Uniform Distribution Theory **9** (2014), no.2, 135–156

uniform distribution theory

COMMENT ÉCRIRE LES NOMBRES RELATIFS DANS UNE BASE QUI N'EST PAS ENTIÈRE

Anne Bertrand-Mathis

Résumé. Nous associons à chaque nombre réel $\beta > 1$ un système de numération qui nous permet d'écrire tout entier relatif m de $\mathbb{Z}$ dans la base $-\beta$: $m = a_1 K_k + \cdots + a_{k+1} K_0$ où $(K_n)_{n\geq 0}$ est une suite de numération telle que $\lim_{n\to\infty} {}^{K_{n+1}}/_{K_n} = -\beta$; les mots $a_1 \ldots a_{k+1}$ obtenus sont les mots ne commençant pas par 0 du langage d'un système dynamique qui se trouve être celui du $-\beta$ shift. Avec une relation d'ordre adaptée, la bijection entre les mots du langage et $\mathbb{Z}$ devient une bijection croissante. Les développements peuvent s'obtenir au moyen d'un algorithme glouton.

Nous définisssons aussi une substitution associée à ce système de numération.

Abstract

To each number $\beta > 1$ we associate a numeration system which allows us to write any number m of $\mathbb{Z}$ in base $-\beta$: $m = a_1 K_k + \cdots + a_{k+1} K_0$ where $(K_n)_{n\geq 0}$ is a specific sequence which satisfies $\lim_{n\to\infty} {}^{K_{n+1}}/_{K_n} = -\beta$; the words $a_1 \ldots a_{k+1}$ that we obtain are the words without leading 0 of the language of a dynamical system, the $-\beta$ shift. With an adapted order, the correspondance between the words of the language and $\mathbb{Z}$ becomes an increasing bijection.

We also define the corresponding $-\beta$ substitution.

Communicated by Pierre Liardet

1. Introduction

Tout entier naturel m s'écrit de façon unique en base 10 sous la forme $m = x_0 10^k + x_1 10^{k-1} + \cdots + x_k$ avec $x_i \in \{0, \ldots, 9\}$, $x_0 \neq 0$, et une condition sur les restes : pour tout $h \leq k$, $x_{k-h} 10^h + \cdots + x_0 < 10^{h+1}$.

Notons L_{10} l'ensemble $\{x_0 \ldots x_k\,;\, k = 1, 2, 3, \ldots,\, x_0 \neq 0,\, x_i \in \{0, \ldots, 9\}\}$ et munissons le de la relation d'ordre lexicographique usuelle : $x_0 \ldots x_k < y_0 \ldots y_h$

2010 Mathematics Subject Classification: 05A15.

Keywords: Numeration ; Number Theory ; Ergodic Theory ; Dynamical Systems ; Combinatorics ; Substitutions.

si $k < h$ ou $k = h$ et il existe r avec $x_0 \dots x_r = y_0 \dots y_r$ et $x_{r+1} < y_{r+1}$. Alors l'application f de L_{10} dans $\mathbb{N}^\star$,

$$f\,(x_0 \dots x_k) = x_0 10^k + \dots + x_k$$

est une bijection croissante de L_{10} sur $\mathbb{N}^\star$.

Ce procédé se généralise à toutes les bases réelles $\beta > 1$: étant donné un nombre réel $\beta > 1$ on peut écrire les entiers naturels en base β de façon raisonnable ; en 1972 Zeckendorf [18] a donné un algorithme fournissant le développement d'un entier m dans la base $(1+\sqrt{5})/2$:

$$m = x_1 G_k + x_2 G_{k-1} + \dots + x_{k+1} G_0$$

où $(G_n)_{n \geq 0}$ est la suite de Fibonacci $G_0 = 1$, $G_1 = 2$ et pour $k \geq 2$, $G_k = G_{k-1} + G_{k-2}$; la suite finie $x_1 \dots x_{k+1}$ est obtenue au moyen de l'algorithme glouton, les x_i prennent les valeurs 0 ou 1 et dès que $x_i = 1$, $x_{i+1} = 0$; ces suites sont les mots ne commençant pas par 0 du langage d'un système dynamique symbolique dit Système de Fibonacci. Ceci peut s'étendre à toute base $\beta > 1$ à l'aide du β-shift [3] ; nous cherchons dans ce travail à écrire les entiers relatifs dans la base $-\beta$.

