to \tilde{m}(\tilde{a}, \tilde{e})$, $\tilde{a} \to \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{a})$ e infine, la mappa identica $Id_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ rendono commutativo il seguente diagramma, mandando $\tilde{e}$ in $\tilde{e}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
\tilde{G} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\pi"'] & G
\end{tikzcd}$$

Poichè $\tilde{G}$ è semplicemente connesso, si ha ancora l'unicità. Così si ha che:

$$\tilde{m}(\tilde{a}, \tilde{e}) = \tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{a}) = \tilde{a}$$

Allo stesso modo, basandosi sull'unicità delle mappe, si verificano le proprietà associativa, il fatto che $\tilde{\alpha}^{-1}$ sia davvero l'inverso di $\tilde{\alpha}$ e che tale inverso sia unico. Per la definizione di struttura differenziabile su $\tilde{G}$, $\tilde{\alpha}$ è una funzione liscia. Questo rende G un gruppo di Lie. Per concludere la dimostrazione, si osservi che $\tilde{m}$ è definito in modo da rendere π un morfismo di gruppi di Lie. $\square$

Proposizione 6.21 *Siano G e H gruppi di Lie connessi e $\phi : G \to H$ un morfismo di gruppi di Lie. Allora ϕ è un rivestimento se e solo se $d\phi_e : T_e(G) \to T_e(H)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione: Supponiamo inizialmente ϕ un rivestimento. Vediamo che $d\phi_e$ deve essere iniettivo e suriettivo. Se non fosse iniettivo, $d\phi$ (la mappa da $\mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$ interpretati come le algebre dei campi invarianti sinistri) avrebbe in ogni punto $g \in G$ nucleo non banale. Questo definirebbe una distribuzione su G. Essendo $d\phi_e$ un morfismo di algebre di Lie, tale distribuzione risulterebbe essere involutiva. Integrando, ogni punto avrebbe un intorno aperto mandato in un punto da ϕ. Pertanto ϕ non sarebbe un rivestimento, come invece supposto. Se non fosse suriettivo, ϕ sarebbe (localmente) un'immersione iniettiva propria e (G, ϕ) sarebbe una sottovarietà propria di H. Ancora, ϕ non potrebbe essere un rivestimento.

Supponiamo ora che $d\phi$ sia un isomorfismo di algebre di Lie. G è certamente (connesso) e localmente connesso per archi, come abbiamo già osservato nel teorema precedente. ϕ è un diffeomorfismo locale in ogni punto. Ricordiamo che, per il corollario (2.9), un intorno di $e \in H$ genera l'intero gruppo H. Così, $\phi(G) = H$. Per vedere che un diffeomorfismo locale suriettivo è un rivestimento, è sufficiente dimostrare che ogni punto di H

è contenuto in un aperto ben rivestito. Essendo ϕ un morfismo di gruppi, $ker(\phi)$ è un sottogruppo normale di G. Inoltre, essendo ϕ un diffeomorfismo locale, la fibra di $e \in H$ è discreta. Chiameremo $D = ker(\phi)$. Per continuità dell'operazione prodotto e dell'operazione di inversione, troviamo un intorno aperto $V \ni e$, $V \subset G$ tale che

$$(V^{-1}V) \cap D = \{e\}$$

Vediamo che $\phi(V)$ è un aperto in H, $V \ni e$ e V è ben rivestito da (G, ϕ). $\phi|_V$ è iniettiva, infatti, se $\phi(a) = \phi(b)$,

$$\phi(a)^{-1}\phi(b) = \phi(a^{-1}b) = e$$

Per definizione di V, $a^{-1}b$ deve essere e. Inoltre, $d\phi$ è un isomorfismo in ogni punto di G. Restringiamo eventualmente V in modo tale che $\phi|_V : V \to \phi(V)$ è un diffeomorfismo. Vediamo ora che $\phi^{-1}(\phi(V)) = \cup_{\delta \in D} V\delta$. Che $\cup_{\delta \in D} V\delta \subset \phi^{-1}(\phi(V))$ è una verifica. Vediamo l'altra inclusione. Supponiamo che $\phi(a) \in \phi(V)$. Allora esiste $b \in V$ tale che $\phi(a) = \phi(b)$. Così $b^{-1}a \in D$ e $a \in Vb^{-1}a$. Questo prova la seconda inclusione. Per vedere che $\phi(V)$ è ben rivestito, dobbiamo vedere che $V\delta_1 \cap V\delta_2 = \emptyset$, quando $\delta_1 \neq \delta_2$. Per assurdo, sia $\sigma \in V\delta_1 \cap V\delta_2$. Allora $\sigma = a\delta_1 = b\delta_2$ per certi $a, b \in V$. Allora $a^{-1}b \in D$ e $a^{-1}b \in V^{-1}V$ Così per quanto visto prima $a = b$, cioè $\delta_1 = \delta_2$. Segue che $\phi(V)$ è ben rivestito, e la tesi è dimostrata. $\square$

E' facile vedere che questo dà una corrispondenza funtoriale $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, che associa ad ogni gruppo di Lie il suo rivestimento universale. Riportiamo alcune considerazioni topologiche sui gruppi di Lie che discendono banalmente dalla teoria fin qui svolta, e che lasciano intravedere come il calcolo del gruppo fondamentale di un gruppo di Lie sia "agevolato" rispetto al calcolo del gruppo fondamentale di un qualunque spazio topologico.

