

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA**

**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

Classe di Scienze e Tecnologie, VI Ciclo

**ISTITUTO UNIVERSITARIO DI STUDI SUPERIORI**

**Corsi Ordinari**

**TESI DI DIPLOMA**

**Il Teorema di Preparazione di Weierstrass e i principi GAGA**

Relatore: Ch.mo Prof. Gian Pietro Pirola

Laureando: Nicola Tito Pagani

**ANNO ACCADEMICO 2006-2007**



# Indice

|                                                         |           |
|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                     | <b>5</b>  |
| <b>1 Richiami di analisi complessa in più variabili</b> | <b>8</b>  |
| <b>2 I teoremi di Weierstrass</b>                       | <b>15</b> |
| 2.1 Il caso olomorfo . . . . .                          | 16        |
| 2.2 Il caso delle serie di potenze formali . . . . .    | 22        |
| <b>3 Spazi Analitici e Varietà Algebriche</b>           | <b>25</b> |
| <b>4 I principi GAGA</b>                                | <b>31</b> |
| <b>Bibliografia</b>                                     | <b>38</b> |



# Introduzione

Questo lavoro prende le mosse da molti stimoli che ho avuto nell'ultimo anno di corso di laurea magistrale in matematica, durante il quale mi sono accostato alla geometria algebrica. Uno studente che si accosti dal principio a questa materia insieme così antica (mette insieme il filone di pensiero algebrico dovuto essenzialmente agli arabi e quello geometrico dovuto alla tradizione greca e egiziana) e così contemporanea (applicazioni alla fisica teorica, in particolare alla teoria delle stringhe e alla mirror symmetry, alla crittografia,...) si trova ad imparare, presto o tardi, ad avere a che fare con un soggetto che risulta amplissimo pur considerato scevro da legami con altre discipline matematiche o scientifiche. Un'intera matematica nella matematica. Lo studioso che si accosti a questa disciplina con il piglio del ricercatore è pertanto inevitabilmente costretto a indirizzarsi verso un ambito specifico la cui prospettiva risulta invisibile. Accade spesso che, per questo motivo, l'ambito della ricerca viene quasi sempre ristretto all'interno di varie branche della disciplina: come la teoria dell'intersezione, la teoria delle singolarità, o la teoria dei moduli delle curve, ecc. Lo studente o lo studioso diventa tale più propriamente di questa sottodisciplina o sottosoggetto. Questo fenomeno, che è il naturale risultato del progresso della conoscenza in ambito scientifico e che si ripresenta pertanto in tutte le discipline scientifiche, assume un connotato ancor più forte nella geometria e in particolare nella geometria algebrica (si pensi al confronto con altre sottodiscipline della matematica molto più giovani, come l'analisi numerica, la probabilità o la ricerca operativa). Questo lavoro ha pertanto il significato di riprendere i concetti di base della geometria algebrica e dell'analisi complessa e di approfondire un argomento che ormai può essere definito di base all'interno dell'intera disciplina: il confronto fra i metodi analitico-trasendenti e quelli algebrici.

La tesi è pertanto divisa in due parti: nella prima si studiano alcuni strumenti tecnici che vengono dall'analisi complessa in più variabili e alcune sue applicazioni indirizzate allo studio delle varietà olomorfe e degli spazi analitici. Dimostreremo seguendo strade diverse (una più analitica ed una più algebrica) il teorema di preparazione di Weierstrass e il teorema di divisione di Weierstrass, e le sue conseguenze. Vedremo come ogni spazio analitico possa essere visto come rivestimento ramificato finito sopra uno spazio affine. Questo dopo aver studiato alcuni teoremi

di base dell'analisi complessa in più variabili, come il teorema di Cauchy, i teoremi di rimozione delle singolarità di Riemann e di Hartogs. Negli ultimi due capitoli ci si indirizzerà verso i teoremi di tipo GAGA di Serre (Geométrie Algébrique et Geométrie Analytique) degli anni '50. L'argomentazione, che non ha sostanzialmente bisogno di prerequisiti matematici nella prima parte, necessita invece di un bagaglio tecnico superiore nel capitolo 3 e 4 dove si danno per scontate le nozioni di fascio, fascio algebrico, e spazio anellato (ma viene ripresa la nozione di fascio coerente nel caso di spazi analitici complessi).

Se  $X$  è una varietà nonsingolare sui complessi, si può considerare  $X$  anche come varietà complessa (manifold). Tutti i metodi dell'analisi complessa e della geometria differenziale possono pertanto essere usati per studiare questa varietà complessa (manifold). Questa tesi si propone di descrivere una piccola parte del dizionario fra il linguaggio della geometria algebrica astratta e delle manifold complesse. Questo tipo di metodologia che produce metodi che consistono nel passare da risultati ottenuti sfruttando la topologia naturale delle varietà complesse, o la loro struttura differenziabile per ottenere risultati algebrici, passa sotto il nome di metodi trascendenti (quelli per i quali non sono note prove puramente algebriche). Un'altra domanda possibile, è quella di studiare che posto abbiano le varietà algebriche all'interno delle varietà complesse, e quali proprietà le caratterizzino all'interno delle stesse. In questo lavoro ci concentreremo in particolare sulla risposta che si possa dare a queste domande nel caso proiettivo.

Detto  $h$  la trasformazione che associa agli oggetti algebrici un corrispettivo analitico, daremo risposta parziale alle seguenti domande:

- Dato uno spazio analitico complesso  $\mathcal{X}$ , esiste uno schema  $X$  tale che  $h(X) = \mathcal{X}$ ?
- Se  $X$  e  $X'$  sono due schemi tali che  $h(X) \cong h(X')$  è vero che  $X \cong X'$ ?
- Dato uno schema  $X$  e un fascio analitico coerente  $\mathcal{F}$  su  $X$ , esiste un fascio coerente  $\mathcal{C}$  su  $X$  tale che  $h(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$ ?
- Dato uno schema  $X$  e due fasci coerenti  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  su  $X$  tali che  $h(\mathcal{E}) = h(\mathcal{F})$  su  $h(X)$ , è vero che  $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ ?
- Dato uno schema  $X$  e un fascio coerente, la coomologia a valori nel fascio calcolate in geometria algebrica e quella calcolata in geometria analitica sono uguali?

Se queste domande vengono poste in tutta la loro generalità, la risposta è negativa per tutte e cinque. Al contrario, se ci si restringe agli schemi proiettivi, la risposta è affermativa a tutte e cinque.

A conclusione di questo lavoro vorrei ringraziare il professor Pietro Pirola, per aver accettato per la seconda volta di essere relatore di una mia tesi, per il trasporto e la passione che riesce a trasmettermi quando mi insegna quel che conosce e infine per la fiducia che ha dimostrato nel mio lavoro in quest'occasione ancor più che nella precedente. Vorrei inoltre ringraziare la dottoressa Paola Frediani che mi ha sempre accolto con molto calore in occasione delle mie visite pavesi, durante le quali non manca mai di dimostrarmi la sua attenzione per i progressi del mio lavoro. Infine ringrazio la SISSA nella persona del mio supervisor, Barbara Fantechi, per avermi dato la possibilità di usare tutto il tempo di cui ho avuto bisogno per pensare, scrivere e completare questa tesi.

# Capitolo 1

## Richiami di analisi complessa in più variabili

In questo capitolo studiamo alcuni dei risultati classici della teoria delle funzioni di una e di più variabili complesse. Riferimenti standard per questa sezione sono il testo [1] (capitolo 0) e il testo [2]. Entrambi naturalmente coprono molto più materiale di quanto necessario per i nostri scopi.

Di seguito, faremo sempre la convenzione che  $D \subset \mathbb{C}^n$  sia un sottoinsieme aperto, e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definizione 1.0.1.**  *$f$  viene detta analitica in  $D$  se ogni punto  $w \in D$  ha un intorno aperto  $U \subset D$  tale che la funzione  $f$  ha una espansione in serie di potenze:*

$$f(z) = \sum_{k_1 \dots k_n=0}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} (z_1 - w_1)^{k_1} \dots (z_n - w_n)^{k_n}$$

che converge per ogni  $z \in U$ . L'insieme delle funzione olomorfe in  $D$  verrà denotato con  $\mathcal{H}_D$

Si noti che ogni polinomio in  $n$  variabili risulta pertanto una funzione olomorfa su tutto  $\mathbb{C}^n$ . Da risultati di analisi elementare segue facilmente che se  $f$  è analitica, allora la sua serie di potenze converge totalmente (e quindi assolutamente e uniformemente) in un polidisco sufficientemente piccolo:

$$\Delta(w, r) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - w_j| < r_j, \quad 1 \leq j \leq n\}$$

Ne segue pertanto che una funzione analitica è continua su  $D$ . Ricordiamo che se  $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ , allora:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

dove abbiamo usato la convenzione simbolica standard:

$$dz_i = dx_i + i dy_i \quad d\bar{z}_i = dx_i - i dy_i$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

Denotiamo la prima delle due sommatorie con  $\partial f$ , la seconda con  $\bar{\partial} f$ , ancora seguendo la notazione standard. Diamo immediatamente la seguente definizione, che vedremo essere equivalente alla precedente:

**Definizione 1.0.2.** Una funzione  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  è detta olomorfa se  $\bar{\partial} f = 0$ . Analogamente è detta antiolomorfa se  $\partial f = 0$

La prima condizione è chiaramente equivalente al fatto che la  $f$ , vista come funzione di una variabile complessa nelle sue singole componenti, risulti olomorfa in ciascuna delle variabili  $z_i$  separatamente. Riportiamo il seguente risultato, cruciale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa:

**Teorema 1.0.3.** (Formula integrale di Cauchy) Se  $\Delta$  è un disco in  $\mathbb{C}$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Delta})$ ,  $z \in \Delta$ , vale la seguente formula:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è basata sulla formula di Stokes in due variabili reali.

Si consideri la forma differenziale:

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)dw}{w-z}$$

Si ha che  $\frac{1}{w-z}$  è olomorfa per  $z \neq w$ . Pertanto il suo differenziale è:

$$d\eta = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}$$

Applicando il teorema di Stokes a  $\Delta - \Delta_\epsilon$  (un disco sufficientemente piccolo intorno al punto  $z$ ), si ottiene (gli integrali di linea sono tutti in direzione antioraria):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\epsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta - \Delta_\epsilon} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \quad (1.1)$$

Il termine di sinistra, calcolato in coordinate polari, risulta essere:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{i\theta})$$

che tende a  $f(z)$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Inoltre:

$$dw \wedge d\bar{w} = -2irdr \wedge d\theta$$

pertanto:

$$\left| \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z} \right| = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} dr \wedge d\theta \right| \leq c |dr \wedge d\theta|$$

Cosicché anche l'integrale due dimensionale risulta ben definito su  $\Delta$ , e inoltre l'integrale su  $\Delta_\epsilon$  tende a 0 per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Applicando tutte queste considerazioni alla formula 1.1 si ottiene il risultato desiderato.  $\square$

**Teorema 1.0.4.**  *$f$  è olomorfa su  $D$  se e solo se è analitica in  $D$ . Denoteremo d'ora innanzi lo spazio delle funzioni olomorfe su  $D$  con  $\mathcal{H}_D$ .*

*Dimostrazione.* Per comodità notazionale assumeremo  $n = 2$  nel corso della dimostrazione. Supponiamo intanto che  $f$  sia analitica. Dovendo dimostrare che  $f$  è olomorfa, è sufficiente dimostrare che lo è nelle singole variabili separatamente. Pertanto fissiamo una delle due variabili uguale a costante, e scriviamo (con abuso notazionale):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con  $z \in \Delta(z_0, r)$ .