Grünwald [7] a montré que tout entier $m \in \mathbb{Z}$ peut s'écrire comme suit en base -2 : $m = x_1(-2)^k + x_2(-2)^{k-1} + \dots - 2x_k + x_{k+1}$ où $x_i \in \{0,1\}$; 0 et 1 représentent 0 et 1,10 et 11 représentent -2 et -1,$100, 101, 110, 111$ représentent 4 , 5 , 2 , 3 ; avec un ordre adapté (voir plus loin) l'application entre mots et nombres devient une application croissante. Le même procédé vaut pour toute base $-b$ où $b \in \mathbb{N}$. Nous appuyant sur le $-\beta$ shift introduit par Ito et Sadahiro [8] nous allons décrire au *Théorème* 1 du paragraphe 4 un système de numération des entiers relatifs dans la base $-\beta$ pour tout $\beta > 1$; ce système est analogue à la fois à celui de Grünwald et à celui décrit dans [3]. Son énoncé nécessite quelques définitions préalables.

2. Langages et Systemes Dynamiques.

Nous appelons alphabet A un ensemble fini A ; ses éléments sont appelés lettres ; une suite finie de lettres est appelée mot ; la longueur d'un mot u est le nombre de lettres qu'il contient, nous la noterons $\mid u \mid$. L'ensemble des mots sur A muni du produit de concaténation (le produit de $a_1 \dots\dots a_k$ et $b_1 \dots b_k$ est $a_1 \dots a_k b_1 \dots b_k$) est le monoide libre A^* ; le mot vide est noté ε , sa longueur est nulle ; a^k est le mot contenant k fois la lettre a et a^0 est le mot vide ; l'ensemble des mots infinis $x_1 x_2 x_3 \dots$ sur A est noté $\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$. Etant donné un mot w sur A, nous noterons w^n le produit de concaténation de n mots égaux à w, et w^∞ le produit infini $wwwww\dots$. Un mot de la forme vw^∞ est dit *ultimement périodique* ; un mot *purement périodique* est un mot de la forme w^∞. Un mot fini a est dit *facteur* d'un mot fini ou infini b s'il existe deux mots u et v tels que $b = uav$.

On munit l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit de la topologie discrète sur A et du shift $T : (x_n)_{n\geq 1} \mapsto (x_{n+1})_{n\geq 1}$; un *système dynamique symbolique* [4] est un sous-ensemble fermé T-invariant de $A^{\mathbb{N}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) ; s'il est pris dans $A^{\mathbb{N}}$ il est dit unilatéral et s'il est pris dans $A^{\mathbb{Z}}$ il est dit bilatéral. Etant donné un système dynamique symbolique X nous appelons *langage du système* l'ensemble L_X des mots a qui sont facteurs d'au moins un mot infini de X. Un langage est le langage associé à un système dynamique symbolique si et seulement si il est *factoriel* (il contient tous ses facteurs) et *prolongeable* (pour tout $a \in L_X$ on peut trouver deux lettre b c telles que $bac \in L_X$) ; un langage est dit *transitif* si dès que a et b sont dans L_X on peut trouver un mot fini $c \in X$ tel que $acb \in L_X$ et dans ce cas nous disons que le système est transitif. L'entropie h d'un système dynamique symbolique transitif est la limite lorsque n tend vers l'infini de $\frac{\ln w_n}{n}$ où w_n désigne le nombre de mots de longueur n du langage associé. Lorsque $\lim_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$ existe cette limite est alors $\ln h$.

A un même langage correspondent un système bilatéral et un système unilatéral ; ils ont des propriétés très voisines. Ito et Sadahiro définissent le $-\beta$ shift comme un système bilatéral, nous considèrerons sa version unilatérale, ceci est sans conséquence.

3. Le $-\beta$ développement des nombres de I_β et le $-\beta$ shift.

3.1. Le $-\beta$ shift et l'ordre alterné.

Etant donné un nombre réel x nous désignerons par $[x]$ et $\{x\}$ ses parties entière et fractionnaire.

L'ordre alterné sur l'ensemble des suites : Soit $A = \{0, 1, \dots, [\beta]\}$ muni de la relation d'ordre usuelle $(0 < 1 < \dots < [\beta])$; Soit E l'ensemble des suites infinies $x_1x_2x_3\dots$ sur $\{0, \dots, [\beta]\}$; définissons un "ordre alterné " sur E comme suit :

$$(x_n)_{n\geq 1} \prec (y_n)_{n\geq 1} \iff \exists k \geq 1, \forall i < k, x_i = y_i \; et \; (-1)^k(x_k - y_k) < 0$$

La relation d'ordre large sera notée $\preceq$.

