La Coomologia Orbifold degli Spazi di Moduli di Curve

Nicola Pagani

In questa tesi, studiamo la coomologia orbifold (o coomologia di Chen–Ruan [2]) degli spazi di moduli di curve lisce $\mathcal{M}_{g,n}$ e delle loro compattificazioni con curve stabili: $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Dopo aver sviluppato la teoria in generale, ci concentriamo sui casi di genere basso ($1, 2$ e 3), e studiamo la coomologia orbifold di $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ come algebra sull'anello di coomologia ordinaria di $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$, determinandone cioè generatori e relazioni. Nei casi di genere 2 e 3 studiamo invece la coomologia orbifold come spazio vettoriale graduato sui razionali.

1. – Gli spazi di moduli e il loro gruppo di coomologia orbifold

Lo studio della geometria degli spazi di moduli di curve di genere fissato ha inizio nel secolo XIX con Riemann. Tuttavia, solamente intorno alla metà del secolo con i lavori fondazionali di O. Teichmüller in topologia differenziale e P. Deligne, D. Mumford in geometria algebrica, viene data loro una precisa definizione come orbifold complessi. La loro geometria è stata molto studiata classicamente dalla scuola italiana di geometria algebrica. Più di recente, per indagare la geometria di tali spazi, si è fatto ricorso a tecniche algebriche via via più avanzate (GIT, teoria degli stacks algebrici, teoria di Hodge). Contemporaneamente l'interesse per lo studio di tali spazi si è esteso alla topologia differenziale e algebrica, e più recentemente alla fisica matematica (teoria dei sistemi integrabili), alla geometria simplettica e alla fisica teorica (teoria di Gromov-Witten e teoria delle stringhe). Questo ha fatto sì che lo studio di tali orbifold fosse intrapreso sia con scopi e finalità differenti, sia con tecniche molto diverse. In particolare, all'inizio degli anni '80 con J. Harer e D. Mumford [3], inizia un sistematico programma di ricerca volto all'indagine dell'omologia e coomologia di tali spazi, con tecniche rispettivamente topologiche e algebriche. Tale indagine è in corso d'opera, e ha già prodotto importanti risultati con applicazioni alla fisica matematica e alla fisica teorica.

All'inizio di questo secolo, W. Chen e Y. Ruan in geometria simplettica [2] e D. Abramovich, T. Graber e A. Vistoli in geometria algebrica [1], nel progetto di estendere la teoria di Gromov–Witten agli orbifold, scoprono una nozione più raffinata di coomologia per gli orbifold, detta *coomologia orbifold*, o *coomologia di stringa*, o ancora *coomologia di Chen–Ruan*. Tale coomologia recupera la ordinaria coomologia (singolare, de Rham, ...) dello spazio topologico soggiacente come sottoalgebra.

Se X è un orbifold, si costruisce il suo *orbifold d'inerzia* $I(X)$, definito come l'unione disgiunta per ogni g nello stabilizzatore di ogni punto di X del luogo fisso dell'azione di $\langle g \rangle$ in X (vedi [1] e [2]). Il gruppo di coomologia orbifold di X, $H^*_{CR}(X)$, è definito come la coomologia ordinaria di $I(X)$, in altre parole è la somma diretta della coomologia di tutti i luoghi fissati dall'azione di $\langle g \rangle$ per ogni $g \in \mathrm{Stab}(x)$, per ogni $x \in X$. Ad esempio l'orbifold X appare come componente connessa di $I(X)$ essendo il luogo fissato dall'automorfismo identico (che è banalmente nello stabilizzatore di ogni punto). La coomologia orbifold risulta essere naturalmente graduata sui razionali, ed è inoltre possibile definire un *prodotto d'intersezione orbifold* per due elementi in $H^*_{CR}(X)$.

La descrizione dell'orbifold d'inerzia per $\mathcal{M}_{g,n}$ viene data in [4], seguendo una costruzione dovuta a B. Fantechi, a sua volta basata sulla descrizione algebrica di R. Pardini dei rivestimenti abeliani. Se $C \in \mathcal{M}_{g,n}$ è una curva liscia con n punti fissati su di essa, e h è un automorfismo, $C \to C/\langle h \rangle$ è un rivestimento ciclico ramificato su una curva di genere più basso, e gli n punti devono essere punti di ramificazione totale del rivestimento. Si studiano pertanto gli spazi di moduli di rivestimenti ciclici fissando i parametri discreti N (l'ordine di h), g' (il genere della curva rivestita), e i dati discreti associati alla ramificazione. Nel lavoro [4, Chapter 4] vediamo che gli spazi di moduli così costruiti per $g \leq 3$ sono sempre connessi, e la coomologia razionale di ciascuna di queste componenti connesse viene indagata. Notiamo che una simile costruzione era stata studiata da M. Cornalba (nel caso N primo, senza marcature) in un lavoro in cui l'autore studia il luogo singolare di $\mathcal{M}_g$.

