# Числа Бернулли-Эйлера и мультикраевые особенности серии $B_n^l$*

Олег Карпенков†

4 марта 2009 г.

**Аннотация**

В этой работе изучаются свойства чисел $K_n^l$ компонент связности бифуркационных диаграмм мультикраевых особенностей $B_n^l$. Доказывается рекуррентное соотношение на числа $K_n^l$. Как ранее было известно, $K_n^1$ является $n+1$-ым числом Бернулли-Эйлера, это доставляет необходимое граничное условие для вычисления чисел $K_n^l$. Мы также находим производящие функции для чисел $K_n^l$ с небольшим фиксированным параметром $l$ и выписываем уравнения в частных производных для общего случая.

## 1 Введение.

Числа Бернулли-Эйлера, которые часто обозначаются через $K_n$, наряду с числами Фибоначи и числами сочетаний, встречаются в различных частях математики. В математическом анализе эти числа можно встретить, как разложения функции $\sec + \operatorname{tg}$ в ряд Тейлора, а именно:

$$\sec t + \operatorname{tg} t = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{t^n}{n!}.$$

По аналогии с числами Каталана числа Бернулли-Эйлера строятся при помощи некоторого "магического" треугольника. Правила построения такого треугольника описаны, например, в [1]. Числа Бернулли-Эйлера обладают множеством важных арифметических свойств (см. [1], [4] и [5]).

Рассмотрим одно из геометрических употреблений чисел в теории особенностей. Как было показано В. И. Арнольдом [2], компоненты множества вполне правильных

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ НШ-709.2008.1, РФФИ 05-01-02805-CNRSL_a и FWF грант No. S09209.

†TU Graz /Kopernikusgasse 24, A 8010 Graz, Austria/

М-морсификаций краевых особенностей серии $B_n$ тесно связаны с комбинаторикой соответствующих конусов Спрингера. Он также доказал, что количества компонент этих особенностей равны числам Бернулли-Эйлера $K_n$, см. [1].

В этой работе приведены доказательства теорем, анонсированных автором в [3]. Речь пойдёт об обобщениях краевых особенностей $B_n$ функций на прямой для случая, когда край состоит из конечного числа точек, а также для случаев больших размерностей. Количества компонент множества вполне правильных М-морсификаций особенности $B_n^l$ также являются некоторым обобщением чисел Бернулли-Эйлера. В частности, мы доказываем рекуррентное соотношение на числа $K_n$:

$$K_{n-2}^{l+1} = K_n^l - nlK_n^{l-1}.$$

Кроме того, новые числа перечисляют компоненты связности одной серии стратов каустик особенностей $A_{2l+n-1}$, см. следствие 3.4.

Мы приведём доказательство рекуррентного соотношения (анонсированного в статье [3]) между количеством связных компонент множества вполне правильных М-морсификаций для различных значений $n$ и $l$.

Эта работа организована следующим образом. Во втором разделе вводятся необходимые определения и понятия, в том числе, определение особенностей серии $B_k^l$. В третьем разделе формулируется и доказывается основная теорема о рекуррентных соотношениях на числа $K_n^l$. В конце третьего раздела приводится связь чисел $K_n^l$ с количеством некоторых стратов особенностей $A_{2l+n-1}$. Для случая малого количества краевых точек числа $K_n^l$ явно считаются через числа Бернулли-Эйлера. Случай малого количества краевых точек разобран в четвёртом разделе. Рекуррентные соотношения позволяют выписать (к сожалению, с трудно вычислимыми коэффициентами) некоторые выражения для чисел $K_n^l$ через числа Бернулли-Эйлера, см. пятый раздел.

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину, С. К. Ландо и Б. З. Шапиро за оказанную помощь при выполнении этой работы, а также Технический Университет Граца (Technische Universität Graz) за гостеприимство и отличные рабочие условия.

## 2 Определение особенностей серии $B_n^l$

Приведём определение вполне правильной М-морсификации краевой особенности $B_\mu$ из статьи [2]. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\mu-1}$ вещественных многочленов

$$x^\mu + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_{\mu-1}x$$

на вещественной прямой с фиксированным "краем" $x = 0$.

**Определение 2.1.** *Вполне правильная М-морсификация краевой особенности* $B_\mu$ — это многочлен этого семейства, все $\mu - 1$ критических значений которого на вещественной прямой различны и не совпадают с его значением на крае.