Les suites $(d_n)_{n\geq 1}$, $(d_n^*)_{n\geq 1}$ ***et la transformation*** $T_{-\beta}$.

Soit $b = \beta$ un nombre entier > 1 ; nous poserons $(d_n)_{n\geq 1} = b^\infty$ et $(d_n^*)_{n\geq 1} = ((b-1)0)^\infty$.

Soit $\beta > 1$ un nombre réel n'appartenant pas à $\mathbb{N}$; nous allons définir deux suites $(d_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n^*)_{n\geq 1}$ attachées à β à l'aide de la transformation $T_{-\beta}$; soit I_β l'intervalle semi ouvert de longueur 1 $[\frac{-\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}[$ et posons pour tout nombre réel x appartenant à I_β

$$T_{-\beta}(x) = -\beta x - \left[-\beta x + \frac{\beta}{\beta+1}\right]$$

$T_{-\beta}(x)$ est aussi l'unique réel congru à $-\beta x$ modulo un dans l'intervalle I_β, lequel est semi ouvert et de longueur 1. La transformation $T_{-\beta}(x)$ envoie I_β dans lui même et a pour entropie $\ln \beta$.

Ito et Sadahiro [8] ont montré que tout nombre réel x appartenant à I_β peut s'écrire de façon unique et de façon algorithmique

$$x = -\frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} - \frac{x_3}{\beta^3} + \cdots + \frac{x_n}{(-\beta)^n} + \cdots$$

où pour tout i, $x_i = \left[-\beta T_{-\beta}^{i-1}(x) + \frac{\beta}{\beta+1}\right]$. Nous appelons $-\beta$ développement du réel x appartenant à I_β la suite $d_{-\beta}(x) = (x_i)_{i\geq 1}$; les x_i sont des entiers compris entre 0 et $[\beta]$. L'algorithme appliqué à $\frac{-\beta}{\beta+1}$ fournit une suite $(d_n)_{n\geq 1}$ appelée "$-\beta$ - développement de $\frac{-\beta}{\beta+1}$" ; cette suite joue un role central dans notre théorie ; on a $\frac{-\beta}{\beta+1} = -\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} - \frac{d_3}{\beta^3} + \cdots$, et pour tout $k \geq 1$, $-\frac{d_{k+1}}{\beta} + \frac{d_{k+2}}{\beta^2} - \frac{d_{k+3}}{\beta^3} + \cdots \in I_\beta$. De plus $\frac{1}{\beta+1} = +\frac{d_1}{\beta^2} - \frac{d_2}{\beta^3} + \frac{d_3}{\beta^4} - \cdots$. Nous aurons besoin d'une précision sur la suite $(d_n)_{n\geq 1}$:

Lemme 1. *soit $\beta > 1$ un nombre réel, et $(d_n)_{n\geq 1}$le $-\beta$ développement de $\frac{-\beta}{\beta+1}$; la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas etre égale à $(d_1 \dots d_{2p+1})^\infty$ avec $d_{2p+1} = 0$.*

Preuve : Sinon on aurait $-\frac{d_{2p+1}}{\beta} + \frac{d_{2p+2}}{\beta^2} - \cdots \notin I_\beta$ car cela vaut $\frac{1}{\beta+1}$ qui est l'extrémité exclue de l'intervalle semi ouvert I_β $\diamond$.

Nous aurons aussi besoin d'une suite auxiliaire :

Définition 1. *Soit $\beta > 1$ un nombre réel, et $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de $\frac{-\beta}{\beta+1}$ (ou la suite $(b\,(0)^\infty)$ si β est un entier b) ; nous appellerons suite caractéristique de $-\beta$ la suite $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ ainsi définie :*

- Lorsque $(d_n)_{n\geq 1}$ n'est pas purement périodique de longueur impaire,

$(d_n^\star)_{n\geq 1} = (d_n)_{n\geq 1}$

- Lorsque $(d_n)_{n\geq 1} = (d_1 \dots d_{2p+1})^\infty$ est purement périodique de longueur impaire $2p+1$, on pose $(d_n^\star)_{n\geq 1} = (d_1 \dots d_{2p}(d_{2p+1} - 1)0)^\infty$ qui est de période $2p+2$; si $\beta = b \in \mathbb{N}$, on obtient $((b-1)\,0)^\infty$.