Corollario 6.22 *Sia G un gruppo di Lie, e $(\tilde{G}, \pi)$ il suo rivestimento universale. Il gruppo fondamentale $\pi_1(G)$ è isomorfo a $ker(\pi)$: un sottogruppo normale di Lie di $\tilde{G}$ di dimensione* 0.

In questa dimostrazione denoteremo con $Aut(\tilde{G} \to G)$ il gruppo degli automorfismi di rivestimento di $\tilde{G}$ che fissano G. Tali mappe sono omeomorfismi che commutano con il rivestimento, e non necessariamente degli automorfismi di un gruppo di Lie.
Dimostrazione: cerchiamo un isomorfismo fra $Aut(\tilde{G} \to G)$ e $ker(\pi)$. La composizione di questo isomorfismo e di quello da $Aut(\tilde{G} \to G)$ al gruppo fondamentale di G dà l'isomorfismo cercato ($\tilde{G}$ è semplicemente connesso).

Sia allora $\mathcal{F} : ker(\pi) \to Aut(\tilde{G} \to G)$ tale che $\mathcal{F}(\tilde{g}) = L_{\tilde{G}}$. Questa mappa è chiaramente un omomorfismo di gruppi iniettivo. Per dimostrare che è suriettiva, sia fissato un elemento $\alpha \in Aut(\tilde{G} \to G)$. Se denotiamo con $\tilde{e}$ l'elemento neutro di $\tilde{G}$, α e $L_{\alpha(\tilde{e})}$ sono in $Aut(\tilde{G} \to G)$ e fanno commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{G}, \alpha(\tilde{e})) \arrow[d, "\pi"] \\ (\tilde{G}, \tilde{e}) \arrow[ur, dashed, "\alpha"] \arrow[r, "\pi"'] & (G, e) \end{tikzcd}$$

Il teorema fondamentale dei rivestimenti garantisce pertanto che queste due mappe sono uguali. Così $\alpha = \mathcal{F}(\alpha(\tilde{e}))$ e la mappa $\mathcal{F}$ è suriettiva. $\square$

Lemma 6.23 *Ogni sottogruppo normale discreto K di un gruppo topologico G connesso è nel centro di questo gruppo.*

Dimostrazione: Sia $x \in K$ e sia U un intorno di x non contenente altri elementi di K. Grazie alla continuità del prodotto nei gruppi topologici, si trova un intorno V dell'identità in G, tale che $VxV^{-1} \subset U$. Siccome K è normale e $U \cap K = \{e\}$, si ha che $yxy^{-1} = x$ per ogni elemento $y \in V$. Quindi il centralizzante di X contiene l'intorno V. Siccome V genera G (corollario 2.9), il centralizzante di x coincide con G e quindi x è nel centro di G. $\square$

Corollario 6.24 *Il gruppo fondamentale $\pi_1(G)$ di un gruppo di Lie connesso è abeliano.*

Per approfondire lo sviluppo di strumenti che agevolino il calcolo del gruppo fondamentale di un gruppo di Lie, rimandiamo a [8].

7 Il teorema di Cartan e l'inversione del funtore di Lie

In questo capitolo vediamo l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Cartan. Osserveremo che il funtore di Lie agisce in modo "ordinato" sui sottooggetti. Il funtore di Lie infatti manda sottogruppi di Lie in sottoalgebre di Lie, sottogruppi normali in ideali. Nella prima sezione del capitolo, sospendiamo quindi l'attenzione sull'invertibilità del funtore di Lie per studiarne le proprietà "interne".

7.1 Sottogruppi e sottoalgebre

All'interno di un gruppo di Lie iniziamo ad osservare che il funtore di Lie è invertibile: a ogni sottogruppo corrisponde una sottoalgebra e viceversa.

Teorema 7.1 *Sia G un gruppo di Lie. Sia $h \subset \mathcal{L}(G)$ una sua sottoalgebra. Esiste un' unica classe di equivalenza di sottogruppi di Lie connessi (H, ϕ) di G tale che $d\phi(\mathcal{L}(G)) = h$.*

Dimostrazione: definiamo su G una distribuzione $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}(a) = \{X(a)|\ X \in h\} \quad \forall a \in G$$

d=dim($\mathcal{D}$)=dim(h). $\mathcal{D}$ è una distribuzione liscia generata da $< X_1, ..., X_d >$ (una base di h, qui con h intendiamo l'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti sinistri) involutiva. Sia (H, ϕ) la varietà integrale massimale connessa di $\mathcal{D}$ passante per e. Una verifica diretta mostra che $\mathcal{D}$ è una distribuzione "invariante a sinistra". Per massimalità si conclude che , se $a, b \in \phi(H)$, allora $L_{a^{-1}b} \circ \phi(H) \subset \phi(H)$. Quindi $a^{-1}b \in \phi(H)$ e $\phi(H)$ è un gruppo. Bisogna verificare ancora che (H, ϕ) è un sottogruppo di Lie di G. Dobbiamo mostrare che $\alpha : H \times H \to H$, $\alpha(a, b) = ab^{-1}$ è $\mathcal{C}^\infty$. Ora la mappa $\beta : H \times H \to G$, $\beta(a, b) = \phi(a)\phi(b)^{-1}$ è $\mathcal{C}^\infty$ e il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & G \\ & H \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Segue dal teorema di Frobenius versione (6.4) che α è liscia. Così (H, ϕ) è un sottogruppo di Lie, con algebra di Lie h.