Poichè  $\bar{\partial}(z - z_0)^n = 0$ , le somme parziali dell'espansione in serie soddisfano la formula di Cauchy senza l'integrale di area. Per la convergenza uniforme delle somme in un intorno di  $z_0$ , vale lo stesso per  $f$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f(w)dw}{w - z}$$

differenziando sotto il segno di integrale si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$$

Essendo  $\frac{1}{w-z}$  olomorfa per  $z \neq w$ .

Viceversa, supponendo  $f$  olomorfa e applicando la formula integrale di Cauchy due volte, si ottiene:

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int \int_{|w_i - z_i| = r} \frac{f(w_1, w_2) dw_1 dw_2}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2)}$$

e usando due volte la serie notevole (geometrica), si può sostituire:

$$\frac{1}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_{01})^m (z_2 - z_{02})^n}{(w_1 - z_{01})^{m+1} (w_2 - z_{02})^{n+1}}$$

trovando così l'espressione locale per  $f$ :

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} (z_1 - z_{01})^m (z_2 - z_{02})^n$$

□

Nel corso della prova abbiamo osservato il seguente risultato:

**Proposizione 1.0.5.** (*Formula di Cauchy in più variabili*) Se  $f \in \mathcal{H}_D$ , allora vale la seguente formula:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_n - a_n|=r_n} \dots \int_{|w_1 - a_1|=r_1} \frac{f(w_1, \dots, w_n) dw_1 \dots dw_n}{(w_1 - z_1) \dots (w_n - z_n)}$$

Per ogni  $z$  in un polidisco sufficientemente piccolo  $\Delta(a, r)$

**Teorema 1.0.6.** (*Principio di identità*) Siano  $f$  e  $g$  due funzioni olomorfe in un insieme aperto connesso  $D \subset \mathbb{C}^n$ . Se  $f = g$  vale per ogni punto  $z$  di un sottoinsieme aperto non vuoto  $U \subset D$ , allora  $f = g$  vale su tutto  $D$ .

*Dimostrazione.* Sia  $E$  l'interno dell'insieme di tutti i punti  $z$  per i quali  $f = g$ .  $E$  è un sottoinsieme aperto di  $D$  ed è non vuoto perchè contiene  $U$ . E' sufficiente vedere che  $E$  è chiuso in  $D$ , il risultato segue dalla connessione. Sia  $w \in D \cap \bar{E}$ , e si consideri  $r$  sufficientemente piccolo in modo che il polidisco  $\Delta(w, r) \subset D$ . Poichè  $w \in \bar{E}$ , deve esistere un punto  $w'$  tale che  $|w'_j - w_j| < r/2$  e che  $w' \in E$ . Così  $w \in \Delta(w', r/2)$ . La funzione  $f - g$  è olomorfa in  $\Delta(w', r/2)$ , dunque ha una espansione in serie di potenze centrata in  $w'$  e convergente su tutto questo piccolo polidisco. Poichè  $w' \in E$ , questa funzione si annulla identicamente in un intorno aperto di  $w'$ , quindi tutti i coefficienti di questa espansione in serie di potenze sono nulli, pertanto  $f = g$ . Così  $w \in E$ , e questo mostra che  $E$  è chiuso in  $D$ . □

Si osservi che in una variabile complessa, il principio di identità vale se  $D$  è un sottoinsieme dei numeri complessi avente un punto di accumulazione, cosa che non è più vera nel caso di più variabili complesse.

**Teorema 1.0.7.** (*Principio del massimo modulo*) Se  $f$  è olomorfa in un insieme connesso  $D \subset \mathbb{C}^n$ , e se c'è un punto  $w$  tale che  $|f(z)| \leq |f(w)|$  per ogni punto  $z$  in qualche intorno aperto di  $w$ , allora  $f(z) = f(w)$  su  $D$ .

*Dimostrazione.* Si procede come nella dimostrazione del principio del massimo modulo in una variabile complessa. Se denotiamo con  $V(\Delta)$  il volume del polidisco  $\Delta$ , si ha che:

$$V(\Delta)f(w) = \int_{\Delta(w,r)} f(\zeta)dV(\zeta)$$

dove  $dV(\zeta)$  è l'elemento di volume al variare di  $\zeta$ . (Questo vale per un polidisco  $\Delta$  sufficientemente piccolo, per la continuità della  $f$ ). Scegliendo ora un polidisco  $\Delta(w,r)$  tale che  $|f(w)| - |f(z)| \geq 0$  per ogni punto  $z \in \Delta(w,r)$ , si ha:

$$0 \leq \int_{\Delta(w,r)} (|f(w)| - |f(\zeta)|)dV(\zeta) = V(\Delta)|f(w)| - \int_{\Delta(w,r)} |f(\zeta)|dV(\zeta) \leq 0$$

cosicchè  $|f(w)| = |f(z)|$  per  $z \in \Delta(w,r)$ . Avendo  $f$  modulo costante, si può scrivere:

$$f = \rho e^{i\theta(z)}$$

dove  $\theta$  è una funzione reale ben definita in un intorno di  $w$ . Così, calcolando la derivata rispetto a  $\bar{z}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = if \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

□

Vediamo ora alcuni risultati di rimozione delle singolarità per funzioni olomorfe di più variabili. Uno dei risultati di base della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa è il teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili, secondo il quale una funzione limitata ed olomorfa su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  eccetto per un insieme discreto di punti, ha un'unica estensione a una funzione olomorfa su tutto  $D$ . Il primo risultato che proponiamo di seguito è una diretta estensione del teorema di Riemann, mentre il secondo, detto teorema di Hartogs non ha un analogo in una variabile complessa (è specifico della teoria delle funzioni di più variabili complesse).

Ne concluderemo che possibili singolarità di funzioni olomorfe non possono esistere a meno che la funzione sia non limitata (Riemann) e non sia definita nel complementare di un sottoinsieme analitico di codimensione 2 o maggiore (Hartogs).

**Teorema 1.0.8.** (Riemann) Sia  $f$  una funzione olomorfa definita in  $U - \{z \mid z_1 = 0\}$ , dove  $0 \in U$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{C}^n$ . Allora se  $f$  è localmente limitata su  $U$ ,  $f$  si estende a una funzione olomorfa su  $U$ .

*Dimostrazione.* Essendo il risultato di natura locale, è sufficiente mostrare che se  $U$  contiene un polidisco  $\Delta(0, r)$  sul quale  $f$  è limitata, allora si può estendere la  $f$  ai punti interni di  $D$ . Ci proponiamo di mostrare che per i punti  $z$  nell'interno di  $D$  tali che  $z_1 \neq 0$ , vale la formula di Cauchy:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial\Delta(o, r)} f(w) \frac{dw_1}{w_1 - z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{w_n - z_n} \quad (1.2)$$

Il termine di destra è ben definito perchè il luogo di integrazione è contenuto nel luogo di definizione della  $f$ . Una volta mostrata questa formula, il teorema segue immediatamente, perchè è chiaro che la funzione definita dal lato destro della formula si estende in modo olomorfo a tutto  $D$ . Si consideri il polidisco  $\Delta_{\epsilon_1}$  dove  $\epsilon_1$  è un numero reale  $0 < \epsilon_1 < |z_1|$  e inoltre il disco chiuso di raggio  $\epsilon_1$  e centro  $z_1$  sia contenuto nel disco  $\{w \mid |w| < r_1\}$ . Allora il polidisco

$$\Delta_{\epsilon_1} = \{(w_1, \dots, w_n) \mid |w_1 - z_1| \leq \epsilon_1; |z_i| \leq r_i, i \geq 2\}$$

è contenuto in  $\Delta(0, r) - \{w_1 = 0\}$ . Così che la formula di Cauchy dà:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial\Delta_{\epsilon_1}} f(w) \frac{dw_1}{w_1 - z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{w_n - z_n}$$

Si consideri inoltre il prodotto dei cerchi:

$$A_\epsilon := \{w \mid |w_1| = \epsilon, |w_i| = r_i, i \geq 2\}$$

Quando  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo,  $\partial\Delta(0, r) - \partial\Delta_{\epsilon_1} - A_\epsilon$  è il bordo della varietà liscia:

$$M = \{(w \mid |w_1 - z_1| \geq \epsilon_1, |w_1| \geq \epsilon, |w_i| = r_i, i \geq 2\}$$

che è contenuta in  $\Delta(0, r)$  e non interseca la ipersuperficie  $\{w_1 = 0\}$  nè l'ipersuperficie  $\{w_i = z_i\}$ . La formula di Stokes dà:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial\Delta(o, r)} f(w) \frac{dw_1}{w_1 - z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{w_n - z_n} - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{A_\epsilon} f(w) \frac{dw_1}{w_1 - z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{w_n - z_n} \quad \blacksquare$$

Per concludere ci basta pertanto vedere che per  $f$  limitata e con  $z$  tale che  $z_1 \neq 0$  e  $|z_i| < r_i$  si ha che:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A_\epsilon} f(w) \frac{dw_1}{w_1 - z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{w_n - z_n} = 0$$

Parametrizzando il prodotto di cerchi  $A_\epsilon$  con  $(t_1, \dots, t_n) \rightarrow (\epsilon e^{2\pi i t_1}, r_2 e^{2\pi i t_2}, \dots, r_n e^{2\pi i t_n})$ ,  $\blacksquare$  l'integrale diventa:

$$(2\pi i)^n \int_0^1 \dots \int_0^1 \epsilon r_2 \dots r_n \prod_j e^{2i\pi t_j} \frac{f(\epsilon e^{2\pi i t_1}, r_2 e^{2\pi i t_2}, \dots, r_n e^{2\pi i t_n})}{(\epsilon e^{2\pi i t_1} - z_1) \dots (r_n e^{2\pi i t_n} - z_n)} dt_1 \dots dt_n$$

da questo, ricordando che  $f$  è limitata e usando l'ipotesi sul punto  $z$  (che assicura che il denominatore si mantiene sempre lontano da 0 in modulo) l'integrando di questa formula tende uniformemente a 0 per  $\epsilon$  tendente a 0. Pertanto l'integrale tende a 0 e la dimostrazione è conclusa.  $\square$

**Teorema 1.0.9.** (*Teorema di Hartogs*) Siano  $r' < r$  numeri reali. Ogni funzione olomorfa  $f$  in un intorno di  $\Delta(0, r) - \Delta(0, r')$  si estende ad una funzione olomorfa su tutto  $\Delta(0, r)$

*Dimostrazione.* Ancora supponiamo che  $n = 2$  per semplificare la notazione. In ogni fetta verticale  $z_1 = \text{costante}$ , la regione  $\Delta(0, r) - \Delta(0, r')$  può essere o un disco o una corona circolare. Possiamo estendere  $f$  in ogni fetta verticale usando la formula di Cauchy, ponendo:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_2|=r} \frac{f(z_1, w_2) dw_2}{w_2 - z_2}$$

In questo modo  $F$  risulta definita in tutto il polidisco più grande, ed è chiaramente olomorfa in  $z_2$  perchè è stata definita proprio con la formula di Cauchy. Poichè

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} f = 0$$

la  $F$  è olomorfa anche rispetto alla variabile  $z_1$ . Inoltre  $F = f$  nell'aperto  $|z_1| > r'$  per la formula di Cauchy. Cosicchè  $F$  è l'estensione desiderata di  $f$ .  $\square$

**Corollario 1.0.10.** Una funzione olomorfa sul complemento di un punto in un insieme aperto  $U \subset \mathbb{C}^n$  si estende ad una funzione olomorfa su tutto  $U$ .