On a alors $(d_n)_{n\geq 1} \prec (d_n^\star)_{n\geq 1}$.

Le lemme 1 nous assure que $d_{2p+1}-1$ est bien ≥ 0. La période $2p+1$ est bien sur choisie minimale dans cette définition.Par ailleurs $(d_n^\star)_{n\geq 1}$est encore une β-représentation de $\frac{-\beta}{\beta+1}$: $\frac{-\beta}{\beta+1}=-\frac{d_1^\star}{\beta}+\frac{d_2^\star}{\beta}-\cdots$

Lorsque $(d_n)_{n\geq 1}=(d_1\dots d_{2p+1})^\infty$ est purement périodique de longueur impaire $2p+1$, nous dirons par abus de langage que nous sommes dans le cas périodique impair.

Proposition 1. *(Ito-Sadahiro)* [8] *: Soit $\beta>1$ un nombre réel, soit $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de $\frac{-\beta}{\beta+1}$; alors pour tout $k\geq 1$:*

$$d_1d_2d_3\ldots\preceq d_kd_{k+1}d_{k+2}\ldots\quad(1)$$

et de même

$$d_1^\star d_2^\star d_3^\star\ldots\preceq d_k^\star d_{k+1}^\star d_{k+2}^\star\ldots\quad(1bis)$$

Si l'on n'est pas dans le cas périodique impair une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est le $-\beta$ développement d'un nombre réel $x\in I_\beta$ si et seulement si pour tout $k\geq 1$ $x_k\in\{0,1,\ldots,d_1\}$ et :

$$d_1d_2d_3\ldots\preceq x_kx_{k+1}\ldots\prec 0d_1d_2\ldots$$

et une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ appartient au $-\beta$shift si et seulement si

$$d_1d_2d_3\ldots\preceq x_kx_{k+1}\ldots$$

Dans le cas périodique impair où la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est de la forme $(d_1\ldots d_{2p+1})^\infty$ où p est choisi minimal une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est le $-\beta$ développement d'un nombre réel $x\in I_\beta$ si et seulement si pour tout $k\geq 1$ $x_k\in\{0,1,\ldots,d_1\}$ et :

$$d_1d_2d_3\ldots\preceq x_kx_{k+1}\ldots\prec(0d_1d_2\ldots d_{2p}(d_{2p+1}-1))^\infty$$

elle appartient au $-\beta$shift choisi par Sadahiro si et seulement si pour tout $k\geq 1$

$$d_1d_2d_3\ldots\preceq x_kx_{k+1}\ldots\preceq(0d_1d_2\ldots d_{2p}(d_{2p+1}-1))^\infty$$

Le choix du système dynamique $X_{-\beta}$.

Nous utiliserons la même version du $-\beta$shift que Sadahiro dans le cas non périodique impair et une version un peu différente dans le cas périodique impair.

Dans le cas périodique impair on vérifie aisément que dès que le mot $(d_1 \dots d_{2p+1})$ apparait dans une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ du $-\beta$shift de il est suivi de $(d_1 \dots d_{2p+1})^\infty$; si l'on interdit le mot $(d_1 \dots d_{2p+1})$ on élimine les mots finissant par $(d_1 \dots d_{2p+1})^\infty$ et on conserve tous les autres. Mais les mots ne contenant pas $(d_1 \dots d_{2p+1})$ se trouvent dans le $-\beta$shift au sens de Sadahiro si et seulement si pour tout k

$$d_1^\star d_2^\star d_3^\star \dots \preceq x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots$$

et ceci nous amène à choisir ainsi :

Définition 2 : le $-\beta$shift. *Soit β un nombre réel > 1, soit $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de $\frac{-\beta}{\beta+1}$ et soit $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ la suite caractéristique ; nous appellerons $-\beta$shift $X_{-\beta}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que pour tout $k \geq 1$, $x_k \in [0, d_1]$ et :*

$$d_1^\star d_2^\star d_3^\star \dots \preceq x_k x_{k+1} \dots \quad (2)$$

c'est à dire, dans le cas non périodique impair :

$$d_1 d_2 d_3 \dots \preceq x_k x_{k+1} \dots$$

et dans le cas périodique impair;

$$d_1^\star d_2^\star d_3^\star \dots \preceq x_k x_{k+1} \dots$$

Muni du shift T : $(x_n)_{n\geq 1} \longmapsto (x_{n+1})_{n\geq 1}$, $X_{-\beta}$ est un fermé $T-$invariant de $\{0, \dots [\beta]\}$, c'est un système dynamique symbolique.