Per l'unicità, sia (K, ψ) un altro sottogruppo connesso massimale di Lie che verifica ancora $d\psi(\mathcal{L}(K)) = h$. Anche (K, ψ) è quindi una varietà integrale di $\mathcal{D}$ passante per e. Per massimalità di (H, ϕ), $\psi(K) \subset \phi(H)$ e c'è un'unica mappa h tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "h"'] & G \\ & H \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

h è liscia per (6.4). Quindi è un morfismo iniettivo di gruppi di Lie. Inoltre h ha differenziale iniettivo in ogni punto. Per il teorema della funzione inversa, si trova un intorno dell'origine in cui h è un diffeomorfismo. Il risultato visto in (2.9) permette di dedurre che la mappa h è suriettiva su H. Così h è un isomorfismo di gruppi di Lie. Questo prova la parte rimanente del teorema. $\square$

Corollario 7.2 *Il funtore di Lie $\mathcal{L}$ induce una corrispondenza biunivoca fra i sottogruppi di Lie di un gruppo G connessi e le sottoalgebre di $\mathcal{L}(G)$.*

Questa è una prima parte dell'enunciato di Cartan. L'enunciato definitivo afferma che il funtore di Lie fa corrispondere a sottogruppi normali di Lie ideali nella sua algebra di Lie.

Corollario 7.3 *La componente connessa di un sottogruppo di Lie dipende solamente dalla sua algebra di Lie.*

Possiamo riscrivere il tutto in termini di ideali differenziali:

Corollario 7.4 *Supponiamo che l'ideale $\mathcal{I}$ generato da un insieme $\{\omega_1, ..., \omega_{c-d}\}$ di forme di Maurer-Cartan indipendenti su un gruppo di Lie G sia differenziale. Allora la sottovarietà integrale massimale connessa di $\mathcal{I}$ per e è un sottogruppo di Lie di G.*

Il seguente risultato mostra che in un sottogruppo di Lie una sola struttura di varietà differenziabile è possibile.

Teorema 7.5 *Un sottogruppo A di un gruppo di Lie G ha, al più, una struttura differenziabile che rende (A, i) una sottovarietà di G, (con i indichiamo come al solito l'inclusione). Con tale struttura (A, i) è un sottogruppo di Lie di G.*

Dimostrazione: Per prima cosa vediamo che con una qualunque struttura differenziabile, (A, i) è un sottogruppo di Lie di G. Dimostriamo che (A, i) è una sottovarietà integrale di una certa distribuzione $\mathcal{D}$. Nel seguito della dimostrazione supporremo $dim(A) = k$. Scelta una base di $T_e(G)$, $([\alpha_1], ..., [\alpha_k])$ (in questo passaggio ci avvaliamo dell'interpretazione dei vettori tangenti come classi di equivalenza di curve), trasliamo tali curve in ogni punto $\sigma \in A$, mediante moltiplicazione a sinistra per σ. In questo modo risulta definita una distribuzione $\mathcal{D}$ su A. Dimostriamo che (A, i) è la varietà integrale di D passante per $e \in G$. Sia $dim(A) = k$. Se per qualche $\sigma \in A$ lo spazio tangente $T_\sigma(A) \not\subset \mathcal{D}_\sigma$, si possono trovare $k + 1$ curve lisce in G, incluse in A che stanno in $k + 1$ classi di equivalenza di vettori tangenti a G in σ indipendenti. Traslando queste curve nell'origine, otteniamo $k + 1$

curve lisce in G, $(\gamma_1, ..., \gamma_{k+1})$, incluse in A e passanti in 0 per e. Inoltre tali curve sono in classi di equivalenza (vettori tangenti nell'identità) che sono indipendenti. Se indichiamo con $*$ il prodotto in G, il differenziale della mappa $\phi(t_1, ..., t_{k+1}) \to \gamma_1 * ... * \gamma_{k+1}$, definita da un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^{k+1}$ a valori in un intorno dell'identità di G, è un isomorfismo. Così in un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^{k+1}$ è un diffeomorfismo la cui immagine è un intorno di e che è contenuto in A essendo A un sottogruppo. Estendendo la mappa ϕ a una mappa definita su $\mathbb{R}^{dim(G)}$, si trova un diffeomorfismo da un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^n$ a un intorno U dell'identità in G. Questo darebbe una mappa liscia di $U \cap A \to \mathbb{R}^n$ con immagine contenente un aperto di $\mathbb{R}^{k+1}$. Questo è assurdo perchè l'immagine di una funzione liscia da una varietà ad una varietà di dimensione maggiore ha misura nulla (e non può pertanto contenere un aperto). Così sappiamo che (A, i), se ammette una struttura differenziabile di sottovarietà, è varietà integrale. Pertanto la distribuzione $\mathcal{D}$ è certamente involutiva. Argomentando come nel teorema visto in precedenza, si riesce a verificare che la mappa $(a, b) \to ab^{-1}$ è $\mathcal{C}^\infty$. Così abbiamo che (A, i) è un gruppo di Lie.