Следующее определение является обобщением определения 2.1 на мультикраевые особенности типа $B_n^l$, то есть на особенности у которых вместо одной краевой точки в нуле — $l$ штук.

Рассмотрим произведение пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ действительных многочленов

$$x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 x^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x$$

и пространства $\mathbb{R}^{k-1}$ "краевых точек" $x = b_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i = 0$.

**Определение 2.2.** *Вполне правильная М-морсификация мультикраевой особенности* $B_n^l$ — это многочлен, все критические точки которого вещественны и различны, причём значения во всех критических точках, а также и значения во всех краевых точках $x = b_i$ различны.

Заметим, что краевые точки у нас пронумерованы, иначе нужно было бы рассматривать фактор пространства $\mathbb{R}^{l-1}$ по группе перестановок координат. Краевые точки должны быть пронумерованы, так как они соответствуют разным прообразам, которые не переставляются.

**Определение 2.3.** *М-областью* называется замкнутое подмножество пространства многочленов вида $x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 x^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x$, состоящее из многочленов, все критические точки которых вещественны.

Множество вполне правильных М-морсификаций является открытым множеством в $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{l-1}$, а его замыкание имеет вид (*М-область*) $\times \mathbb{R}^{l-1}$. Оно разбивается на связные компоненты бифуркационной диаграммой, состоящей из пяти гиперповерхностей. Три гиперповерхности встречаются уже в случае краевых особенностей типа $B_n$ (см. также [2]):

**(a)** краевая каустика, состоящая из функций с критической точкой на крае;

**(b)** обыкновенный страт Максвелла, состоящий из функций с равными критическими значениями в различных точках;

**(c)** краевой страт Максвелла, состоящий из функций, хотя бы одно из краевых значений которых является критическим (и соответствующая критическая точка не лежит на крае).

Заметим, что в наших обозначениях $B_n = B_n^1$, при этом краевая точка не закреплена. Таким образом, определение вполне правильной М-морсификации краевой особенности $B_n$ из статьи [2] является частным случаем определения 2.2.

В случае краевых особенностей иммерсий $B_n^l$, где $l \geq 2$, добавляются ещё две гиперповерхности:

**(d)** двойная краевая каустика, состоящая из функций с совпадающими краевыми точками;

**(e)** двойной краевой страт Максвелла, состоящий из функций с одинаковыми значениями в некоторых различных краевых точках.

# 3 Вычисление рекуррентного соотношения

Обозначим через $K_n$ числа Бернулли-Эйлера (вот начало последовательности, первый член соответствует $n = 0$: $1, 1, 1, 2, 5, 13, 61, \ldots$), а через $K_n^l$ — количество связных компонент множества вполне правильных М-морсификаций особенности $B_n^l$. Числа Бернулли-Эйлера являются граничным условием для чисел $K_n^l$, а именно $K_n^0 = K_{n-1}$ и $K_n^1 = K_{n+1}$ (см. [1]).

**Теорема 3.1.** *Имеет место равенство*

$$K_{n-2}^{l+1} = K_n^l - nlK_n^{l-1}.$$

Для особенности $B_2^3$ мы получаем следующее:

$$K_3^2 = K_5^1 - 5K_5^0 = K_6 - 5K_4 = 61 - 5 \cdot 5 = 36.$$

Можно выписать другое соотношение:

$$K_3^2 = K_1^3 + 2 \cdot 3K_1^3 = 3! + 6 \cdot 5 = 36.$$

Доказательство начнём с двух лемм.

Обозначим через $L_n^l$ число компонент связности краевой каустики в дополнении к объединению стратов и каустик коразмерности 2. Здесь имеется в виду, что у функций есть одна критическая и одновременно краевая точка. Все остальные выделенные точки различны, и значения в них различны.

**Лемма 3.2.** *Верно следующее тождество.*

$$L_n^l = l(n-1)K_n^{l-1}.$$

*Замечание* 1. В доказательствах этой части мы иногда изменяем множество граничных точек, В результате может получиться не М-морсификация. Тем не менее, после вертикального сдвига графика функции, обеспечивающего нулевую сумму всех граничных точек, а затем горизонтального сдвига графика, обеспечивающего обнуление значения в нуле, мы получаем М-морсификацию.