Nous noterons $L_{-\beta}$ le langage de ce sytème dynamique et $\mathcal{L}$ l'ensemble des mots de $L_{-\beta}$ ne commençant pas par un 0 ($\mathcal{L}$ contient le mot vide ϵ dont la longueur est 0).

C'est le langage $\mathcal{L}$ associé à ce système dynamique qui nous servira à écrire les nombres relatifs dans la base $-\beta$.

Tout réel x de I_β possède un unique $-\beta$ développement dans le système choisi par Sadahiro ; certains x ont un développement qui finit par $\left(d_1 \dots d_{2p+1}\right)^\infty$ qui n'appartient pas au système choisi par nous (mais on trouve tout de même dans notre système $X_{-\beta}$ une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $x = -\frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} - \dots + \frac{x_n}{(-\beta)^n} + \cdots$, qui n'est pas obtenue via l'algorithme).

Remarque. Si $\beta = b \geq 2$ est un entier le $-b$ développement de ${}^{-b}/_{b+1}$ est $(b)^\infty$ et la suite $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ est $((b-1)\,0)^\infty$; les $b-$développements sont alors les suites sur $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Le système dynamique est l'ensemble des suites sur $\{0, \dots, (b-1)\}$, le langage contient alors tous les mots sur $\{0, \dots, (b-1)\}$.

Remarque concernant le cas périodique impair : notre choix est cohérent avec la théorie faite par Grünwald dans le cas des entiers. Examinons par exemple le cas $\beta = 2$; $(d_n)_{n\geq 1}$ est égale à $(2)^\infty$ et $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ est égale à $(10)^\infty$; nous choisissons pour système l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que $101010\ldots \preceq x_k x_{k+1}\ldots$ qui est l'ensemble de toutes les suites de 0 et 1 ; Grünwald utilise l'ensemble des mots sur 0 et 1 alors que dans le système choisi par Sadahiro

$$222222\cdots \preceq x_k x_{k+1}\cdots \preceq 010101\cdots$$

figurent tous les mots $m2^\infty$ où m est un mot sur $\{0,1\}$.

Lemme 2. *Soit H_n le nombre de mots de longueur n de $L_{-\beta}$; alors H_n est égal au nombre de mots de $\mathcal{L}$ de longueur inférieure ou égale à n.*

Preuve : On vérifie aisément que si u est un mot de $\mathcal{L}$ (ou de $L_{-\beta}$) le mot $0^h u$ est encore dans $L_{-\beta}$ puisque $0 < d_1$ $\diamond$.

Proposition 2. [6] *L'entropie du $-\beta$ shift ainsi que Sadahiro le définit est égale à $ln\beta$.*

Lemme 3. *Dans le cas périodique impair la définition de $X_{-\beta}$ diffère sensiblement de celle de Sadahiro mais l'entropie de $X_{-\beta}$ est encore égale à $ln\beta$* .

Preuve : Le $-\beta$ shift ainsi que Sadahiro le définit est intrinsèquement ergodique [9] ; son unique mesure maximale est ergodique et donc presque tous les points sont génériques ; si le mot $(d_1\ldots d_{2p+1})$ apparait il est suivi de $(d_1\ldots \ldots d_{2p+1})^\infty$ et ne peut etre générique : par suite la fréquence du mot $(d_1\ldots d_{2p+1})$ est nulle dans presque tous les points et la mesure maximale est portée par l'ensemble des suites ne contenant pas ce mot (voir [4] ou [11]pour les aspects liés à la théorie ergodique) $\diamond$.

Remarque. Si β est inférieur à ${}^{(1+\sqrt{5})}/_{2}$ le langage L_β n'est pas transitif ; tous les mots 0^h sont par exemple dans le langage alors que une fois que 1 est apparu dans la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ seul 00 peut apparaitre et jamais 000 ; ce phénomène a d'intéressantes conséquences sur les mesures invariantes sur le $-\beta$ shift [8] [9] mais n'affecte pas notre système de numération.