Supponiamo ora che A abbia due strutture differenziabili che la rendano sottovarietà di G. Denotiamo queste due varietà differenziabili con A_1 e A_2. Allora entrambe (A_1, i) e (A_2, i) sono varietà integrali di una distribuzione involutiva su G. Così, applicando ancora il corollario (6.5) al diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "Id"'] & G \\ & A_2 \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

si deduce che l'identità $Id : A_1 \to A_2$ è un diffeomorfismo. Quindi le due strutture differenziabili sono uguali, e la dimostrazione è conclusa. $\Box$

Teorema 7.6 *(del sottogruppo chiuso) Sia (H, ϕ) un sottogruppo di Lie di G. Allora (H, ϕ) come sottovarietà di G è embedded se e solo se $\phi(H)$ è un chiuso in G.*

Dimostrazione: Supponiamo per prima cosa che ϕ sia un embedding. Vogliamo vedere che $\phi(H)$ è un chiuso di G. Sia $\{x_i\}$ una successione di punti di $\phi(H)$ che converge a $x \in G$. Poichè ϕ è un embedding, c'è una carta (U, τ) con $e \in U$ e $\tau(U)$ un cubo di $\mathbb{R}^{dim(G)}$ tale che

$$\phi(H) \cap U = \{\tau_1 = 0, ..., \tau_{dim(G)-dim(H)} = 0\}$$

Chiameremo S questo insieme. Per la continuità del prodotto, si trovano intorni dell'identità $V \subset W \subset U$, in modo tale che l'immagine tramite τ di entrambi sia ancora un cubo, con $V^{-1}V \subset \overline{W}$. Per N abbastanza grande, per tutti gli $n > N$ si ha che $x_N^{-1}x_n \in V \subset \overline{W}$. Inoltre $x_N^{-1}x_n \in \phi(H)$, perchè ϕ è un morfismo di gruppi. Facendo tendere $n \to +\infty$, troviamo che $x_N^{-1}x_n \to x_N^{-1}$ e questo deve stare in $S \cap \overline{W}$ perché quest'ultimo è chiuso. Così anche $x \in \phi(H)$ sempre perché ϕ è un omomorfismo, e $\phi(H)$ è chiuso.

Supponiamo ora che $\phi(H)$ sia chiuso in G. E' sufficiente dimostrare che esiste un aperto $V \subset H$ tale che $\phi|_V$ è un omeomorfismo da V in $\phi(V)$. Infatti, ricordiamo che, poichè ϕ è un omomorfismo di gruppi:

$$\phi(\sigma x) = \phi(\sigma)\phi(x) \quad \forall x \in H$$

e quindi ϕ commuta con la traslazione a sinistra:

$$\phi \circ L_\sigma = L_{\phi(\sigma)} \circ \phi$$

Così si ottiene un omeomorfismo di un intorno dell'identità in un intorno dell'identità. Grazie al fatto che un intorno dell'identità genera tutto il gruppo, si trova che ϕ è un omeomorfismo locale sull'immagine. Essendo anche una biiezione sull'immagine, questo è un omeomorfismo globale (quindi un embedding). Passiamo quindi a dimostrare che esiste tale aperto $V \subset H$. Per il teorema di Frobenius troviamo una carta (U, τ) centrata ad esempio in $e \in G$, con $\phi(U)$ un cubo aperto di $\mathbb{R}^{dim(G)}$ tale che $\phi(H) \cap U$ è un'unione al più numerabile di "fette":

$$\tau_i = \text{costante} \quad dim(H) + 1 \leq i \leq dim(G)$$

Sia C il sottoinsieme chiuso di U contenente e la cui immagine attraverso τ sia un cubo, e sia S la fetta di C data da

$$\tau_1, ..., \tau_{dim(H)} = 0$$

Allora $\tau(\phi(H) \cap S)$ è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e numerabile di $\mathbb{R}^{dim(G)-dim(H)}$. Una conseguenza del teorema di Baire afferma che un sottoinsieme chiuso e numerabile di uno spazio Euclideo deve avere un punto isolato. (per il teorema di Baire rimandiamo a [4]). Quindi c'è una fetta isolata S_0 nella collezione delle "fette" $\phi(H) \cap U$. Così l'insieme V cercato è $\phi^{-1}(S_0)$. Su $\phi^{-1}(S_0)$ infatti, ϕ è aperta come applicazione a valori in $\phi(\phi{-}1(S_0))$ con la topologia indotta dalla topologia di G. $\Box$