Possiamo vedere questo risultato di geometria complessa come un analogo di un risultato di geometria algebrica, per il quale rimandiamo a [3]:

**Teorema 1.0.11.** Sia  $A$  un dominio noetheriano integralmente chiuso. Allora si ha:

$$A = \bigcap_{ht(\mathcal{P})=1} A_{\mathcal{P}}$$

L'intersezione è presa su tutti gli ideali primi di altezza 1.

## Capitolo 2

### I teoremi di Weierstrass

In linea molto generale, i teoremi di Weierstrass danno una versione per germi di funzioni oloomorfe dell'algoritmo di divisione euclideo. Il teorema di preparazione di Weierstrass e il teorema di divisione di Weierstrass sono il punto di partenza per lo studio delle proprietà algebriche dell'anello dei germi delle funzioni oloomorfe. Se  $\mathcal{H}_0$  denota l'anello dei germi di funzioni oloomorfe in  $0 \in \mathbb{C}^n$ , si possono trovare molti risultati non banali sulla struttura dell'anello  $\mathcal{H}_0$ . Il teorema di divisione afferma che  $\mathcal{H}_0$ , soggetto ad appropriate normalizzazioni, è un anello con divisione (cioè un campo in cui il prodotto non sia necessariamente commutativo). Il teorema di preparazione invece afferma che ogni germe è il prodotto di un polinomio in una variabile per un germe di una funzione oloomorfa invertibile. In qualche modo si vuole sviluppare una tecnica che metta in atto un passaggio per induzione nello studio di  $\mathcal{H}_0$  da  $n$  a  $n - 1$  variabili. L'idea è quella di effettuare questo passaggio in due steps. Ne seguono immediatamente alcuni risultati:  $\mathcal{H}_0$  è un dominio a fattorizzazione unica e inoltre  $\mathcal{H}_0$  è un anello Noetheriano.

Nel capitolo successivo vedremo come i teoremi di Weierstrass aiutino a studiare gli spazi analitici come rivestimenti finiti ramificati su polidischi di  $\mathbb{C}^n$ . Questo darà un'interpretazione più prettamente geometrica di tali risultati.

Osserviamo che vi sono due possibili modi di affrontare il problema dei teoremi di Weierstrass: dimostrarli direttamente nel caso delle serie convergenti sui numeri complessi, oppure assumere un punto di vista più generale e dimostrarli per le serie di potenze formali e poi restringere il risultato al caso delle serie convergenti. Il primo approccio è quello seguito ad esempio in [10], il secondo è seguito nei libri di analisi complessa in più variabili, come [2], [4], [5], [8], o nel testo di geometria algebrica complessa [1].

## 2.1 Il caso olomorfo

**Definizione 2.1.1.** Sia  $f$  una funzione olomorfa in un intorno di  $0 \in \mathbb{C}^n$ ,

$$f(z) = \sum_{k_1 \dots k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} (z_1 - w_1)^{k_1} \dots (z_n - w_n)^{k_n}$$

Definiamo  $\text{ord}(f)$  il più piccolo  $|(k_1, \dots, k_n)|$  tale che  $a_{|(k_1, \dots, k_n)|} \neq 0$ .

Osserviamo che se  $\text{ord}(f) = k$ , allora esiste un cambiamento di coordinate non-singolare e lineare tale che, nelle nuove coordinate, si ha che il coefficiente di  $z_n^k$  è 1. Quando  $f$  è di questa forma, verrà detta normalizzata di ordine  $k$  rispetto alla variabile  $z_n$ . L'insieme dei sistemi di coordinate in cui il coefficiente di  $z_n$  è diverso da zero è aperto e denso nell'insieme di tutti i sistemi di coordinate lineari.

Si noti che la funzione  $\text{ord}$  è una valutazione sull'anello  $\mathcal{H}_0$ .

**Definizione 2.1.2.** Una funzione  $f$ , olomorfa in un intorno di 0 è detta polinomio di Weierstrass di grado  $k$  se, scrivendo  $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$  si ha che:

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(z', z_n) = z_n^k + a_{n-1}(z')z_n^{k-1} + \dots + a_1(z')z_n + a_0(z')$$

Dove gli  $a_j$  sono funzioni olomorfe non necessariamente polinomiali in un intorno di  $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $a_j(0) = 0$ . Sarà utile denotare con  $\mathcal{H}'_0$  l'anello dei germi delle funzioni olomorfe nelle variabili  $z_1, \dots, z_{n-1}$ . Così un polinomio di Weierstrass  $P$  è un elemento di  $\mathcal{H}'_0[z_n]$ .

Il punto chiave della preparazione di Weierstrass è che ogni funzione olomorfa di ordine  $k$  è essenzialmente un polinomio di Weierstrass di ordine  $k$ .

**Teorema 2.1.3.** Sia  $f$  olomorfa in un intorno di  $0 \in \mathbb{C}^n$ , e si supponga  $f$  normalizzata e di ordine  $k$ . Allora in un intorno sufficientemente piccolo di 0 la funzione  $f$  può essere scritta in un unico modo come:

$$f(z) = u(z)W(z)$$

dove  $u$  è un'unità in  $\mathcal{H}_0$  e

$$W(z) = z_n^k + a_{n-1}(z')z_n^{k-1} + \dots + a_1(z')z_n + a_0(z')$$

è un polinomio di Weierstrass.

*Dimostrazione.* Eventualmente dopo una traslazione nel codominio, possiamo assumere che  $k \geq 1$ , e cioè che  $f(0, 0) = 0$ . Si scelga  $r > 0$  tale che  $f(0, re^{i\theta}) \neq 0$ ,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Per continuità, si scelga  $h > 0$  tale che  $f(z', z_n) \neq 0$  per  $|z'| \leq h$ ,  $|z_n| = r$ . La funzione:

$$N(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n|=r} \frac{\frac{\partial f(z', z_n)}{\partial z_n}}{f(z', z_n)} dz_n$$

conta il numero degli zeri contati con molteplicità di  $f(z', \cdot)$  nel cerchio  $\{|z_n| \leq r\}$  (la formula di Cauchy) ed è definita per  $|z'| \leq h$ . Dal momento che questa è una funzione a valori discreti (interi) per  $|z'| \leq h$ , è costante, supponiamo  $N(z') = m$  per  $|z'| \leq h$ . Per ogni  $z'$ , siano  $\alpha_i(z')$  gli zeri di  $f(z', \cdot)$ , dove indichiamo ripetutamente zeri con molteplicità maggiore di uno. Dalla formula integrale di Cauchy in una variabile (la  $z_n$ ), segue che, se  $\phi$  è una funzione olomorfa nel polidisco  $\Delta$ :

$$J_\phi(z') := \sum_{j=1}^m \phi(\alpha_j(z')) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n|=r} \phi(z_n) \frac{\frac{\partial f(z', z_n)}{\partial z_n}}{f(z', z_n)} dz_n$$

Se applichiamo questa formula alle funzioni  $\phi(w) = w^k$   $k = 1, \dots, m$ , otteniamo le funzioni simmetriche nelle radici  $\alpha_j$ :

$$J_k(z') = J_{w^k}(z') = \sum_{j=1}^m (\alpha_j(z'))^k$$

I coefficienti del polinomio:

$$W_{z'}(z_n) = \prod_{j=1}^m (z_n - \alpha_j(z'))$$

le cui radici per definizione sono le  $\alpha_j$ , sono i cosiddetti polinomi simmetrici nelle  $\alpha_j$  e possono essere scritti come combinazioni polinomiali delle funzioni  $J_1(z'), \dots, J_m(z')$ . Queste a loro volta per la formula sopra sono funzioni olomorfe di  $z'$ . Si noti che le  $\alpha_j$  si annullano per  $z' = 0$ , e così anche le  $J_j$ . Così  $W$  è un polinomio di Weierstrass.

Ora definiamo  $u(z', z_n) = f(z', z_n)/W(z', z_n)$ . Fissato  $z'$ , questa è una funzione olomorfa in  $z_n$  eccetto al più negli zeri  $\alpha_j(z')$ . Ma per costruzione queste singolarità sono eliminabili perchè l'ordine degli zeri di  $f$  e di  $W$  sono uguali. Così  $u(z', \cdot)$  è olomorfa. Segue che per ogni  $|z_n| < r$ :

$$u(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{u(z', w)}{w - z_n} dw$$

ma  $f$  e  $W$  non si annullano quando  $|z_n| = r$  e  $|z'| \leq h$ . Questo fa sì che  $u$  sia olomorfa per  $|z'| < h$ . Essendo  $u$  olomorfa separatamente nelle  $((n-1), 1)$  variabili,

$u$  è olomorfa.  $u$  è per costruzione un'unità nell'anello dei germi di funzioni olomorfe intorno allo 0. Vediamo l'unicità, e supponiamo che si abbia:

$$u_1 W_1 = u_2 W_2$$

ponendo allora  $z' = 0$ , si ottiene:

$$u_1(0, z_n) z_n^k = u_2(0, z_n) z_n^k$$

da cui  $u_1(0, z_n) = u_2(0, z_n)$ . Differenziando entrambi i membri dell'uguaglianza che nega l'unicità rispetto a  $z_j$  e ponendo  $z' = 0$  si ottiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_j}(0, z_n) z_n^k + u_1(0, z_n) \frac{\partial W_1}{\partial z_j}(0, z_n) = \frac{\partial u_2}{\partial z_j}(0, z_n) z_n^k + u_2(0, z_n) \frac{\partial W_2}{\partial z_j}$$

Per  $z_n$  sufficientemente piccolo, contando i gradi in  $z_n$ , si vede che:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_j}(0, z_n) = \frac{\partial u_2}{\partial z_j}(0, z_n) \quad j = 1, \dots, n_1$$

Continuando, vediamo che  $u_1(., z_n)$  e  $u_2(., z_n)$  hanno la stessa espansione in serie di potenze intorno a zero. Pertanto  $u_1 = u_2$ , e di conseguenza anche  $W_1 = W_2$ .  $\square$

**Corollario 2.1.4.** *(Teorema della funzione implicita olomorfo) Sia  $f$  un funzione olomorfa in un polidisco aperto  $\Delta(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ , e sia regolare di ordine 1 in  $z_n$  nel punto 0. Allora in un polidisco di raggio più piccolo  $\delta$ , esiste un'unica funzione olomorfa  $\phi(z_1, \dots, z_{n-1})$  tale che:*

- $\phi(0, \dots, 0) = 0$ ;
- $|\phi((z_1, \dots, z_{n-1}), z_n)| < \delta_n$  in  $\Delta(0, \delta)$ ;
- $f((z_1, \dots, z_{n-1}), z_n) = 0$  in un punto  $z \in \Delta(0, \delta)$  se e solo se  $z_n = \phi(z_1, \dots, z_{n-1})$ . ■

*Dimostrazione.* Semplicemente applicando il teorema di preparazione di Weierstrass, si ottiene:

$$f(z_1, \dots, z_n) = u(z_1, \dots, z_n)[z_n - a_1(z_1, \dots, z_{n-1})]$$

e tale decomposizione è unica. Pertanto scegliendo  $\phi = a_1$  si ha la tesi.  $\square$

Vediamo ora anche il teorema di divisione di Weierstrass nella sua versione più analitica (serie di potenze convergenti):

**Teorema 2.1.5.** *Sia  $W$  un polinomio di Weierstrass di grado  $k$ . Sia  $f$  una funzione olomorfa in un intorno di  $0$ . Allora in un piccolo intorno di  $0$  la funzione  $f$  può essere scritta in modo unico come:*

$$f = Wq + r$$

dove  $r$  è un polinomio in  $z_n$  di grado minore di  $k$  con coefficienti che sono funzioni della sola  $z'$  e  $q$  è olomorfa.