**Доказательство.** Рассмотрим вполне правильную М-морсификацию с $l-1$ краевой точкой и $n-1$ критической точкой. Заметим, что при действии на краевых точках группы перестановок мы получим $(l-1)!$ различных вполне правильных А-морсификаций из разных компонент связности, но с одним и тем же множеством краевых точек. Поставим в одну из $n-1$ критических точек новую краевую точку, а затем сделаем нормализацию замечания 1. При действии группы перестановок на краевые точки мы имеем $l!$ различных М-морсификаций. Следовательно набору симметричных $(l-1)!$ старых компонент связности ставится в соответствие набор $l!(n-1)$ новых. Отсюда следует утверждение леммы 3.2.

Дальше мы найдём количество компонент связности вполне правильных М-морсификаций, у которых одно из краевых значений превосходит все критические или наоборот все критические значения больше некоторого краевого. Компоненты, все критические значения М-морсификаций которых содержатся внутри некоторого отрезка с концами в краевых значениях, считаются дважды. Пусть $\hat{K}_n^l$ — число таких компонент.

**Лемма 3.3.** *Выполняется следующее тождество*

$$\hat{K}_n^l = 2lK_n^{l-1}$$

**Доказательство.** Пусть $n$ — чётно. Тогда каждая морсификация имеет две неограниченные ветви, уходящие на плюс бесконечность. Рассмотрим максимальное краевое значение. Если оно больше всех критических, то оно принимается в точке, принадлежащей одной из двух ветвей, описанных выше. Следовательно для каждой вполне правильной М-морсификации с $l-1$ краевой точкой мы имеем $l$ различных М-морсификаций, где одна из краевых точек $b_i : 1 \leq i \leq l$ на правой ветви, и значение в ней максимальное среди краевых и критических значений, порядок же остальных точек сохранён. Аналогичное рассуждение справедливо для левого положения точки. Следовательно $\hat{K}_{2n}^l = 2lK_{2n}^{l-1}$.

Если $n$ нечётно, то каждая М-морсификация имеет две ветви, направленные в разные стороны. Проведя аналогичные рассуждения, получаем доказательство леммы 3.3. Напомним, что некоторые компоненты мы считаем дважды.

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим компоненту связности множества вполне правильных М-морсификаций с $l+1$ краевой точкой и $n-3$ критическими. Пусть $f$ некоторая М-морсификация из этой компоненты. Выберем последнюю краевую точку $b_{l+1}$ и добавим к ней такую $\delta$-образную функцию, сосредоточенную в этой точке, чтобы новая М-морсификация имела критическую точку в $b_{l+1}$ со старым краевым значением (и отнормируем, как в замечании 1). Значение во второй соседней критической точке, образованной при прибавлении $\delta$-образной функции, является при этом наибольшим среди всех критических и краевых значений. М-морсификация имеет теперь $l$ краевых и $n-1$ критических точек. Таким же образом можно вычитать $\delta$-образную функцию. Следовательно каждой компоненте множества вполне правильных М-морсификаций с $l+1$ краевой и $n-3$ критическими точками мы ставим в соответствие 2 компоненты вполне правильных М-морсификаций с $l$ краевыми и $n-1$ критической точками.

Возьмём произвольную компоненту связности множества М-морсификаций краевой каустики с $n-1$ критической точкой и $l$ краевыми. Одна из краевых точек — критическая, а в остальных выделенных точках значения различны. Рассмотрим критическую точку, являющуюся краевой. Сдвинем краевую точку вправо или влево на малую величину. Если в критической точке локальный максимум, мы добавим $\delta$-образную функцию в этой точке (и отнормируем), в противном случае вычтем $\delta$-образную функцию. Критическое значение в точке изменится. Оно станет максимальным (минимальным). Для краевой точки возможны два положения в зависимости от того, в какую сторону мы сдвигали краевую точку. Мы получили две вполне правильные М-морсификации с $n-1$ критическими точками и $l$ краевыми. Следовательно каждой компоненте краевой каустики мы поставили в соответствие две компоненты вполне правильных М-морсификаций.