7.2 L'inversione del funtore di Lie

Teorema 7.7 *Siano G e H gruppi di Lie, G semplicemente connesso. Sia $\psi : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$ un morfismo di algebre di Lie. Allora esiste unico un morfismo di gruppi di Lie $\phi : G \to H$ tale che $d\phi = \psi$.*

Dimostrazione: L'unicità è già stata provata in (6.18). Vediamo l'esistenza. Sia $< \omega_1, ..., \omega_m >$ una base per le forme di Maurer-Cartan su H, e sia ψ^* la trasposta di ψ ($\psi^*(\omega)(X) = \omega(\psi(X))$)). In (6.18) abbiamo visto che le 1-forme:

$$\{\delta\pi_1(\psi^*(\omega_i)) - \delta\pi_2(\omega_i)\} \quad i = 1, ..., m$$

sono forme invarianti sinistre su $G \times H$. (indichiamo come in (6.18) con π_1 e con π_2 le due proiezioni da $G \times H$ rispettivamente in G e in H). Inoltre l'ideale $\mathcal{I}$ generato da queste forme è differenziale. Per il corollario (7.4) la sottovarietà integrale massimale connessa per $(e, e) \in G \times H$ è un sottogruppo di Lie di $G \times H$, con dimensione uguale alla dimensione di G. Chiameremo I l'immagine della sottovarietà integrale passante per (e, e). Dimostriamo che il differenziale di $\pi_1|_I$ in ogni punto è un isomorfismo. Essendo le dimensioni di partenza e di arrivo uguali, è sufficiente vedere che il differenziale è iniettivo in ogni punto. Sia $v \in T_q(I)$, con $q \in I$. Supponiamo che $d\pi_1(v) = 0$. Essendo $v \in T_q(I)$, $\{\delta\pi_1(\psi^*(\omega_i)) - \delta\pi_2(\omega_i)\}(v) = 0$. Quindi $(\delta\pi_2(\omega_i))(v) = 0$, cioè

$$\omega_i(d\pi_2)(v) = 0 \quad i = 1, ..., m$$

Quindi essendo $< \omega_1, ..., \omega_m >$ una base per le 1-forme su M, $d\pi_2(v) = 0$. Così, essendo $d\pi_1(v) = 0$ e $d\pi_2(v) = 0$, $v = 0$ (infatti $d(\pi_1, \pi_2)_q = Id|_{T_q(M \times N)}$). Abbiamo così visto che il differenziale di π_1 è un isomorfismo, quindi π_1 è un morfismo di rivestimenti. Ma essendo G semplicemente connesso, π_1 è un omeomorfismo ed anche un diffeomorfismo locale, quindi un diffeomorfismo. Definiamo $\phi : G \to H$ con $\phi = \pi_2 \circ (\pi_1|_I)^{-1}$. Per definizione, ϕ è un morfismo di gruppi di Lie. Inoltre $\delta\phi(\omega_i) = \psi^*(\omega_i)$. Grazie al teorema (6.14) otteniamo che $d\phi = \psi$, la tesi. □

Abbiamo così visto che il funtore di Lie, se ristretto alla sottocategoria dei gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi è iniettivo. Per identificare univocamente un gruppo di Lie in tale sottocategoria è sufficiente darne l'algebra di Lie. Lo studio dei gruppi di Lie si riduce in questo modo allo studio delle loro algebre di Lie, che essendo spazi lineari hanno una struttura più semplice. Studiare le algebre di Lie per studiare i gruppi di Lie, da quanto visto fin ora, potrebbe rivelarsi pletorico. Non abbiamo garanzie circa il fatto che il funtore di Lie sia suriettivo: molte algebre di Lie potrebbero in questo modo essere prive di interesse. Un celebre risultato dovuto a Ado ci permette di concludere che per studiare tutti i gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi, è proprio necessario (e sufficiente) studiare tutte le algebre di Lie.

Teorema 7.8 *(di Ado) Ogni algebra di Lie g ammette una rappresentazione fedele in $gl(n)$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

La dimostrazione di questo risultato è lunga e articolata, e può essere trovata in [8].

Il teorema di Ado assicura che data un'algebra di Lie g, è possibile ritrovarne una isomorfa che sia una sottoalgebra di $gl(n)$. D'altra parte abbiamo visto che $gl(n)$ è l'algebra di Lie del gruppo $GL(n)$. Così, usando la corrispondenza fra sottoalgebre e sottogruppi di Lie, troviamo che esiste un'unica classe di isomorfismo di sottogruppi di Lie con algebra di Lie isomorfa a g. Detta $\mathcal{G}_{00}$ la sottocategoria completa di $\mathcal{G}$ che ha per oggetti i gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi, questo risultato può essere riformulato con il seguente

Corollario 7.9 *Il funtore di Lie $\mathcal{L} : \mathcal{G}_{00} \to \mathcal{AL}_f$ è quasi invertibile.*

La quasi invertibilità è conseguenza del fatto che a partire da un'algebra di Lie riusciamo a ricostruire un gruppo di Lie G tale che $\mathcal{L}(G)$ è nella classe di isomorfismo dell'algebra di Lie di partenza. Questo non dà una completa suriettività sulla categoria delle algebre, ma solo sulle sue classi di equivalenza di isomorfismo.
Dimostrazione: segue dai risultati visto in precedenza e dal teorema di Ado.$\Box$ Per concludere la sezione osserviamo per completezza che un analogo del teorema di Ado vale anche per algebre di Lie (e gruppi lineari) definiti a partire da campi di caratteristica k con k anche non 0.