Si noti che in generale  $r$  non sarà un polinomio di Weierstrass.

*Dimostrazione.* L'inizio è come quello del teorema precedente. Si scelgono  $r, h > 0$  tali che  $W \neq 0$  per  $|z'| \leq h, |z_n| = r$ . Si definisce:

$$q(z', z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(z', w)}{W(z', w)(w - z_n)} dw$$

Allora  $q$  è olomorfa nel polidisco  $\Delta(0, h) \times \Delta(0, r)$ . Se  $r(z) = f(z) - q(z)W(z)$ , allora  $r$  è olomorfa nello stesso polidisco e:

$$\begin{aligned} r(z', z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \left\{ f(z', w) - W(z', z_n) \frac{f(z', w)}{W(z', w)} \right\} \frac{dw}{w - z_n} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(z', w)}{W(z', w)} \left\{ \frac{W(z', w) - W(z', z_n)}{w - z_n} \right\} dw \end{aligned}$$

L'espressione fra parentesi ha la forma:

$$\frac{(w^k - z_n^k) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(z')(w^j - z_n^j)}{(w - z_n)}$$

ed è dunque un polinomio in  $z_n$  di grado minore o uguale a  $k - 1$ . Così  $r$  è un polinomio in  $z_n$  di grado non superiore a  $k - 1$  con coefficienti che sono funzioni olomorfe di  $z'$ . Così abbiamo la decomposizione cercata:  $f = qW + r$ . Per l'unicità si supponga che:

$$q_1 W + r_1 = q_2 W + r_2 = f$$

allora

$$r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)W$$

Ne segue che  $r_1 - r_2$  è un polinomio di grado non superiore a  $k - 1$  in  $z_n$  con  $k$  zeri nell'ultima variabile. Così  $r_1 = r_2$  e anche  $q_1 = q_2$ .  $\square$

Dimostriamo ora i due corollari dei teoremi di Weierstrass sulla struttura algebrica di  $\mathcal{H}_0$ . L'idea è quella di studiare l'estensione:

$${}_{n-1}\mathcal{H}_0 \subset {}_n\mathcal{H}_0$$

(il pedice sulla sinistra indica il numero di variabili nelle quali si studia il germe delle funzioni olomorfe), fattorizzandola attraverso:

$${}_{n-1}\mathcal{H}_0 \subset {}_{n-1}\mathcal{H}_0[z] \subset {}_n\mathcal{H}_0$$

La prima è un'estensione polinomiale familiare dall'algebra elementare. La seconda è descritta dal teorema di preparazione di Weierstrass.

In quanto segue, avremo bisogno del celebre lemma di Gauss:

**Teorema 2.1.6.** *Sia  $A$  un dominio a fattorizzazione unica. Allora anche  $A[X]$  è un dominio a fattorizzazione unica.*

**Corollario 2.1.7.** *Gli anelli  ${}_n\mathcal{H}$  sono domini a fattorizzazione unica (UFD).*

*Dimostrazione.* La dimostrazione, come annunciato, è per induzione su  $n$ . Per  $n = 0$  l'anello è  $\mathbb{C}$  e quindi un campo, pertanto banalmente un dominio a fattorizzazione unica. Supponendo che il teorema valga nel caso di  $n - 1$  variabili, il teorema di Gauss afferma che vale anche per l'anello dei polinomi  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ . Ora si consideri  $f$  un germe di funzioni olomorfe in  $n$  variabili. Dopo un cambiamento di variabili  $f$  è normalizzata nella variabile  $z_n$ . Per la preparazione di Weierstrass,  $f = uh$  dove  $u$  è un'unità dei germi delle funzioni olomorfe in  $0$  e  $h \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  è un polinomio di Weierstrass. A questo punto per concludere basta vedere che il polinomio di Weierstrass  $h \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  è riducibile in  ${}_n\mathcal{H}$  se e solo se lo è in  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ , cioè è riducibile se e solo se tutti i suoi fattori sono polinomi di Weierstrass.

Supponiamo per prima cosa  $h$  riducibile come germe di funzione olomorfa in  $n$  variabili.  $h = g_1g_2$ . Essendo  $h$  polinomio di Weierstrass, è normalizzato in  $z_n$ , dunque sia  $g_1$  che  $g_2$  sono normalizzati in  $z_n$ . Applicando la preparazione di Weierstrass,  $g_j = u_jh_j$  dove  $u_j$  sono unità e  $h_j \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  sono polinomi di Weierstrass. Pertanto  $h = u_1u_2h_1h_2$ . Poichè  $h_1h_2$  è un polinomio di Weierstrass, l'unicità del teorema di preparazione assicura che  $u_1u_2 = 1$  e che  $h_1h_2 = h$ . Pertanto  $h$  è riducibile con i fattori sono dei polinomi di Weierstrass.

Se supponiamo ora che  $h$  sia riducibile in  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ , allora  $h = g_1g_2$  dove  $g_j \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  sono nonunitari. Se  $g_1$  fosse un'unità in  ${}_n\mathcal{H}$ , allora  $h/g_1 = g_2$  e applicando il teorema di divisione di Weierstrass seguirebbe che  $1/g_1 \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ , ma questo non è possibile perchè  $g_1$  è nonunitario in  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  e pertanto nonunitario in  ${}_n\mathcal{H}$ . Allo stesso modo si ragiona per concludere che  $g_2$  è nonunitario, pertanto  $h$  è riducibile anche su  ${}_n\mathcal{H}$ .

□

**Teorema 2.1.8.** (*Teorema della base di Hilbert*) Se  $A$  è un anello Noetheriano, allora l'anello dei polinomi  $A[X]$  è Noetheriano.

*Dimostrazione.* Si supponga per assurdo che  $A[X]$  non sia Noetheriano, e sia pertanto  $I \subset A[X]$  un ideale non finitamente generato. Sia  $f_1$  un polinomio non nullo di grado minimo. Definiamo per induzione come segue una successione  $\{f_k\}$  di polinomi: se  $f_k$  è già stato scelto, sia  $f_{k+1}$  un polinomio di grado minimo in  $I - (f_1, \dots, f_k)$ . Sia  $n_k$  il grado di  $f_k$  e  $a_k$  il coefficiente del termine di grado massimo. Per la scelta di  $f_k$  la catena dei gradi aumenta:  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ . Proveremo che  $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \dots$  è una catena di ideali che non diventa stazionaria. Infatti, se  $(a_1, \dots, a_r) = (a_1, \dots, a_{r+1})$ , allora  $a_{r+1} = \sum_{i=1}^r b_i a_i$  per certi  $b_i \in A$ . In questo caso, si consideri l'elemento:

$$g := f_{r+1} - \sum_{i=1}^r b_i x^{n_{r+1}-n_i} f_i$$

$g$  appartiene a  $I$ , ma  $g$  non appartiene all'ideale  $(f_1, \dots, f_r)$  e il suo grado è strettamente inferiore del grado di  $f_{r+1}$  in contraddizione con l'assunzione.  $\square$

**Corollario 2.1.9.** *Gli anelli locali  ${}_n\mathcal{H}$  sono Noetheriani.*

*Dimostrazione.* Ancora la dimostrazione è per induzione sulla dimensione  $n$ . Quando  $n = 0$ ,  $\mathbb{C}$  è un campo, quindi banalmente un anello Noetheriano. Se si suppone che il teorema valga per  ${}_{n-1}\mathcal{H}$ , per il teorema della base di Hilbert segue che l'anello dei polinomi  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  è Noetheriano. ■

Si consideri quindi un ideale  $I \subset {}_n\mathcal{H}$ , e  $g \in I$ . Dopo un cambiamento di coordinate, possiamo supporre  $g$  normalizzata rispetto alla variabile  $z_n$ , e dalla preparazione di Weierstrass segue che, dopo aver moltiplicato per un'unità in  ${}_n\mathcal{H}$ , si può assumere che  $g \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  è un polinomio di Weierstrass. L'intersezione  $I \cap {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  è un ideale nell'anello  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ . Questo ideale per l'ipotesi di induzione ha un numero finito di generatori  $g_1, \dots, g_k$ . Ora vediamo che gli elementi  $g_1, \dots, g_k$  generano l'intero ideale  $I$ . Infatti sia  $f \in I$  un elemento dell'ideale, possiamo applicare il teorema di divisione di Weierstrass e scrivere  $f = gh + r$  dove  $r \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ , ma  $r$  chiaramente è anche in  $I$ , così  $r \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$  così  $r = \sum_{i=1}^k h_i g_i$  e pertanto l'elemento  $f$  si può scrivere:

$$f = hg + \sum_{i=1}^k h_i g_i$$

e il teorema è completato.  $\square$

Vediamo ora un risultato molto importante in geometria algebrica, che viene di solito chiamato Nullstellensatz (teorema degli zeri) di Hilbert

**Corollario 2.1.10.** *Se  $f \in {}_n\mathcal{H}$  è irriducibile e  $h \in {}_n\mathcal{H}$  si annulla dove si annulla  $f$ , allora  $f$  divide  $h$  in  ${}_n\mathcal{H}$ .*

*Dimostrazione.* Applichiamo la preparazione di Weierstrass: possiamo supporre che  $f$  sia un polinomio di grado  $k$  in  $z_n$ . Essendo  $f$  irriducibile,  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial z_n}$  sono relativamente primi in  ${}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$ . Questo dice che esistono  $\alpha$  e  $\beta$  in  ${}_n\mathcal{H}$  tali che:

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial z_n} = \gamma \quad \gamma \in {}_{n-1}\mathcal{H} \quad \gamma \neq 0$$