Successivamente, si vuole studiare l'orbifold d'inerzia per la compattificazione liscia $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (i cui elementi sono le curve nodali di genere aritmetico g con n punti fissati e gruppo di automorfismi di ogni curva di ordine finito). Si consideri la seguente filtrazione:

$$\mathcal{M}_{g,n} \subset \mathcal{M}^{rt}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

dove il termine centrale è definito come il sottoinsieme di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ i cui elementi hanno una componente irriducibile liscia di genere g, alla quale sono incollate componenti irriducibili razionali (isomorfe alla sfera, $\mathbb{P}^1$), con punti marcati sopra esse.

Nel lavoro [4, Corollary 4.64], mostriamo che tutte le componenti connesse di $I(\mathcal{M}^{rt}_{g,n})$ si possono costruire a partire dalle componenti connesse di $I(\mathcal{M}_{g,k})$ ($k < n$), ripartendo gli n punti marcati in k sottoinsiemi in tutti i modi possibili $I_1, \ldots, I_k$, e incollando al posto dei k punti marcati, k sfere con punti marcati etichettati rispettivamente con $I_1, \ldots, I_k$. In figura, mostriamo un esempio di tale operazione nel caso in cui $k = 2$:

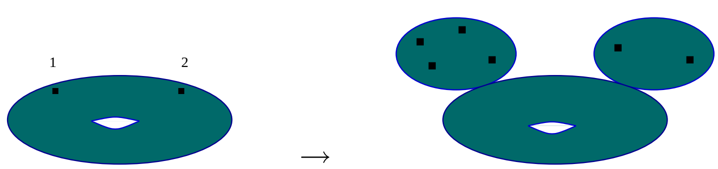

Figura 1: Incollamento di sfere corrispondente alla partizione di $\{1, \ldots, 6\}$ in $\{1, \ldots, 4\} \sqcup \{5, 6\}$

Come corollario, le componenti connesse di $I(\mathcal{M}^{rt}_{g,n})$ sono tutte isomorfe a prodotti di componenti connesse di $I(\mathcal{M}_{g,k})$ ($k < n$) per prodotti di $\overline{\mathcal{M}}_{0,I_i+1}$.

Nel caso in cui $g = 1$, possiamo dimostrare il seguente risultato:

Theorem 1 *[4, Corollary 5.19] Sia $C \in \overline{\mathcal{M}}_{1,n}$, e sia h un suo automorfismo. E' sempre possibile deformare C a una curva $C' \in \mathcal{M}_{1,n}^{rt}$, preservando l'automorfismo h.*

In particolare, l'orbifold d'inerzia $I(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$ è semplicemente la compattificazione dell'orbifold d'inerzia $I(\mathcal{M}_{1,n}^{rt})$. Arriviamo così a dimostrare il seguente risultato:

Theorem 2 *[4, Theorem 6.8] L'orbifold d'inerzia di $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ si costruisce a partire da una componente connessa A di $I(\mathcal{M}_{1,k})$, e una partizione di $\{1,\dots,n\}$ in k sottoinsiemi $I_1,\dots,I_k$ come prodotto:*

$$\overline{A} \times \prod_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{M}}_{0,I_i+1}$$

Inoltre, la coomologia di $\overline{A}$ è sempre quella di $\mathbb{P}^1$, o quella di un punto.

Poichè lo spazio dei moduli delle curve lisce di genere 1 con più di quattro punti marcati è rigido (cioè è in realtà un manifold), l'intero k del teorema precedente può essere al più 4. La coomologia ordinaria di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ è stata studiata negli anni '90 ed ha una descrizione molto esplicita dovuta a Getzler e Keel.

Un risultato simile, ma meno esplicito, è ottenuto per la descrizione del gruppo di coomologia orbifold in genere 2. In particulare non è più vero che l'orbifold d'inerzia $I(\overline{\mathcal{M}}_{2,n})$ è la compattificazione di $I(\mathcal{M}_{2,n}^{rt})$, e questo rende la descrizione combinatoria più complessa.