7.3 La mappa esponenziale

Nel capitolo precedente, abbiamo visto che un morfismo di gruppi di Lie è univocamente identificato dal suo differenziale (almeno se il dominio del morfismo è semplicemente connesso). Ricordiamo che $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso. Usiamo questo fatto per dare la seguente

Definizione 7.10 Sia G un gruppo di Lie, X un suo campo invariante sinistro. Allora esiste un unico sottogruppo a un parametro $exp_X : \mathbb{R} \to G$

tale che

$$d(exp_X(t\frac{d}{dr})) = tX \quad t \in \mathbb{R}$$

(abbiamo indicato con $\frac{d}{dr}$ il generatore del tangente di $\mathbb{R}$ in 0). Definiamo la *mappa esponenziale* $exp : \mathcal{L}(G) \to G$ così:

$$exp(X) = exp_X(1)$$

Proposizione 7.11 *Sia X un campo vettoriale invariante sinistro su G gruppo di Lie. Allora valgono:*

1. $exp(tX) = exp_X(t)$
2. $exp(t_1 + t_2)X = exp(t_1 X)exp(t_2 X)$
3. $exp(-tX) = (exp(tX))^{-1}$
4. *$exp : \mathcal{L}(G) \to G$ è $\mathcal{C}^\infty$ e il suo differenziale è la mappa identica (così exp è un diffeomorfismo locale).*

Teorema 7.12 *Sia $\phi : G \to H$ un morfismo di gruppi di Lie. Allora il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & H \\ \mathcal{L}(G) \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "d\phi"] & \mathcal{L}(H) \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione: Sia $X \in \mathcal{L}(G)$. La mappa $t \to \phi(exp(tX))$ è una curva liscia in H il cui differenziale nell'origine sia $d\phi(X(e))$. Poichè ϕ è un morfismo di gruppi di Lie, questo è un sottogruppo a un parametro di H. Ma per unicità (teorema (7.7)) $t \to exp(d\phi(X))$ è l'unico sottogruppo a un parametro con tale differenziale nell'origine. Così

$$\phi(exp(tX)) = exp(td\phi(X))$$

e ponendo $t = 1$ si ha la tesi. $\Box$

Nella parte rimanente di questo paragrafo, estendiamo il risultato ottenuto in (5.3). In quel caso infatti avevamo trovato un criterio per determinare almeno la struttura di spazio vettoriale dell'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie. L'ultimo teorema di questa sezione permette di determinarne la struttura completa di algebra di Lie.

Proposizione 7.13 *Sia* (H, ϕ) *un sottogruppo di Lie di* G*. Sia* X *un campo vettoriale invariante sinistro. Se* $X \in d\phi(\mathcal{L}(H))$*, allora* $exp(tX) \in \phi(H)$ *per ogni* t*. Viceversa, se* $exp(tX) \in \phi(H)$ *per* t *in un intervallo aperto, allora* $X \in d\phi(\mathcal{L}(H))$*.*

Dimostrazione: La prima implicazione è una verifica che si basa sulla proposizione precedente. Vediamo la seconda. Se $exp(tX) \in \phi(H)$ con $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Per $t \in I$, la mappa $t \to exp(tX)$ si può scrivere come composizione $\phi \circ \alpha$. α è liscia per il corollario (6.5). Se t_0 è un punto di I, Sia $\tilde{X}$ il campo vettoriale invariante sinistro passante per $\alpha'(t_0)$. Allora $d\phi(\tilde{X}) = X$. Così $X \in d\phi(\mathcal{L}(H))$.

Teorema 7.14 *Sia* G *un sottogruppo di un gruppo di Lie* A*, e sia* $G^{\#}$ *un sottospazio di* $\mathcal{L}(A)$*. Sia* V *un intorno di* 0 *in* $\mathcal{L}(A)$ *diffeomorfo attraverso la mappa esponenziale ad un intorno* V' *dell'identità in* A*. Si supponga che*

$$exp(V \cap G^{\#}) = V' \cap G$$

allora G *con la topologia ereditata da* A *è un sottogruppo di Lie di* A*,* $G^{\#}$ *è una sottoalgebra di* $\mathcal{L}(A)$*: l'algebra di Lie di* G*.*