Fissato  $z_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ , dove  $f(z_0, z_n) \in \mathbb{C}[z_n]$  ha radici multiple, si annullano sia  $f$  sia la sua derivata rispetto a  $z_n$ , e questo porta  $\gamma(z_0)$  ad essere nullo. Quando  $\gamma \neq 0$  si ha che  $f$  ha  $k$  radici distinte. Applicando la divisione di Weierstrass, si può scrivere:

$$h = fg + r \quad r \in {}_{n-1}\mathcal{H}[z_n]$$

Nei punti  $z_0$  dove  $\gamma \neq 0$ ,  $f(z_0, \cdot)$  e quindi  $h(z_0, \cdot)$  hanno almeno  $k$  radici distinte nell'ultima variabile. Ma poichè il grado di  $r$  è strettamente minore di  $k$ , si ha che  $r(z_0, \cdot) = 0$ . Questo vale in un aperto in cui  $\gamma(z_0) \neq 0$ , pertanto per il principio di identità  $r = 0$  e questo dice che  $f$  divide  $h$ .  $\square$

## 2.2 Il caso delle serie di potenze formali

**Teorema 2.2.1.** *(Divisione di Weierstrass) Sia  $\mathbb{K}$  un campo e  $F(x_1, \dots, x_n)$  una serie di potenze non invertibile con coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Supponendo che  $F(x_1, \dots, x_n)$  contenga termini della forma  $aX_n^h$  per qualche coefficiente non nullo  $a$ , e denotando con  $s$  il più piccolo di tutti gli esponenti  $h$  con questa proprietà, allora per ogni serie di potenze  $G(x_1, \dots, x_n)$  esiste  $U(x_1, \dots, x_n)$  ed esistono  $s$  serie di potenze  $R_i(x_1, \dots, x_{n-1})$  tali che:*

$$G(x_1, \dots, x_n) = U(x_1, \dots, x_n)F(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=0}^{s-1} R_i(x_1, \dots, x_{n-1})X_n^i \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* La prova consta in una prima parte di una riformulazione del problema. Se  $P$  è una serie di potenze in  $n$  variabili, denoteremo con  $r(P)$  la somma dei termini in  $P$  che non contengono un fattore  $X_n^s$ , e con  $h(P)$  il fattore di  $X_n^s$  in  $P - r(P)$ . In questo modo scriviamo:

$$P = r(P) + X_n^s h(P)$$

per ogni  $P$ . Se applichiamo le trasformazioni lineari  $h$  ed  $r$  alla  $F$ , troviamo che  $h(F)$  è un'unità di  $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$  perchè il termine di grado più basso è un'unità

(per la definizione di  $s$ ). Invece  $r(F)$ , visto come polinomio nell'ultima variabile  $X_n$  ha tutti i coefficienti che sono nell'ideale massimale dell'anello  $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$  perchè se qualche coefficiente fosse unitario quel monomio dovrebbe contenere  $X_n$  elevato a qualche potenza ( $\geq s$  per l'ipotesi fatta sulla  $F$ ). Indicheremo l'ideale massimale dell'anello delle serie formali in  $n-1$  indeterminate con  $m$ . Il problema di trovare serie di potenze  $U, R_0, \dots, R_{s-1}$  in modo che valga la 2.1 è equivalente a trovare una serie di potenze  $U$  tale che valga:

$$h(G) = h(UF) \quad (2.2)$$

Infatti se vale 2.1, allora  $h(G - UF) = 0$ , e da qui si trova la 2.2 per la linearità di  $h$ . Viceversa se  $U$  soddisfa 2.2, allora  $G - UF = r(G - UF)$ , cioè  $G - UF$  è un polinomio nella variabile  $X_n$  di grado  $\leq s-1$  con coefficienti in  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n-1}]$  e così segue l'equazione 2.1. Ora vogliamo trasformare la formula 2.2. Applicando nuovamente  $r$  e  $h$  alla  $F$  si ottiene:

$$h(G) = h(U(r(F))) + Uh(F) \quad (2.3)$$

e così il nostro problema diventa trovare una serie di potenze  $U$  che soddisfi la 2.3. Trovare  $U$  è equivalente a trovare  $V := Uh(F)$  perchè  $h(F)$  è invertibile come serie di potenze formale in  $n$  variabili, come osservato precedentemente. Poniamo  $M = -\frac{r(F)}{h(F)}$ . Allora  $Ur(F) = -MV$  e pertanto la 2.3 si trasforma nella equivalente:

$$h(G) = -h(MV) + V \quad (2.4)$$

Il nostro problema trasformato è dunque trovare  $V$  serie di potenze formale in  $n$  variabili che soddisfi 2.4. Denotiamo con  $T$  l'operatore lineare  $T(P) := h(MP)$ . Si osservi che se  $P$  viene vista come serie di potenze in  $X_n$  sull'anello  $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$ , e i coefficienti di  $P$  sono tutti in  $m^k$ , allora  $T(P)$  ha i coefficienti in  $m^{k+1}$ . Questo perchè  $T$  agisce per moltiplicazione per  $r(F)$ , i cui coefficienti come polinomio in  $X_n$  stanno tutti in  $m$ . Applicando ricorsivamente la 2.4 a sè stessa, si trova:

$$V = h(G) + T(h(G)) + T^2(h(G)) + \dots + T^{q+1}(h(G)) \quad \forall q \geq 0$$

La somma infinita converge come serie di potenza formale per quanto osservato:  $T^j(h(G))$  è almeno di ordine  $j$ . Abbiamo dimostrato che se esiste una soluzione di 2.4, questa deve essere la serie:

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} T^i(h(G))$$

Questo prova l'unicità di  $V$  e quindi l'unicità di  $U$  e delle  $R_i$  nel problema 2.1. Per provare l'esistenza, basta dimostrare che  $V$  soddisfa l'equazione 2.4. Per ogni

$q \geq 0$  si può scrivere  $V = h(G) + T(h(G)) + \dots + T^q(h(G)) + W_q$  dove i coefficienti di  $W_q$  sono tutti in  $m^{q+1}$ . Allora per la linearità di  $T$ :

$$V - h(G) - T(V) = W_q - T^{q+1}(h(G)) - T(W_q)$$

i coefficienti di  $V - h(G) - T(V)$  sono pertanto in  $m^{q+1}$ , e questo ragionamento può essere ripetuto per ogni  $q$ . Allora i coefficienti di  $V - h(G) - T(V)$  devono essere 0. L'equazione 2.4 è pertanto soddisfatta, e l'esistenza è provata.  $\square$

**Teorema 2.2.2.** *Se  $\mathbb{K}$  è un campo,  $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$  è un anello Noetheriano.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione a questo punto è identica a quella nel caso olo-morfo. Per ulteriori dettagli si veda il testo [10], pag. 148  $\square$

in realtà vale un risultato più forte, che non dimostreremo (si procede in modo simile al teorema della base di Hilbert):

**Teorema 2.2.3.** *Se  $A$  è un anello Noetheriano, allora anche l'anello delle serie di potenze formali  $A[[X]]$  è Noetheriano.*

**Teorema 2.2.4.** *Se  $\mathbb{K}$  è un campo,  $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$  è un dominio a fattorizzazione unica.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione a questo punto è identica a quella nel caso olo-morfo. Per ulteriori dettagli si veda il testo [10], pag. 148  $\square$

## Capitolo 3

# Spazi Analitici e Varietà Algebriche

In questo capitolo discutiamo i concetti di sottoinsieme analitico di uno spazio affine e quindi la categoria degli spazi analitici. Non ripetiamo le nozioni di spazio anellato, morfismo di spazi anellati, isomorfismo di spazi anellati.

**Definizione 3.0.5.** Diremo che  $U \subset \mathbb{C}^n$  è un sottoinsieme analitico se per ogni  $x \in U$  esistono funzioni  $f_1, \dots, f_k$  olomorfe in un intorno  $W$  di  $x$  e tali che  $U \cap W$  sia l'insieme dei punti  $z \in W$  tali che  $f_i(z) = 0$ .

Nella topologia usuale di  $\mathbb{C}^n$  un sottoinsieme analitico è localmente chiuso e quindi localmente compatto. Un sottoinsieme analitico  $U \subset \mathbb{C}^n$  è detto irriducibile se  $U$  non può essere scritto come l'unione di due sottoinsiemi analitici  $V_1, V_2 \subset U$  con  $V_i \neq U$ . E' detto irriducibile in  $p \in U$  se questo vale localmente in  $p$ . Una ipersuperficie analitica è un sottoinsieme analitico dello spazio affine dato da una sola equazione.

**Corollario 3.0.6.** Se  $f \in {}_n\mathcal{H}$  è irriducibile, allora l'ipersuperficie analitica  $f = 0$  data da  $f$  in un intorno di 0 è irriducibile in 0.

*Dimostrazione.* E' una semplice applicazione del Nullstellensatz, visto nel capitolo precedente. Se  $U$  è l'ipersuperficie di equazione  $f = 0$ , allora se  $U = V_1 \cup V_2$  con  $V_i \neq U$  esistono  $f_1, f_2 \in {}_n\mathcal{H}$  con  $f_i$  che si annulla identicamente su  $V_i$  ma non su  $V_j$ ,  $j \neq i$ . Per il Nullstellensatz,  $f$  deve dividere il prodotto  $f_1 f_2$ , cioè o  $U \subset V_1$  oppure  $U \subset V_2$ , cioè un assurdo.  $\square$

**Corollario 3.0.7.** Una ipersuperficie analitica di  $\mathbb{C}^n$  può essere espressa in modo unico in qualche intorno di ogni suo punto come l'unione di un numero finito di ipersuperfici analitiche irriducibili in quel punto.