L'ordre alterné sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des mots finis ne commençant pas par 0

Etant donné deux mots $u = u_1\ldots u_p$ et $v = v_1\ldots v_q$ tels que u_1 et v_1 sont tous deux différents de 0 nous dirons que $u \prec v$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

p est pair et q est impair : $2321 \prec 100$

p et q sont pairs et $p > q$: $2321 \prec 45$

p et q sont impairs et $p < q$: $232 \prec 11111$

$p = q = 2k$ et il existe h tel que $0 \leq h < 2k$, $u_1u_2 \dots u_{h-1} = v_1v_2 \dots v_{h-1}$ et $(-1)^h(u_h - v_h) < 0$: $563140 \prec 463140 \prec 473140 \prec 472222$

$p = q = 2k + 1$ et il existe h avec $0 \leq h < 2k + 1$ tel que $u_1u_2 \dots u_{h-1} = v_1v_2 \dots v_{h-1}$ et $(-1)^h(u_h - v_h) > 0$: $341 \prec 342 \prec 542 \prec 532$

Le mot vide ϵ est inférieur à tout mot de longueur impaire et supérieur à tout mot de longueur paire (c'est lui qui sert à exprimer le nombre 0) et nous considérons qu'il appartient à $\mathcal{L}$, sa longueur est nulle.

Remarque : une suite de mots croit lorsque le chiffre de droite croit, décroit lorsque le deuxième chiffre le plus à droite croit, croit lorsque le troisième chiffre croit et ainsi de suite.

Etant donné un mot u de longueur paire, $a \preceq b$ implique $ua \preceq ub$; si u est de longueur impaire $a \preceq b$ implique $ub \preceq ua$.

Lemme 4. *L'ordre alterné est un ordre total sur $\mathcal{L}$; les intervalles ouverts, fermés, semi ouverts sont donc définis sur $\mathcal{L}$.*

4. La numération des entiers relatifs en base $-\beta$.

Théorème 1. *Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1, $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de ${}^{-\beta}/_{\beta+1}$, $X_{-\beta}$ le $-\beta$ shift défini à la proposition 2, $L_{-\beta}$ le langage associé, $\mathcal{L}$ l'ensemble des mots ne commençant pas par 0 de $L_{-\beta}$ muni de l'ordre alterné sur les mots finis.*

Soit pour tout $n \geq 1$ H_n le nombre de mots de longueur n de $L_{-\beta}$ et $H_0 = 1$; soit $K_n = (-1)^n H_n$. Alors

1) $\lim_{n\to\infty} {}^{K_{n+1}}/_{K_n} = -\beta$ et $\lim_{n\to\infty} {}^{H_{n+1}}/_{H_n} = \beta$; $(K_n)_{n\geq 0}$ est dite suite de numération de $-\beta$.

2) Tout entier relatif $m \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $m = a_1K_{k-1} + a_1K_{k-2} + \cdots + a_kK_0$ où $a_1 \dots a_k$ est un mot appartenant à $\mathcal{L}$. Inversement tout mot $a_1 \dots a_k \in \mathcal{L}$ est le développement du nombre relatif $a_1K_{k-1} + \cdots + a_kK_0$.

Si m est un entier positif le nombre de chiffres k est impair et si m est négatif le nombre de chiffres est pair.

3) L'application f de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{Z}$:

$$f(x_1 \dots x_n) = x_1K_{n-1} + x_2K_{n-2} + \cdots + x_{n-1}K_1 + x_nK_0$$

est une bijection strictement croissante (l'image du mot vide ϵ est la somme vide 0).

Le développement $a_1 \dots a_k$ s'obtient par l'algorithme glouton décrit plus bas.

4) Lorsque $(d_n)_{n\geq 1}$n'est pas périodique de période impaire la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est définie par $K_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$K_n = -d_1K_{n-1} + (d_1 - d_2)K_{n-2} + (d_2 - d_3)K_{n-3} + \cdots + (d_{n-1} - d_n)K_0 + (-1)^n$$

Sinon on utilise la suite $(d^\star_n)_{n\geq 1} = (d_1 \ldots d_{2p}(d_{2p+1} - 1)0)^\infty$ au lieu de $(d_n)_{n\geq 1}$.

A la place des formules utilisant les K_n on peut utiliser les formules $m = a_1H_{2k} - a_2H_{2k-1} + a_3H_{2k-1} - \cdots - a_{2k}H_1 + a_{2k+1}H_0$ pour les entiers positifs et $m = -a_1H_{2k-1} + a_2H_{2k-2} - \cdots - a_{2k-1}H_1 + a_{2k}H_0$ pour les entiers négatifs.