Наконец, рассмотрим компоненту вполне правильных М-морсификаций с $n-1$ критической точкой и $l$ краевой, причём существует критическое значение, превосходящее все краевые значения. Возьмём функцию из этой компоненты. Пусть $x_i$ точка с максимальным критическим значением. Найдём ближайшую к ней слева и справа специальные точки (критическую или краевую). Выберем из этих точек одну с большим значением. Проделаем операцию, обратную к прибавлению $\delta$-образной функции, которая "опустит" максимальное критическое значение до уровня соседней точки с большим значением. В результате возможны два варианта. Во-первых, мы можем получить функцию с двойной критической точкой. Заменим двойную точку на краевую $b_{l+1}$. Во втором случае новая функция будет иметь одну критическую краевую точку. Аналогично поступаем в случае минимального критического значения.

Тем самым мы доказали следующую формулу:

$$2K_n^l - \hat{K}_n^l = 2L_n^l + 2K_n^{l+1}.$$

Применим теперь леммы 3.2 и 3.3:

$$2K_n^l - 2lK_n^{l-1} = 2l(n-1)K_n^{l-1} + 2K_{n-2}^{l+1}.$$

Следовательно

$$K_{n-2}^{l+1} = K_n^l - nlK_n^{l-1}$$

Теорема доказана.

В заключение этой части мы укажем связь чисел $K_n^l$ с компонентами связности некоторых стратов каустики бифуркационной диаграммы критических точек и значений многочленов степени $2l+n$ (т. е. $A_{2l+n-1}$).

**Следствие 3.4.** *Рассмотрим все открытые страты каустики, соответствующие многочленам из М-области, $l$ пар критических точек которых, совпали некоторым образом общего положения. Количество компонент связности таких стратов равно $K_n^l/l!$.*

# 4 Следствия теоремы 3.1. Случай малого количества краевых точек

Подсчитаем числа $K_n^l$ для $l \leq 5$. В [1] В. И. Арнольдом доказано, что количество компонент связности вполне правильных М-морсификаций без границ равно числу Бернулли-Эйлера, то есть $K(A_{n-1}) = K_{n-1}$. Там же найдено $K(B_n)$ для мультикраевых особенностей $B_n$: $K(B_n) = K_{n+1}$. Итак: $K_n^0 = K_{n-1}$ и $K_n^1 = K_{n+1}$. Простым вычислением выводятся следующие равенства.

**Следствие 4.1.** *Верны следующие выражения для чисел $K_n^l$ через числа Бернулли-Эйлера.*

$$\begin{aligned}
&K_n^2 = K_{n+3} - (n+2)K_{n+1};\\
&K_n^3 = K_{n+5} - (3n+8)K_{n+3};\\
&K_n^4 = K_{n+7} - (6n+20)K_{n+5} + 3(n+2)(n+4)K_{n+3};\\
&K_n^5 = K_{n+9} - (10n+40)K_{n+7} + (15n^2+110n+184)K_{n+5}\\
&\dots
\end{aligned}$$

Экспоненциальной производящей функцией для чисел Бернулли-Эйлера является функция

$$K(t) = \tan(t) + \sec(t).$$

Найдём экспоненциальные производящие функции чисел $B_n^l$ при $l \leq 4$. Заметим, что в случае $l=0$ и $l=1$ производящей функцией можно считать $K(t)$, однако в наших обозначениях это будут

$$\begin{aligned}
&K_0(t) = \textstyle\int K(t)dt = -\ln(\cos t) + \ln(\tan(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})) + C \quad \text{и}\\
&K_1(t) = K'(t) = \tfrac{1+K^2}{2} = \tfrac{1+\sin t}{\cos^2 t} = \tfrac{1}{1-\sin t}
\end{aligned}$$

соответственно.

**Следствие 4.2.** *Экспоненциальными производящими функциями для $l = 2, 3, 4$ являются соответственно*

$$K_2(t) = K'''(t) - (tK(t))'' = \tfrac{3\sin t - t\cos t}{(1-\sin t)^2};$$
$$K_3(t) = (K'' - 3tK' + K)''' = \tfrac{3}{(1-\sin t)^3}\Big(\sin t(3\sin t + 7) - 3t\cos t(5 + \sin t)\Big);$$
$$K_4(t) = (K''' - 6tK'' + (3t^2 + 4)K' - 3tK)^{(4)} =$$
$$\Big(\tfrac{3t^2}{1-\sin t} - \tfrac{3t\cos t}{(1-\sin t)^2}(3 - \sin t) + \tfrac{3(2-\sin t)}{(1-\sin t)^2}\Big)^{(4)}.$$

Пусть

$$K(x, y) = \sum \frac{K_n^l}{l!n!} x^l y^n$$

— экспоненциальная производящая функция двух переменных.