*Dimostrazione.* Questa è la controparte geometrica del risultato visto nel capitolo precedente, secondo il quale  ${}_n\mathcal{H}$  è un dominio a fattorizzazione unica.  $\square$

**Corollario 3.0.8.** *Una ipersuperficie analitica di  $\mathbb{C}^n$  che non contenga identicamente l'asse  $z_n$ , si proietta localmente sull'iperpiano  $z_n = 0$  come un morfismo finito, ramificato sul luogo degli zeri di una funzione analitica.*

*Dimostrazione.* Questa è la controparte geometrica della preparazione di Weierstrass: localmente il luogo degli zeri di  $f$  è uguale al luogo degli zeri di un polinomio di Weierstrass  $g$  nell'ultima variabile  $z_n$ , i cui coefficienti sono funzioni analitiche nelle rimanenti  $n - 1$  variabili. Usando la definizione di morfismo finito, si vede che la ramificazione è esattamente sui punti in cui il discriminante di  $g(z, \cdot)$  si annulla. Ma il discriminante è un polinomio nei coefficienti, che a loro volta sono funzioni analitiche in  $z$ , pertanto complessivamente il discriminante è una funzione analitica in  $z$ .  $\square$

**Teorema 3.0.9.** *Sia  $W$  un sottoinsieme analitico di  $\mathbb{C}^n$  dato in un intorno di 0 come il luogo degli zeri di due funzioni  $f, g \in {}_n\mathcal{H}_n$ , e supponiamo  $f$  e  $g$  relativamente primi in  ${}_n\mathcal{H}_n$ . Allora esiste una proiezione su un sottospazio affine  $A$  di dimensione  $n - 2$  nello spazio ambiente, tale che questa proiezione dà un morfismo finito (rivestimento ramificato con fibra finita) da  $W$  in  $A$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $W$  non contenga la retta  $z_n$ . Prendendo combinazioni lineari di  $f$  e  $g$ , possiamo supporre che nè il luogo degli zeri di  $f$  nè il luogo degli zeri di  $g$  contenga la retta  $z_n$ . Usando la preparazione di Weierstrass, supponiamo che  $f$  e  $g$  siano polinomi di Weierstrass in  $z_n$ . Essendo  $f$  e  $g$  primi fra loro, esistono  $\alpha$  e  $\beta$  tali che:

$$\gamma = \alpha f + \beta g \neq 0 \in {}_{n-1}\mathcal{H}$$

Ora vediamo che la proiezione  $\pi$  di  $W$  sulle prime  $n - 1$  variabili è esattamente il luogo degli zeri di  $\gamma$ . Usiamo la divisione di Weierstrass di  $\alpha$  mediante  $g$ , e scriviamo:

$$\alpha = hg + r$$

con il grado di  $r$  strettamente inferiore al grado di  $g$ . Allora:

$$\gamma = rf + (\beta + hf)g$$

Ora se per qualche  $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $\gamma$  si annulla ma  $f$  e  $g$  non hanno zeri comuni lungo la retta  $\pi^{-1}(z')$ , segue che  $r$  si annulla in tutti gli zeri di  $g$  in  $\pi^{-1}(z')$ . Poichè il grado di  $r$  è strettamente minore del grado di  $g$ ,  $r$  e quindi  $\beta + hf$  si devono annullare identicamente sulla retta  $\pi^{-1}(z')$ , cosa impossibile perchè queste due ultime funzioni olomorfe sono relativamente prime. Questo dice che il luogo degli zeri di  $\gamma$  deve coincidere con la proiezione dei luoghi degli zeri di  $f$  e di  $g$  tramite  $\pi$ . A questo punto si ha un'ipersuperficie in  $\mathbb{C}^{n-1}$  e si può applicare il corollario precedente per concludere.  $\square$

Mediante questo teorema possiamo avere un reciproco del corollario precedente:

**Corollario 3.0.10.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}^n$  uno spazio analitico irriducibile in 0. Si supponga che, detta  $\pi$  la proiezione su  $\mathbb{C}^{n-1}$ ,  $\pi(V \cap U)$  contenga un intorno di 0 in  $\mathbb{C}^{n-1}$ . Allora  $U$  è un'ipersuperficie in un intorno di 0.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che:

$$U = \{z \mid f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

Allora le funzioni  $f_i$  devono avere un fattore comune in  ${}_n\mathcal{H}$ , perchè altrimenti  $U$  sarebbe contenuto nel luogo degli zeri di due funzioni relativamente prime, e quindi per quanto visto nel paragrafo precedente la sua proiezione su un sottospazio affine di codimensione 1 deve avere ancora codimensione 1, e quindi non potrebbe essere un aperto. Se chiamiamo con  $g$  il massimo comun divisore delle  $f_i$ , usando l'irriducibilità di  $U$  si conclude che:

$$U = \{z \mid g(z) = 0\}$$

e cioè quanto si voleva provare. □

Quest'ultimo risultato può essere visto come la versione analitica dell' Hauptidealsatz di Krull:

**Teorema 3.0.11.** *(Krull) Sia  $A$  un anello Noetheriano, e sia  $f \in A$  un elemento che non è nè un divisore dello zero nè un'unità. Allora ogni ideale primo minimale  $\mathcal{P}$  contenente  $f$  ha altezza 1.*

Questi risultati danno una descrizione locale dei sottoinsiemi analitici di codimensione 1 e 2, e suggeriscono la strada per una definizione di dimensione per sottoinsiemi analitici dello spazio affine. Simili risultati valgono allo stesso modo per sottoinsiemi analitici di codimensione maggiore, non proveremo questi risultati in queste brevi note:

1. Un sottoinsieme analitico di  $\mathbb{C}^n$  è unione finita di sottoinsiemi analitici  $V_i$  irriducibili in  $p$ , in modo unico e tale che i  $V_i$  non sono inclusi uno nell'altro.
2. Ogni sottoinsieme analitico di  $\mathbb{C}^n$  può essere espresso come rivestimento ramificato su un polidisco  $\Delta$ , con ramificazioni su un'ipersuperficie analitica di  $\Delta$ .
3. Se  $V \subset \mathbb{C}^n$  non contiene la retta  $z_1 = \dots = z_{n-1} = 0$  allora la proiezione su  $z_n = 0$  di  $V$  è un sottospazio analitico in un intorno di 0.

Citiamo il seguente risultato, una dimostrazione del quale può essere trovata ad esempio in [5]:

**Teorema 3.0.12.** *Sia  $Z$  un sottoinsieme analitico di  $\mathbb{C}^n$ . Allora esiste un sottoinsieme analitico  $\text{Sing}(Z) \subset Z$  tale che*

- *$Z$  è uno spazio analitico in un intorno di un punto  $w$  se e solo se  $w \in Z - \text{Sing}(Z)$ ;*
- *$\text{Sing}(Z)$  è il complementare di un aperto denso in  $Z$ ;*
- *$Z - \text{Sing}(Z)$  è localmente e globalmente connesso.*

Vogliamo dotare questo spazio topologico di un fascio, in modo poi da poter definire la categoria degli spazi analitici come la categoria degli spazi anellati che siano localmente isomorfi ad un sottoinsieme analitico. Se  $X$  è un qualunque spazio topologico, denoteremo con  $\mathcal{C}(X)$  il fascio delle funzioni continue su  $X$  a valori in  $\mathbb{C}$ , con  $\mathcal{H}$  il fascio delle funzioni olomorfe su  $\mathbb{C}^n$ .  $\mathcal{H}$  è allora un sottofascio di  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ .

**Definizione 3.0.13.** *Sia  $U$  un sottoinsieme analitico di  $\mathbb{C}^n$ , e sia  $x$  un punto di  $U$ . C'è un omomorfismo di restrizione:*

$$\epsilon_x : \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)_x \rightarrow \mathcal{C}(U)_x$$

*fra le spighe. L'immagine di  $\mathcal{H}_x$  attraverso  $\epsilon_x$  è un sottoanello  $\mathcal{H}_{x,U}$  di  $\mathcal{C}(U)_x$ . Gli  $\mathcal{H}_{x,U}$  formano un sottofascio  $\mathcal{H}_U$  di  $\mathcal{C}(U)$  che verrà detto il fascio delle funzioni olomorfe su  $U$ .*

Avendo dotato  $U$  di una topologia e di un fascio di funzioni olomorfe, possiamo dare la definizione di applicazione olomorfa:

**Definizione 3.0.14.** *Siano  $U$  e  $V$  due sottoinsiemi analitici di  $\mathbb{C}^n$  e di  $\mathbb{C}^m$  rispettivamente. Una applicazione  $\phi : U \rightarrow V$  è detta olomorfa se è continua e se  $f \in \mathcal{H}_{\phi(x),V}$  implica che anche  $f \circ \phi \in \mathcal{H}_{x,U}$ .*

Questo è come chiedere che le  $m$  coordinate di  $\phi$  siano delle funzioni olomorfe. La composizione di funzioni olomorfe è olomorfa.

**Definizione 3.0.15.** *Una biiezione  $\phi : U \rightarrow V$  è detta isomorfismo analitico se sia  $\phi$  che  $\phi^{-1}$  sono olomorfe. Questo equivale a chiedere che  $\phi$  è un omeomorfismo di  $U$  in  $V$  che trasforma il fascio  $\mathcal{H}_U$  nel fascio  $\mathcal{H}_V$ .*

Si osservi che il prodotto di sottoinsiemi analitici è un sottoinsieme analitico del prodotto degli spazi affini. Si noti che, a differenza del caso algebrico, la topologia del prodotto è proprio la topologia prodotto.

Volendo dare una definizione astratta

**Definizione 3.0.16.** *Uno spazio analitico è uno spazio anellato che sia localmente isomorfo a sottoinsiemi analitici.*

Vediamo una definizione più concreta:

**Definizione 3.0.17.** *Chiameremo uno spazio analitico uno spazio topologico separato  $X$  dotato di un sottofascio  $\mathcal{H}_X$  del fascio delle funzioni continue  $\mathcal{C}_X$  in modo tale che esista un ricoprimento aperto  $\{V_i\}$  dello spazio  $X$  tale che ogni  $V_i$  dotato della topologia e del fascio indotti da quelli di  $X$  sia isomorfo a un sottoinsieme analitico  $U_i$  di qualche spazio affine.*

Se  $V$  è un sottoinsieme aperto di uno spazio analitico  $X$ , chiameremo carta di  $V$  ogni isomorfismo analitico di  $V$  con un sottoinsieme analitico  $U$  di uno spazio affine. Quindi stiamo richiedendo che  $X$  possa essere ricoperta da aperti che possiedano delle carte. Per fissare la notazione, ricordiamo la definizione di varietà algebrica (si ricordi che il prodotto di varietà algebriche affini è una varietà algebrica affine non dotata della struttura di spazio anellato prodotto):

**Definizione 3.0.18.** *Sia  $X$  uno spazio topologico con un sottofascio  $\mathcal{O}_X$  del fascio delle funzioni continue  $\mathcal{C}_X$ .  $X$  verrà detto varietà algebrica se esiste un ricoprimento aperto finito  $\{V_i\}$  dello spazio  $X$ , tale che ogni  $V_i$  munito della struttura indotta da quella di  $X$ , sia isomorfo ad un sottospazio localmente chiuso  $U_i$  di un qualche spazio affine. Richiediamo inoltre che la diagonale  $\Delta \subset X \times X$  sia chiusa.*

Le definizioni di applicazione olomorfa e di isomorfismo analitico, essendo di carattere locale, si trasportano agli spazi analitici. Si osservi che si può dare in modo naturale la nozione di sottoinsieme analitico di uno spazio analitico e che esiste un'unica struttura naturale di prodotto di spazi analitici.

Ecco dunque un primo risultato di confronto elementare fra geometria algebrica e geometria analitica

- Lemma 1.**
1. *La topologia di Zariski di  $\mathbb{C}^n$  è meno fine della topologia usuale;*
  2. *Ogni sottoinsieme localmente chiuso di Zariski di  $\mathbb{C}^n$  è analitico;*
  3. *Un'applicazione regolare di due sottoinsiemi localmente chiusi di Zariski è olomorfa;*
  4. *Un isomorfismo biregolare di due sottoinsiemi localmente chiusi di Zariski è anche un isomorfismo analitico*

Vediamo ora che ogni carta algebrica di una varietà algebrica è in effetti una carta analitica. Sia  $X$  una varietà algebrica e  $V$  un suo aperto di Zariski. Questo possiede una carta algebrica  $\phi : V \rightarrow U$  su un sottoinsieme  $U$  localmente chiuso in uno spazio affine. Per il lemma, si può dotare  $U$  della struttura di sottoinsieme analitico del medesimo spazio affine.