Dimostrazione Per quanto visto sulla mappa esponenziale, è sufficiente vedere che (G, i) possiede una struttura differenziabile che la rende una sottovarietà di A (con i indichiamo la mappa di inclusione). Per il teorema (7.5) in questo modo (G, i) con quest'unica struttura differenziabile è un sottogruppo di Lie di G, e segue dalla proposizione appena vista che l'algebra di Lie di G sia $G^{\#}$. Sia

$$\phi = exp|_{V \cap G^{\#}} : V \cap G^{\#} \to V' \cap G$$

Scegliamo

$$\{(G \cap gV', \phi^{-1} \circ L_{g^{-1}})| \quad g \in G\}$$

e scegliamo una collezione massimale che si interseca in modo liscio. Questo è esattamente quanto è stato fatto nel capitolo 5. □

Vediamo un ultimo lemma, che verrà utilizzato in modo fondamentale per la dimostrazione del teorema di Cartan nell'ultimo capitolo, e che da senso al nome "esponenziale" scelto per la mappa dall'algebra di Lie di un gruppo di Lie al gruppo di Lie stesso. Omettiamo la dimostrazione della convergenza della serie seguente

Lemma 7.15 *Sia $GL(n)$ il gruppo lineare di ordine n sui reali. L'applicazione esponenziale $exp : gl(n) \to GL(n)$ è fatta così:*

$$exp(A) = e^A$$

dove, ricordiamo che per le matrici quadrate è definita la seguente operazione:

$$e^A = Id + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

(la convergenza della serie rispetto alla topologia in $GL(n)$ è oggetto di argomentazioni di algebra lineare)

Dimostrazione: Si sa che $det(e^A) \neq 0$ per ogni A matrice quadrata reale. E'sufficiente verificare che, fissata A, e^{At} è un sottogruppo a un parametro di $GL(n)$ e che la sua derivata in 0 è A. Entrambe sono semplici verifiche che lasciamo al lettore. $\square$

7.4 La sottocategoria $\mathcal{G}$ è completa in $\mathcal{TG}$

Lemma 7.16 *Sia $\phi : \mathbb{R} \to G$ un omomorfismo continuo della retta reale nel gruppo di Lie G. Allora ϕ è un sottogruppo a un parametro (ϕ è $\mathcal{C}^\infty$).*

Dimostrazione: Moltiplicando a sinistra per elementi del gruppo è sufficiente come al solito vedere che ϕ è liscia in un intorno di 0. Si consideri un intorno aperto V con $e \in V$, diffeomorfo ad un intorno aperto U di $0 \in \mathcal{L}(G)$ tramite la mappa esponenziale. A meno di restringere gli intorni, è possibile fare in modo che U sia stellato rispetto a 0. Cercheremo di vedere come ϕ in un intervallo aperto contenente lo 0 sia $\mathcal{C}^\infty$ osservando che in un sottoinsieme denso di questo intervallo tale funzione coincide con una composizione dell'esponenziale con una funzione liscia. Ne avremo così che, per continuità di ϕ, ϕ coincide in tutto l'intervallo con tale funzione liscia ed è pertanto lei stessa liscia. Per mettere in atto questo programma, iniziamo scegliere $t_0 > 0$ tale che $\phi(t) \in exp(U/2)$ per ogni $|t| \leq t_0$. Sia ora $n \in \mathbb{N}$ positivo. Sono univocamente determinati due elementi X e Y in $U/2$ tali che $exp(X) = \phi(t_0/n)$ e $exp(Y) = \phi(t_0)$. Verifichiamo che $nX \in U/2$. Supponiamo che per $1 \leq j < n$ si abbia che $jX \in U/2$. Vedremo che tale proprietà vale per $j+1$. Infatti $(j+1)X \in U$ e, essendo exp iniettiva su tutto U, poichè $exp((j+1)X) = \phi((j+1)t_0/n)$, si ha che anche $(j+1)X \in U/2$. Così $nX \in U/2$ e (sempre per l'iniettività di exp in $U/2$), $nX = Y$. Sia ora m un intero con $|m| \leq n$. Si verifica a questo punto facilmente che $\phi(t_0)m/n) = exp(mY/n)$. Così, come preannunciato, $\phi(t)$ e $exp(tY/t_0)$

coincidono in un insieme denso in $(-t_0, t_0)$ e per continuità coincidono su tutto l'aperto. Essendo una delle due liscia, lo è anche l'altra. $\square$

Teorema 7.17 *Sia $\phi : G \to H$ un omomorfismo continuo di gruppi di Lie. Allora ϕ è un morfismo di gruppi di Lie.*

Si dimostra usando il teorema precedente.

Corollario 7.18 *La sottocategoria $\mathcal{G}$ è completa in $\mathcal{TG}$.*

Ci siamo riferiti fin qui solamente a varietà lisce. Si potrebbe vedere che una struttura di Lie liscia ne contiene una analitica. In questo contesto, si riesce a dimostrare che ogni omomorfismo continuo fra gruppi di Lie è in realtà analitico. In questo modo si ha analogamente che tale struttura analitica contenuta nella struttura $\mathcal{C}^\infty$ è in realtà unica. Per approfondire tali argomenti rimandiamo a [8].

7.5 Il teorema di Cartan

Prima di vedere e di dimostrare l'enunciato completo del Teorema di Cartan, che conclude questa trattazione sul funtore di Lie, ci soffermiamo su un risultato sorprendente, che permette di concludere che un certo "sottooggetto"(come gruppi topologici) di un gruppo di Lie è a sua volta un gruppo di Lie in modo unico.