Les suites $(H_n)_{n\geq 0}$ s'obtiennent selon la méthode suivante :

Proposition 3 *: Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1, soit $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de ${}^{-\beta}/_{\beta+1}$, et soient $X_{-\beta}$ le $-\beta$ shift décrit à la définition 2, $L_{-\beta}$ le langage associé, et H_n le nombre de mots de longueur n de $L_{-\beta}$.*

La suite $(H_n)_{n\geq 0}$ est caractérisée par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} H_{2k+1} &= d_1H_{2k} + (d_1 - d_2)H_{2k-1} - (d_2 - d_3)H_{2k-2} + \cdots \\ &\quad +(d_{2k-1} - d_{2k})H_1 - (d_{2k} - d_{2k+1)}H_0 + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{2k} &= d_1H_{2k-1} + (d_1 - d_2)H_{2k-2} - (d_2 - d_3)H_{2k-3} + \cdots \\ &\quad -(d_{2k-2} - d_{2k-1})H_{1+}(d_{2k-1} - d_{2k})H_0 + 1 \end{aligned}$$

et $H_0 = 1$.

Si $(d_n)_{n\geq 1} = (d_1d_2 \ldots d_{2p}d_{2p+1})^\infty$ est périodique de période impaire on remplace $(d_n)_{n\geq 1}$ dans les formules par la suite caractéristique $(d^*_n)_{n\geq 1}$ pour obtenir H_n.

De plus $\lim_{n\to\infty} {}^{H_{n+1}}/_{H_n} = \beta$.

Définition 3. *On pose pour tout $k \geq 0$*

$$M_{2k+1} = d_1H_{2k} - d_2H_{2k-1} + d_3H_{2k-2} - \cdots - d_{2k}H_1 + d_{2k+1}H_0 = f\,(d_1 \ldots d_{2k+1})$$

$$-N_{2k} = -d_1H_{2k-1} + d_2H_{2k-2} - d_3H_{2k-3} + \cdots - d_{2k-1}H_1 + d_{2k}H_0 = f\,(d_1 \ldots d_{2k})$$

et $N_0 = 0$.

Si $(d_n)_{n\geq 1} = (d_1 \ldots d_{2p+1})^\infty$ est périodique de période impaire on remplace $(d_n)_{n\geq 1}$ par $(d^\star_n)_{n\geq 1} = (d_1d_2 \ldots d_p(d_{p+1} - 1)0)^\infty$ dans toutes les formules.

Proposition 4. *Les suites $(M_{2k+1})_{k\geq 0}$ et $(N_{2k})_{k\geq 0}$ sont deux suites positives strictement croissantes et pour tout $k \geq 0$:*

$H_{2k} = N_{2k} + M_{2k-1} + 1 = card\,[-N_{2k}, M_{2k-1}]$

$H_{2k+1} = N_{2k} + M_{2k+1} + 1 = card\,[-N_{2k}, M_{2k+1}]$.

Proposition 5.l'algorithme glouton. *Etant donné un entier relatif* m *, on recherche l'unique intervalle* $[-N_{2k+2}, -N_{2k}[$ *ou* $]M_{2k-1}, M_{2k+1}]$ *qui contient* m *; si c'est* $]M_{2k-1}, M_{2k+1}]$ *(*m *est positif) on écrit* $m = x_1 H_{2k} + r_1$*,* $r_1 \in [-N_{2k}, M_{2k-1}]$ *; comme* $H_{2k} = card([-N_{2k}, M_{2k-1}]$ *,* (x_1, r_1) *est unique et* $| r_1 | < | m |$ *; (si* m *se trouve dans* $[-N_{2k+2}, -N_{2k}]$ *on écrit* $m = -x_1 H_{2k+1} + r_1$ *avec* $r_1 \in [-N_{2k}, M_{2k+1}]$ *) ; ensuite on continue avec* r_1 *au lieu de* x_1 *et on détermine* (x_2, r_2) *; la suite* $| r_h |$*est strictement décroissante et donc le nombre d'itérations est fini ; à la fin du processus (avec un reste* r_{2k} *dans* $[0, M_1] = [-N_0, M_1]$ *et le chiffre* x_n *), le développement* $x_1 \dots x_n$ *de* m *est obtenu ; pour cet entier* m *positif le nombre de chiffres est impair ; pour un* m *négatif on applique un processus similaire et l'algorithme fournit un nombre pair de chiffres.*

La numération des entiers en base négative $-\beta$ est absolument similaire à la numération en base positive β (qui s'appuie sur le $\beta-$shift et fournit une application croissante entre le $\beta-$langage et $\mathbb{N}$).