**Proposizione 3.0.19.** *Sia  $X$  una varietà algebrica sui complessi. Esiste su  $X$  un'unica struttura di spazio analitico tale che, per ogni  $V$  sottoinsieme aperto di Zariski di  $X$  con una carta algebrica  $\phi : V \rightarrow U$  dove  $U$  è un insieme localmente chiuso di uno spazio affine, l'insieme  $V$  sia aperto e  $\phi$  sia un isomorfismo analitico di  $V$  (dotato della struttura analitica indotta) sopra a  $U$  (dotato della struttura analitica definita nel lemma precedente).*

*Dimostrazione.* L'unicità è evidente, poichè si può ricoprire  $X$  con degli aperti di Zariski  $V_i$ . A questo punto la struttura analitica risulta fissata dalle carte. Per provare l'esistenza, se  $\phi : V \rightarrow U$  è una carta, trasportiamo la struttura analitica di  $U$  su  $V$ . Dobbiamo verificare che le strutture indotte su  $V \cap V'$  da  $V$  e da  $V'$  sono la stessa. Ma questo è il punto d del lemma precedente, una volta controllato (grazie al punto a) che l'intersezione è aperta sia dentro  $V$  che dentro  $V'$  come sottoinsieme analitico. Detto  $V_{ij} = \Delta \cap V_i \times V_j$ , se chiamiamo con  $T_{ij}$  l'insieme  $\phi_i \times \phi_j(V_{ij})$ , sappiamo che  $T_{ij}$  è un chiuso di Zariski nel prodotto  $V_i \times V_j$ . Pertanto è anche un chiuso nella topologia analitica. Questo dimostra che sugli incollamenti la diagonale è chiusa nel prodotto, che è esattamente quanto serve per provare che uno spazio anellato definito per incollamento di spazi anellati sia separato.  $\square$

Per concludere il capitolo osserviamo che se  $(X, \mathcal{O}_X)$  è una varietà algebrica, la costruzione precedente induce un morfismo naturale di spazi anellati  $(X^h, \mathcal{H}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  indotto dall'inclusione  $i : \mathcal{O}_X \subset \mathcal{H}_X$ .

# Capitolo 4

## I principi GAGA

Un fascio algebrico coerente  $\mathcal{F}$  su una varietà algebrica  $X$  è un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli che, in un intorno affine  $V$  di ogni punto, può essere realizzato come la localizzazione  $\tilde{M}$  di un  $\mathcal{O}_V$ -modulo finitamente generato. Essendo  $M$  finitamente generato, si ha una suriezione  $\mathcal{O}(V)^n \rightarrow M$  per un certo  $n$ , e essendo  $\mathcal{O}(V)$  Noetheriano, il nucleo di questa mappa è anch'esso finitamente generato. Pertanto si ha la sequenza esatta:

$$\mathcal{O}(V)^m \rightarrow \mathcal{O}(V)^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

Localizzando questa sequenza su  $V$  si ha la sequenza esatta di fasci:

$$\mathcal{O}_V^m \rightarrow \mathcal{O}_V^n \rightarrow \mathcal{F}|_V \rightarrow 0$$

Pertanto un fascio algebrico coerente è localmente il conucleo di un morfismo  $\mathcal{O}_V^m \rightarrow \mathcal{O}_V^n$ . Si può verificare che nuclei, conuclei e estensioni di fasci algebrici (quasi)coerenti sono fasci algebrici (quasi)coerenti. Pertanto questa condizione in realtà caratterizza i fasci algebrici coerenti. Da questa condizione trarremo un analogo per la definizione di fascio analitico coerente:

**Definizione 4.0.20.** (*fascio coerente*) Sia  $X$  uno spazio analitico. Un fascio analitico su  $X$  è un fascio di  $\mathcal{H}_X$ -moduli e un morfismo di moduli analitici è un morfismo di fasci di  $\mathcal{H}_X$ -moduli. Un fascio analitico  $\mathcal{F}$  sarà detto un fascio analitico coerente se ogni punto di  $X$  è contenuto in un intorno  $V$ , tale che  $\mathcal{F}|_V$  sia il conucleo di un morfismo  $\mathcal{H}_V^m \rightarrow \mathcal{H}_V^n$  fra fasci analitici liberi di rango finito.

Poichè  $\mathcal{H}(V)$  non è mai Noetheriano, una definizione in termini di localizzazione come nel caso algebrico non sarebbe equivalente a questa, ed è in effetti questa la proprietà che non si vuole perdere. Si noti che la coerenza in questo caso come in quello algebrico è una proprietà locale.

**Osservazione 1.** Storicamente la nozione di fascio coerente nel caso di uno spazio anellato veniva data mediante le due richieste per il fascio  $\mathcal{F}$  di  $\mathcal{R}$ -moduli ( $\mathcal{R}$  fascio di anelli su  $X$ ):

- $\mathcal{F}$  è localmente generato da un numero finito di sue sezioni.
- Per ogni  $(s_1, \dots, s_p)$  sezioni in  $\mathcal{F}(U)$  con  $U$  aperto di  $X$ , il fascio delle relazioni fra le  $s_i$  è a sua volta localmente generato da un numero finito di sezioni del fascio

Si noti il carattere locale di queste due richieste. Vedendo un fascio di anelli come fascio di moduli su sè stesso, si ha la nozione di fascio coerente d'anelli. Due casi speciali di questa definizione sono quelli in cui  $X$  sia uno spazio analitico oppure una varietà algebrica proiettiva (o più in generale, una varietà algebrica che sia ricoperta da un numero finito di varietà affini) e il fascio d'anelli sia rispettivamente il fascio di struttura analitico e algebrico. I teoremi di Oka e di Serre garantiscono che in questi due casi particolari, questa definizione generale di fascio coerente viene a coincidere con quella proposta nella definizione 4.0.20.

**Teorema 4.0.21.** (Oka) Se  $X$  è uno spazio analitico,  $\mathcal{H}_X$  soddisfa anche la seconda proprietà di questa nota.

**Teorema 4.0.22.** (Serre) Se  $X$  è una varietà algebrica proiettiva,  $\mathcal{O}_X$  soddisfa anche la seconda proprietà di questa nota.

Per arrivare al teorema GAGA di Serre, vogliamo estendere la corrispondenza  $X \rightarrow X^h$  ai fasci.

**Definizione 4.0.23.** Se  $(X, \mathcal{O}_X)$  è una varietà algebrica proiettiva si ha il morfismo naturale di spazi anellati  $\phi : (X^h, \mathcal{H}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ . Se  $\mathcal{F}$  è un fascio coerente su  $(X, \mathcal{O}_X)$ , definiamo:

$$\mathcal{F}^h = \phi^* \mathcal{F} := \phi^{-1} \mathcal{F} \otimes_{\phi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{H}_X$$

Su  $X^h$ .

**Osservazione 2.** Per ogni  $x \in X$ , la spiga  $\mathcal{F}_x^h = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{H}_x$ , così il fascio  $\mathcal{F}^h$  è coerente per l'esattezza destra del prodotto tensoriale.

Vediamo ora il teorema centrale di questa sezione. Sia  $\mathcal{F}$  un fascio e sia  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Allora  $s \otimes 1$  è una sezione di  $\mathcal{F}^h$  su  $U^h$ . Così la mappa  $s \rightarrow s \otimes 1$  dà un omomorfismo  $\epsilon : \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U^h, \mathcal{F}^h)$ . Sia ora  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un ricoprimento aperto finito di Zariski di  $X$ . Naturalmente  $\mathcal{U}^h = \{U_i^h\}$  forma un ricoprimento aperto di  $X^h$ . Per ogni  $q$ -pla di indici  $i_0, \dots, i_q$  la mappa  $\epsilon$  induce canonicamente un omomorfismo:

$$\epsilon' : \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U_{i_0}^h \cap \dots \cap U_{i_q}^h, \mathcal{F}^h)$$

Così si ha un omomorfismo dei complessi di Čech:

$$\epsilon'' : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}^h, \mathcal{F}^h)$$

Passando alla  $q$ -esima coomologia di Čech, otteniamo un morfismo:

$$\epsilon'' : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{U}^h, \mathcal{F}^h)$$

infine, prendendo il limite diretto rispetto a raffinamenti del ricoprimento, otteniamo:

$$\epsilon'' : H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X^h, \mathcal{F}^h)$$

**Teorema 4.0.24.** (*GAGA di Serre*) Se  $X$  è una varietà algebrica proiettiva su  $\mathbb{C}$  e  $\phi$  è il morfismo naturale di spazi anellati da  $(X^h, \mathcal{H}_X)$  a  $(X, \mathcal{O}_X)$ , allora  $\phi^*$ , il funtore che manda  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{F}^h$ , induce un'equivalenza di categorie fra la categoria dei fasci algebrici coerenti su  $X$  e la categoria dei fasci analitici coerenti su  $X^h$ . Inoltre, per ogni fascio algebrico coerente  $\mathcal{F}$  su  $X$ , le mappe naturali:

$$\epsilon : H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X^h, \mathcal{F}^h)$$

sono degli isomorfismi per ogni  $q$ .

**Osservazione 3.** Nel suo lavoro [6], Serre dimostra che per ogni  $x \in X$ , si ha che  $\mathcal{H}_x$  visto come  $\mathcal{O}_x$  modulo risulta essere fedelmente piatto. Pertanto la corrispondenza  $\phi^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^h$  è un'equivalenza di categorie abeliane. Inoltre i supporti dei due fasci  $\mathcal{F}$  ed  $\mathcal{F}^h$  sono uguali. Citiamo questi risultati, anche perchè nel seguito avremo bisogno del seguente lemma algebrico (non impegnativo) [6] pag. 36:

**Lemma 2.** Sia  $A \subset B$ . Perchè l'inclusione renda  $B$  un  $A$ -modulo fedelmente piatto è necessario e sufficiente che  $B$  sia  $A$ -piatto e inoltre per ogni  $a \in A$  ideale, si abbia  $aB \cap A = a$ .

**Teorema 4.0.25.**  $\mathcal{H}_x$  è un  $\mathcal{O}_x$ -modulo fedelmente piatto.

**Corollario 4.0.26.** (*Teorema di Chow*) Ogni sottospazio analitico dello spazio proiettivo complesso  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è una varietà algebrica proiettiva.