Teorema 7.19 *Sia G un gruppo di Lie, e sia A un suo sottogruppo e un chiuso di G. Allora A ammette una (unica) struttura di varietà differenziabile che rende A un sottogruppo di Lie di G.*

Osserviamo che l'unicità è già stata dimostrata in (7.5), mentre da (7.6) si deduce che A ha la topologia indotta da G. Per brevità, non riportiamo la dimostrazione di questo teorema, che può essere trovata ad esempio in [9]. La dimostrazione si basa quasi interamente sul teorema (7.14): si vede che è assurdo supporre che non possano esistere i due intorni U e V. Come spazio vettoriale naturalmente si sceglie il sottospazio di $\mathcal{L}(G)$ formato da tutti quei vettori per i quali $exp(tX)$ è definito per ogni t.

Teorema 7.20 *Sia $\psi : G \to H$ un morfismo di gruppi di Lie. Se $A = ker(\psi)$ e $a = ker(d\psi)$, allora A è un sottogruppo di Lie di G, chiuso e con algebra di Lie a.*

Dimostrazione: A è un gruppo di Lie per il teorema precedente. Per la proposizione (7.13) $X \in a$ se e solo se $exp(tX) \in A$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo accade se e solo se $e = \psi(exp(tX) = exp(t(d\psi(X)))$ per ogni t. Questo a sua volta avviene se e solo se $x \in a$. $\square$

Definizione 7.21 Sia G un gruppo di Lie. Diremo *rappresentazione aggiunta* di G la mappa $Ad : G \to Aut(\mathcal{L}(G))$ data dalla formula:

$$Ad(\sigma) = da_\sigma|_{T_e(G)}$$

denoteremo il differenziale di tale mappa con ad. ($ad : \mathcal{L}(G) \to End(G)$)

Ometteremo la dimostrazione della seguente proposizione:

Proposizione 7.22 *Sia G un gruppo di Lie. Siano $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. Allora vale la formula:*

$$ad_X(Y) = [X, Y]$$

Teorema 7.23 *Sia $A \subset G$ un sottogruppo di Lie connesso del gruppo di Lie connesso G. Allora A è un sottogruppo normale di G se e solo se $\mathcal{L}(A)$ è un ideale di $\mathcal{L}(G)$.*

Dimostrazione: Supponiamo che a sia un ideale di $\mathcal{L}(G)$. Siano $Y \in a$ e $X \in \mathcal{L}(G)$ e si ponga $\sigma = exp(X)$. Allora, per le proprietà dell'esponenziale,

$$\sigma(exp(Y))\sigma^{-1} = exp(Ad_\sigma(Y)) = exp(exp(ad_X(Y)))) = exp(Y + [X,Y] + ad^2(X)(Y)/2! + ...$$

Siccome a è un ideale, il secondo membro converge ad un elemento di a. Così $\sigma exp(Y)\sigma^{-1} \in A$. Ora, siccome il gruppo di Lie è generato da un intorno dell'identità,, G è generato da elementi della forma $exp(X)$. Questo mostra che A è normale. Al contrario, se A è normale in G, siano $s, t \in \mathbb{R}$. Siano come prima $Y \in a$, $X \in \mathcal{L}(G)$, e sia $\sigma = exp(tX)$. Allora

$$\sigma(exp(sY)\sigma^{-1} = exp(Ad_\sigma(sY)) = exp(s(exp(ad_{tX}(Y)))))$$

Poichè A è normale, il primo membro è un elemento di A. Così, per $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$exp(ad_{tX})(Y) = exp(t(ad_X))(Y) = Y + [X, Y] + ...$$

una curva liscia in a il cui vettore tangente in $t = 0$ è $[X, Y]$. Così $[X, Y] \in a$ che è pertanto un ideale. $\square$

Teorema 7.24 *(di Cartan) Sia G un gruppo di Lie connesso. Il funtore di Lie $\mathcal{L} : G \to \mathcal{L}(G)$ induce un isomorfismo fra il reticolo dei sottogruppi di G e il reticolo delle sottoalgebre di $\mathcal{L}(G)$. Induce un isomorfismo fra il reticolo dei sottogruppi normali di G e il reticolo degli ideali di $\mathcal{L}(G)$.*

Dimostrazione: E' una conseguenza del corollario (7.2) e del teorema (7.23).$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Michael Artin, *Algebra*, Torino: Bollati Boringhieri, 1997

[2] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, New York: Springer-Verlag, 1976

[3] Irving Kaplansky, *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Chicago: The University of Chicago Press, 1971

[4] John L. Kelley, *General Topology*, Toronto: D. Van Nostrand Company, 1955

[5] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997

[6] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1971

[7] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975

[8] Mikhail Mihailovic Postnikov, *Lie Groups and Lie Algebras*, Moscow: URSS Publishers, 1982

[9] Frank W. Warner, *Foundation of differentiable manifolds and Lie groups*, Glenview- London: Scott Foresman, 1971