**Следствие 4.3.** *Функция $K(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$K_x = (1 - 2x)K_{yy} - xyK_{yyy}.$$

Б. З. Шапиро предложил рассматривать экспоненциальные производящие функции двух переменных $R(x, y)$ и $S(x, y)$ отдельно для $R_n^l = K_{2n}^l$ и для $S_n^l = K_{2n-1}^l$. При этом порядок уравнения понижается.

**Следствие 4.4.** *Функции $R(x, y)$ и $S(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$R_x = (1 - 2x)R_y - 2xyR_{yy}$$
$$S_x = (1 - 2x)S_y - x(2y - 1)S_{yy}.$$

В завершение этой части опишем геометрическую структуру $B_n^2$ при помощи “картинок” в слоях векторного расслоения

$$\pi : (M\text{-}\textit{область}) \times \mathbb{R}^2 \to M\text{-}\textit{область}.$$

Каждому многочлену $f(x)$ соответствует кососимметрический многочлен от двух переменных вида $f(b_1) = f(b_2)$. Этот многочлен задаёт двойной краевой страт Максвелла и краевую каустику в слое. Граничная каустика и краевой страт Максвелла в слое задаются вертикальными и горизонтальными прямыми, образующими прямоугольную сетку, в которую “вписана” кривая $f(b_1) = f(b_2)$. Эти кривые довольно легко рисовать. Для примера приведём все схематические рисунки для особенностей $B_3^2$ и $B_4^2$ (см. рис. 1 и 2). Заметим, что кривая $f(b_1) = f(b_2)$ представляет собой объединение прямой $b_1 = b_2$ с некоторой кривой степени $n - 1$. В частности в случае $B_3^2$ получается объединение прямой и эллипса (см. рис. 1). В связи с этим возникает естественная проблема *описания всех комбинаторных типов таких рисунков для произвольного $n$.*