*Dimostrazione.* Se  $X$  è un sottospazio analitico, allora si consideri  $\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}/\mathcal{I}(Y)$ . Questo è un fascio coerente analitico su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^h$  per il teorema di Cartan. C'è pertanto un fascio algebrico coerente  $\mathcal{F}$  su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  tale che  $\mathcal{F}^h = \mathcal{H}_Y$ . Dal fatto che i supporti di  $\mathcal{F}$  e di  $\mathcal{H}_Y$  sono uguali, si ha che  $Y$  è un chiuso di Zariski in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , cioè una varietà algebrica proiettiva.  $\square$

Vogliamo ora trovare un risultato che garantisca che mappe olomorfe fra varietà algebriche proiettive sono in realtà mappe algebriche. Per farlo, vediamo un primo risultato di confronto. Abbiamo già visto che ogni applicazione regolare è olomorfa. La proposizione seguente indica in quale caso l'affermazione reciproca è vera:

**Proposizione 4.0.27.** *Siano  $T$  e  $X$  due varietà algebriche, e sia  $p : T \rightarrow X$  un'applicazione regolare biunivoca. Se  $p$  è un isomorfismo analitico di  $T$  su  $X$ , allora è anche un isomorfismo biregolare.*

**Lemma 3.** ([6] pag. 10) *Sia  $\theta : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$  la mappa indotta sui germi dalle funzioni regolari (algebriche) nei germi di funzioni olomorfe. La mappa indotta sui germi rimane iniettiva. Se  $Y$  è una sottovarietà algebrica, questa mappa induce un'inclusione dei germi di funzioni algebriche in  $x$  nulle su  $Y$  nei germi delle funzioni analitiche in  $x$  nulle in  $Y$ .*

Denoteremo gli ultimi due germi rispettivamente con  $\mathcal{I}_{Y,x}$  e con  $\mathcal{A}_{Y,x}$ .

**Lemma 4.** *Sia  $X$  una varietà algebrica. Se  $U$  è un sottoinsieme aperto di Zariski denso in  $X$ , allora  $U$  è denso in  $X$  nella topologia euclidea.*

*Dimostrazione.* Sia  $Y$  il complementare di  $U$  in  $X$ , allora  $Y$  è chiuso di Zariski. Se  $x \in X$ , se  $x$  non fosse nella chiusura di  $U$ , si avrebbe che  $Y$  e  $X$  sarebbero uguali in un intorno di  $x$ , e da questo che i germi delle funzioni olomorfe in  $x$  nulle in  $Y$  sarebbero lo 0. Ma i germi delle funzioni olomorfe nulle in  $x$  contengono i germi delle funzioni algebriche nulle in  $x$ . Quindi  $Y = X$  in un intorno di Zariski di  $x \in X$ , contrariamente all'ipotesi che il suo complementare sia denso di Zariski in  $X$ .  $\square$

Ricordiamo il seguente risultato ben noto di geometria algebrica, (una dimostrazione può essere trovata ad esempio nel libro BAG1 di Shafarevic, oppure nel capitolo 1 di Hartshorne, nel caso di varietà irriducibili).

**Lemma 5.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione regolare di una varietà algebrica  $X$  in una varietà algebrica  $Y$ , e si supponga che  $f(X)$  sia denso di Zariski in  $Y$ . Allora esiste un sottoinsieme  $U \subset f(X)$  che è aperto di Zariski e denso di Zariski in  $Y$ .*

Questo lemma garantisce che in geometria algebrica (i.e. usando morfismi algebrici fra varietà algebriche) non si può costruire un esempio simile al classico esempio in geometria differenziale della retta  $\mathbb{R}$  densa nel toro.

**Lemma 6.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è un'applicazione regolare di una varietà algebrica  $X$  in una varietà algebrica  $Y$ , la chiusura e la  $Z$ -chiusura di  $f(X)$  dentro ad  $Y$  coincidono.*

*Dimostrazione.* Detta  $T$  la chiusura di Zariski di  $f(X) \subset Y$ , applicando il lemma precedente si trova un sottoinsieme  $U \subset f(X)$  che sia aperto di Zariski e denso di Zariski dentro a  $T$ . Per il lemma 4,  $U$  è denso in  $T$ , e pertanto denso anche in  $f(X)$ . Questo mostra che  $T$  è contenuto nella chiusura di  $f(X)$  (l'inclusione opposta è ovvia).  $\square$

*Dimostrazione.* Dimostriamo ora la proposizione 4.0.27. Dobbiamo dimostrare due cose: che  $p$  è un omeomorfismo degli spazi topologici soggiacenti con la topologia di Zariski e che  $p^*$  induce un isomorfismo sui fasci di struttura algebrici. Il primo fatto segue dai lemmi topologici provati in precedenza. Sappiamo già che  $p$  è continua, essendo una biiezione è sufficiente provare che è chiusa. Sia  $F$  un chiuso di Zariski di  $T$ , poichè  $p$  è un isomorfismo analitico è un omeomorfismo analitico, pertanto  $p(F)$  è chiuso in  $X$ . Applicando il lemma precedente, si conclude che  $p(F)$  è anche chiuso di Zariski in  $X$ , e questo prova la prima parte. Per dimostrare la seconda parte, studiamo la mappa  $p^*$  indotta sui fasci di struttura locali:  $p^* : \mathcal{O}_{x,X} \rightarrow \mathcal{O}_{t,T}$  dove  $x = p(t)$ . Il nostro scopo è dimostrare che la  $p^*$  è biunivoca. D'ora in avanti tratteremo il problema dal punto di vista algebrico: detti  $A = \mathcal{O}_{x,X}$ ,  $A' = \mathcal{O}_{t,T}$ ,  $p^*$  essendo un omeomorfismo di Zariski induce un'iniezione che scriveremo come inclusione:  $A \subset A'$ . Analogamente denoteremo con  $B$  e  $B'$  i corrispondenti anelli analitici:  $B = \mathcal{H}_{x,X}$  e  $B' = \mathcal{H}_{t,T}$ . L'ipotesi ci dice esattamente che  $B = B'$ , dobbiamo provare che  $A = A'$ . Consideriamo le componenti irriducibili di  $X$  per  $x$ . Queste sono date ciascuna da un ideale primo  $\mathcal{P}_i = \mathcal{I}_{x,X_i}$  dell'anello  $A$ . Chiamiamo  $K_i$  l'anello delle funzioni razionali sul germe di varietà irriducibile  $X_i$ . Se  $S$  è il complementare in  $A$  dell'unione dei  $\mathcal{P}_i$ , si ha che  $S$  è un sistema moltiplicativamente chiuso e la localizzazione  $A_S$  è il prodotto diretto dei campi residui  $K_i$ . Chiamiamo con  $T_t = p^{-1}(X_i)$ . Essendo  $p$  un omeomorfismo di Zariski, le  $T_i$  sono le componenti irriducibili di  $T$  passanti per  $t$ , e definiscono ideali primi  $\mathcal{P}'_i$  di  $A'$ . Allo stesso modo chiameremo  $K'_i$  i campi delle frazioni di  $A'_i$ . Ancora l'anello totale delle frazioni  $A'_S$  è il prodotto dei  $K'_i$ . Vogliamo dimostrare per prima cosa che  $p$  dà una corrispondenza birazionale fra  $T_i$  e  $X_i$ . Questo significa provare che  $K_i = K'_i$ . Sempre grazie al fatto che  $p$  è un omeomorfismo di Zariski, la dimensione dei germi di varietà algebriche non cambia mediante  $p$ , questo dice che i campi  $K_i$  e  $K'_i$ , entrambi estensioni di  $\mathbb{C}$ , hanno lo stesso grado di trascendenza.  $p$  inoltre sempre essendo un omeomorfismo di Zariski non può indurre un rivestimento ramificato di  $T_i$  sopra a  $X_i$ , questo dice che i due campi  $K_i$  e  $K'_i$  sono estensioni algebriche il secondo del primo di grado 1, cioè sono uguali. Passando ai prodotti, abbiamo che i localizzati  $A_S$  e  $A'_S$  sono uguali. Ora proviamo che anche  $A = A'$ . Sia  $f \in A'$ .  $f'$  induce un elemento in  $A'_S$ , che chiameremo con lo stesso nome. Essendo i due spazi birazionalmente equivalenti,  $f' \in A_S$ , cioè esistono  $g \in A$  e  $s \in S$  tali che  $g = sf'$ . Quindi  $g \in sA'$ , da cui  $g \in sB'$ , cioè anche  $g \in sB$ . Poichè  $sB \cap A = sA$  grazie al fatto che  $B$  è fedelmente piatto e al lemma algebrico 2, si ha che  $g \in sA$ , cioè esiste  $f \in A$  tale che  $g = sf$ , cioè  $s(f - f') = 0$  e questo implica  $f = f'$ , cioè  $A = A'$ .  $\square$

**Corollario 4.0.28.** (*Mappe*) Siano  $X, Y$  sue varietà algebriche proiettive. Allora per ogni mappa olomorfa  $f : X^h \rightarrow Y^h$  esiste un'unica mappa algebrica che induce  $f$ .

*Dimostrazione.* Il grafico di  $f$ ,  $\Gamma(f) \subset X^h \times Y^h$  è una sottovarietà analitica, pertanto per il teorema di Chow una sottovarietà algebrica (si ricordi che l'embedding di Segre esprime il prodotto di varietà algebriche proiettive come una varietà algebrica proiettiva). Dette  $p_Y$  e  $p_X$  rispettivamente le proiezioni su  $Y$  e su  $X$ , si ha che  $f = p_Y \circ p_X^{-1}$ .  $p_X$  è una mappa biolomorfa e abbiamo già visto che una mappa biolomorfa e regolare è biregolare, essendo  $p_Y$  una mappa chiaramente algebrica (una proiezione).  $\square$

**Corollario 4.0.29.** (*Fibrati*) *Sia  $X$  una varietà algebrica proiettiva. Ogni fibrato vettoriale olomorfo su  $X^h$  è indotto da un unico fibrato vettoriale algebrico su  $X$ .*

*Dimostrazione.* (sketch) Traduciamo l'enunciato in termini di fasci, essendo il teorema GAGA un risultato sui fasci coerenti. Il teorema diventa allora: un fascio analitico coerente  $\mathcal{M}$  su  $X^h$  localmente isomorfo a  $\mathcal{H}^n$  induce un unico fascio algebrico coerente  $\mathcal{F}$  su  $X$ , localmente isomorfo a  $\mathcal{O}^n$  e tale che  $\mathcal{F}^h$  sia isomorfo a  $\mathcal{M}$ . Il teorema GAGA ci dice che esiste un fascio algebrico coerente che verifica la seconda condizione. Ricordando che in ambito locale (e noetheriano) la piatezza per un modulo equivale al fatto che il modulo sia localmente libero, si ha che  $\mathcal{F}_x^h$  è piatto su  $\mathcal{H}_x$  per ogni  $x$ . Dalla fedele piatezza segue che  $\mathcal{F}$  deve essere piatto su  $\mathcal{O}_x$  e pertanto localmente libero (si veda [6]).  $\square$



# Bibliografia

- [1] Philip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley & Sons Inc., New-York 1994.
- [2] Gunning R.C., Rossi H., *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall 1965.
- [3] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [4] Steven G. Kranz, *Function Theory of several complex variables*, Wiley & Sons Inc., New-York 1982.
- [5] V. Palamodov, *Algebra and Geometry in several complex variables*, 2003
- [6] Jean-Pierre Serre, *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, Annales de l'institut Fourier 6, 1956.
- [7] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents*, Annals of Mathematics 61, 1955.
- [8] J.L. Taylor, *Notes on Several Complex Variables*, University of Utah, 1997.
- [9] Claire Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, Cambridge University Press, 2002.
- [10] Oscar Zariski, Pierre Samuel, *Commutative Algebra*; D.Van Nostrand Company, Toronto 1960.