2. – Teoria dell'intersezione orbifold in $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$

La costruzione della teoria dell'intersezione orbifold richiede l'introduzione di nuove nozioni. Se (X_1, g_1) e (X_2, g_2) e $(X_3, g_1 \cdot g_2)$ sono componenti connesse dell'orbifold d'inerzia di X, si costruisce lo spazio (Y, g_1, g_2), dove Y è il luogo in X fissato contemporaneamente da g_1 e da g_2. Tale luogo nasce per definizione con 3 mappe:

$$\begin{tikzcd} & (X_1, g_1) \\ (Y, g_1, g_2) \arrow[ur, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[dr, bend right, "p_3"] & (X_2, g_2) \\ & (X_3, g_1 \cdot g_2) \end{tikzcd}$$

dove $p_1(x, g_1, g_2) = (x, g_1)$, $p_2(x, g_1, g_2) = (x, g_2)$ e $p_3(x, g_1, g_2) = (x, g_1 \cdot g_2)$. Se α e β sono in $H^*_{CR}(X)$, cioè in $H^*(I(X))$, e supponiamo $\alpha \in H^*(X_1, g_1)$ e $\beta \in H^*(X_2, g_2)$, il loro prodotto viene definito come

$$p_{3*}\left(p_1^*(\alpha) \cdot p_2^*(\beta) \cdot c_{top}(E)\right)$$

dove E è un certo fibrato su (Y, g_1, g_2), da interpretare come *fibrato di eccesso intersezione orbifold*. Non entriamo nei dettagli di questa definizione, che induce una struttura di *anello di coomologia orbifold* sulla coomologia dell'orbifold d'inerzia. Ci limitiamo ad osservare che la descrizione delle componenti connesse del tipo (Y, g_1, g_2) è in generale molto più complessa della descrizione delle componenti connesse dell'orbifold d'inerzia, perchè gli spazi di moduli di rivestimenti ramificati che qui appaiono non sono in generale abeliani (il gruppo $\langle g_1, g_2 \rangle$ in generale non è abeliano).

Il nostro studio si restringe per questo motivo al caso in cui $g = 1$, nel quale il lavoro è semplificato dal fatto che tutti i gruppi di automorfismi di curve di genere 1 sono abeliani (e di conseguenza lo sono anche i loro sottogruppi generati da due elementi).

Sia $f : I(\overline{\mathcal{M}}_{1,n}) \to \overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ la mappa che manda $f(x, g) = x$. Una significativa ulteriore semplificazione nello studio dell'anello di coomologia segue dal seguente risultato:

Theorem **3** *[4, Corollary 8.18] Il morfismo di pull–back $f^* : H^*(\overline{\mathcal{M}}_{1,n}) \to H^*(I(\overline{\mathcal{M}}_{1,n}))$ è suriettivo.*

Da questo, segue banalmente che la coomologia orbifold di $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ è moltiplicativamente generata dalle classi fondamentali delle componenti connesse di $I(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$. In [4, Chapter 8], vengono determinate tutte le relazioni fra i prodotti di tali generatori. Il risultato fondamentale è il seguente:

Theorem **4** *[4, Theorem 8.2] L'anello di coomologia orbifold $H^*_{CR}(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$ è generato come algebra sulla coomologia ordinaria $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$ dalle classi fondamentali delle componenti connesse dell'orbifold d'inerzia $I(\overline{\mathcal{M}}_{1,n})$, con relazioni esplicite.*

Riferimenti bibliografici

[1] D. Abramovich, T. Graber, A. Vistoli, *Gromov–Witten theory of Deligne–Mumford stacks*, Amer. J. Math., **130** (No.5), (2008), 1337–1398.

[2] W. Chen, Y. Ruan, *A new cohomology theory of orbifold*, Comm. Math. Phys., **248** (No.1), (2004), 1–31;

[3] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and geometry, Progr. Math., **36**, Birkhäuser Boston, **II**, (1983) 271–328.

[4] N. Pagani, *Chen–Ruan cohomology of moduli of curves*, PhD Thesis, SISSA-ISAS, Trieste (2009).

KTH Matematik, Lindstedtsvägen 25, S-10044 Stockholm.
e-mail: pagani@kth.se
PhD in Geometry, SISSA-ISAS
Direttore di Ricerca: Prof. Barbara Fantechi, SISSA-ISAS.