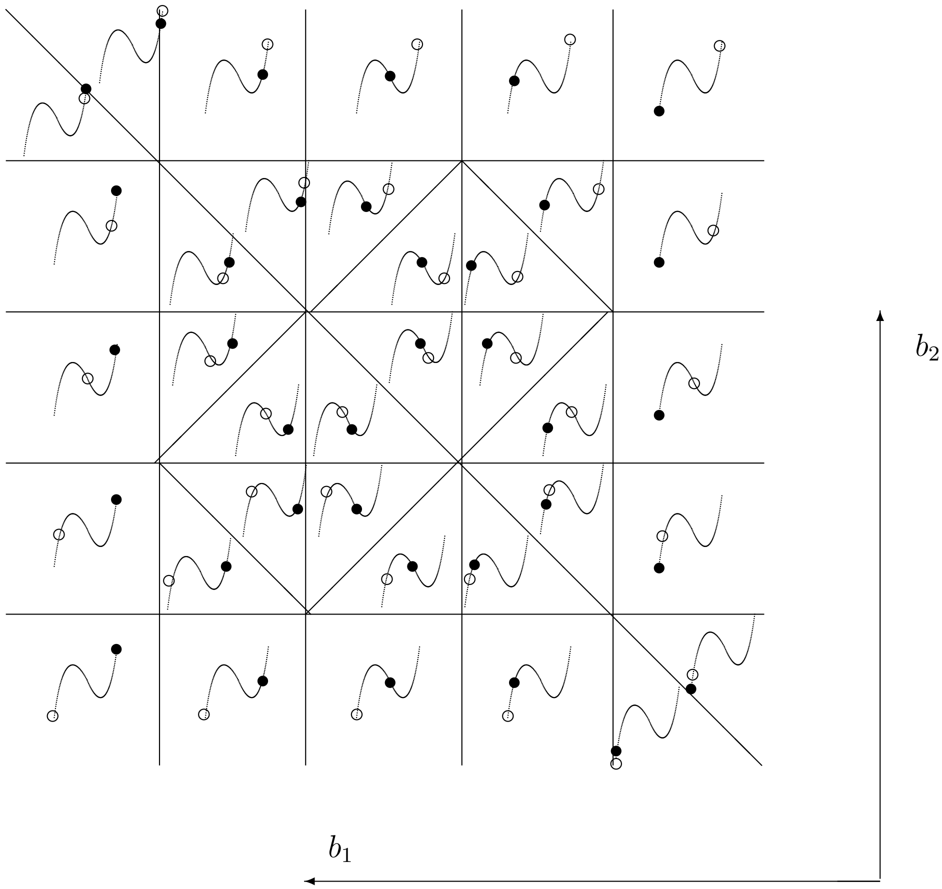


**Рисунок 1**. Слой общего положения M-области особенности $B_3^2$.

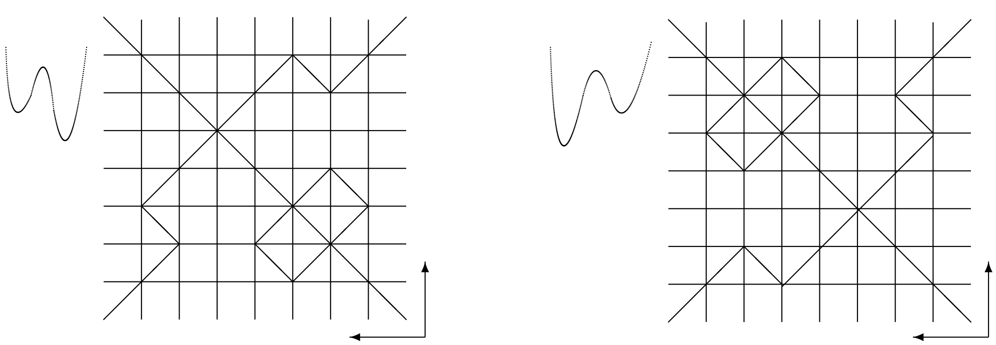

**Рисунок 2**. Слой общего положения M-области особенности $B_4^2$.

# 5 Следствия теоремы 3.1. Связь с числами Бернулли-Эйлера

В этой части мы выведем некоторое выражение для числа $K_n^l$, аналогичное соотношению следствия 4.1. Затем определим $K_n^l$ для отрицательных $n$, по модулю не меньших чем $l$. Через эти числа мы выпишем вытекающие соотношения на числа Бернулли-Эйлера.

**Следствие 5.1.** *Выражение для $K_n^l$ будет следующим:*

$$\begin{aligned}&K_n^l = K_{n+2l-1} - \\ &(\tfrac{l(l-1)}{2}n + \tfrac{(l+1)l(l-1)}{3})K_{n+2l-3} + \\ &l(l-1)(l-2)(l-3)(\tfrac{1}{8}n^2 + \tfrac{2l+1}{12}n + \tfrac{(l+1)(5l-2)}{90})K_{n+2l-5} + \\ &\sum_{k=4}^{[\frac{l}{2}]+1}\Bigg(\Big(\tfrac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!}\tfrac{l!}{(l-2k+2)!}\sum_{d=0}^{k-1}(p_{k,d}(l)n^d)\Big)K_{n+2(l-k)+1}\Bigg),\end{aligned}$$

*где $p_{k,d}(x)$ — многочлен степени $k-d-1$ с постоянными коэффициентами, зависящими только от $k$ и $d$.*

Доказательство проводится индукцией по $l$.

Явные формулы для коэффициентов многочленов $p_{k,d}(x)$ не известны на данный момент, тем не менее существует рекуррентный способ их вычисления. Приведем формулы многочленов при $d = k-1$, $d = k-2$ и $d = k-3$.

**Следствие 5.2.** *Верны следующие тождества*

$$\begin{aligned}&p_{k,k-1}(x) = 1;\\ &p_{k,k-2}(x) = \tfrac{(k-1)}{3}(2x+4-k);\\ &p_{k,k-3}(x) = \tfrac{(k-1)(k-2)}{90}\Big(20x^2 + (72-20k)x + (5k^2-39k+64)\Big).\end{aligned}$$

С помощью формулы следствия 5.1 можно получить соотношения на числа Бернулли-Эйлера. Рассмотрим примеры некоторых из них. Подставив $n = 1$ и $n = 2$ в формулу следствия 5.1, мы получим тождества приведённой ниже теоремы.

**Теорема 5.3.** *Выполняются следующие соотношения на числа Бернулли-Эйлера:*

$$K_{2l} - l! = K_{2l} - K_1^l = \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1}\Big(\tfrac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!}\tfrac{l!}{(l-2k+2)!}\sum_{d=0}^{k-1}p_{k,d}(l)\Big)K_{2(l-k+1)};$$

$$K_{2l+1} - 2^l l! = K_{2l+1} - K_2^l = \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1}\Big(\tfrac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!}\tfrac{l!}{(l-2k+2)!}\sum_{d=0}^{k-1}(p_{k,d}(l)2^d)\Big)K_{2(l-k+1)+1}.$$

Воспользуемся результатом следствия 4.1 для получения чисел $K_n^l$ при $n \leq 0$.

| $K_n^l$ | l=1 | l=2 | l=3 | l=4 | l=5 |
|---|---|---|---|---|---|
| n=0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| n=-1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| n=-2 | ? | 1 | 0 | 0 | 0 |
| n=-3 | ? | ? | 2 | 0 | 0 |
| n=-4 | ? | ? | ? | 6 | 0 |
| n=-5 | ? | ? | ? | ? | 24 |

Можно считать, $K_0^l$ — это количество компонент связности пространства многочленов степени 0 с $l$ краевыми точками, в которых многочлен принимает разные значения. В этом случае все точки прямой критические, и соответственно критическое значение совпадает с краевыми. Что обозначают числа для отрицательных $n$, автору не известно.

Заметим, что с некоторого момента в каждой строке стоят нули. Сформулируем это утверждение в следующей лемме.

**Предложение 5.4.** *Пусть $n \leq -1$, тогда $K_n^l = 0$ для $l > -n$, а $K_n^{-n} = (-n-1)!$. $K_0^l = 0$ при $l > 1$.*

**Доказательство.** Доказательство основано на теореме 3.1. Проведём индукцию по $n$.

$K_0^l = K_2^{l-1} - 2(l-1)K_2^{l-2} = (2l-2)!! - (2l-2)(2l-4)!! = 0$ при $l-2 \geq 0$.

$K_{-1}^l = K_1^{l-1} - (l-1)K_2^{l-2} = (l-1)! - (l-1)(l-2)! = 0$ при $l-2 \geq 0$.

$K_{-2}^l = K_0^{l-1} = 0$ при $l-1 \geq 2$.

В общем случае $K_n^l = K_{n+2}^{l-1} - (n+2)(l-1)K_{n+2}^{l-2}$, если $n < -2, l-2 \geq -2-n$. $K_n^{-n} = K_{n+2}^{-n-1} - (n+2)(-n-1)K_{n+2}^{-n-2} = 0 + (n+2)(n+1)(-n-3)! = (-n-1)!$.

Предложение доказано.

В заключение работы мы выпишем соотношения на числа Бернулли-Эйлера вытекающие из следствия 5.1 и предложения 5.4.

**Следствие 5.5.** *Пусть $n \leq 0$, $l > \max(1, -n)$, тогда*

$$0 = K_n^l = K_{n+2l-1} + \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1} \Big( \Big( \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{l!}{(l-2k+2)!} \sum_{d=0}^{k-1} (p_{k,d}(l) n^d) \Big) K_{n+2(l-k)+1} \Big).$$

*Если $l = -n$, то*

$$(l-1)! = K_n^{-n} = K_{l-1} + \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1} \Big( \Big( \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{l!}{(l-2k+2)!} \sum_{d=0}^{k-1} (p_{k,d}(l)(-l)^d) \Big) K_{l-2k+1} \Big).$$

В частности, при $l > 1$:

$$0 = K_0^l = K_{n+2l-1} + \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1} \Big( \Big( \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{l!}{(l-2k+2)!} p_{k,0}(l) \Big) K_{2(l-k)+1} \Big).$$

## Список литературы


[1] V. I. Arnold, *Bernoulli-Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics*, Duke Math. J., 63(2) (1991), 537–555.

[2] V. I. Arnold, *Springer numbers and morsification spaces*, J. Algebraic Geom., 1(2) (1992), 197–214.

[3] О. Карпенков, *Комбинаторика мультикраевых особенностей серии* $B_n^l$ *и числа Бернулли-Эйлера*, Функц. Ан. Прил. 36(1) (2002), 78–81.

[4] D. E. Knuth, T. E. Tabachnikov, *Computation of tangent numbers, Euler, and Bernoulli numbers*, Math. Comp. 21(1967), 663–688.

[5] N. Nielsen, *Traité elementaire des nombres de Bernoulli*, Gauthie-Villars, Paris, 1923.