Pour une meilleure compréhension du texte les résultats ont été regroupée au sein des Propositions 3, 4 et 5 et du Théorème 1 mais les démonstrations de ces quatre énoncés sont très fortement imbriquées. Le point central est le fait que f est une bijection croissante.

Avanr de démontrer ces résultats nous allons étudier les intervalles de $\mathcal{L}$.

5. Plus grand mot et plus petit mot dans certains intervalles de $\mathcal{L}$

Le langage $L_{-\beta}$ du $-\beta$ shift est l'ensemble de tous les mots $x_1 \dots x_p$ qui sont facteur gauche d'un mot infini $x_1 x_2 \dots x_p x_{p+1} \dots$ tel que pour tout $i \geq 1$ (qu'ils commencent ou non par $x_i = 0$)

$$(3)\ \ d_1 d_2 \dots d_{k-i} \dots \preceq x_i \dots x_k \dots$$

(dans le cas périodique impair β on remplace $(d_1 \dots d_{2p+1})^\infty$ par $(d^*_n)_{n\geq 1} = (d_1 \dots d_{2p}(d_{2p+1} - 1)0)^\infty$ dans les conditions (3).

Les mots finis de $L_{-\beta}$ seront dits *admissibles* .

Nous appellerons *successeur* d'un mot $w \in \mathcal{L}$ le plus petit mot de $\mathcal{L}$ strictement supérieur à w ; nous dirons que deux intervalles I et J de $\mathcal{L}$ sont *contigus* si $I \cap J$ est vide et si $I \cup J$ est un intervalle ; nous définirons de même les intervalles contigus de $\mathbb{Z}$; si p est le successeur de m et $a \leq p < b$ les intervalles $[a, m[$ et $[p, b[$ sont contigus.

Les trois lemmes qui suivent nous serviront par la suite :

Lemme 5. *Soit β un réel >1, et soit $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de $-\beta/\beta+1$. Soit T_n l'ensemble des mots admissibles de longueur $\leq n$ ne commençant pas par un 0 (nous convenons que T_n contient le mot vide qui est de longueur 0) ; alors (utiliser $(d^\star_n)_{n\geq 1}$ dans le cas périodique impair) :*

Le mot maximal de T_{2k+1} est $d_1 d_2 \dots d_{2k+1}$.

Le mot minimal de T_{2k} est $d_1 d_2 \dots d_{2k}$.

Soit $S_0 = \{\epsilon\}$ et soit S_n l'ensemble des mots admissibles de longueur exactement n ne commençant pas par 0 :

Le mot maximal de $S_{2k+1} = T_{2k+1} \setminus T_{2k}$ est $d_1 d_2 \dots d_{2k+1}$.

Le mot minimal de S_{2k+1} est $1 d_1 d_2 \dots d_{2k}$ et il est le successeur du mot maximal $d_1 d_2 \dots d_{2k-1}$ de S_{2k-1}.

Le mot maximal de $S_{2k} = T_{2k} \setminus T_{2k-1}$ est $1 d_1 d_2 \dots d_{2k-1}$ et son successeur est le mot minimal $d_1 d_2 \dots d_{2k-2}$ de S_{2k-2}.

Le mot minimal de S_{2k} est $d_1 d_2 \dots d_{2k}$.

Preuve : immédiate avec la définition du langage $L_{-\beta}$ et de l'ordre alterné. Ces formules restent valides lorsque $d_1 = 1$ $\diamond$.

Lemme 6. *T_n et S_n sont* des intervalles de $\mathcal{L}$ *; T_n est la réunion disjointe des $n+1$ intervalles S_i, $i = 0, \dots, n$; les S_i sont des intervalles contigus : S_0 et S_1 sont contigus, S_1 et S_3 sont contigus, et plus généralement S_{2k-1} et S_{2k+1} sont contigus, S_{2k+1} étant à droite de S_{2k-1} (nous voulons dire par là que tout élément de S_{2k+1} est plus grand que tout élément de S_{2k-1}).*

S_0 et S_2 sont contigus, S_2 et S_4 aussi, et plus généralement S_{2k+2} et S_{2k} sont contigus, S_{2k+2} se trouvant à gauche de S_{2k} (nous voulons dire par la que tout élémént de S_{2k+2} est plus petit que tout élément de S_{2k}).

Ainsi T_n se présente ainsi :

$$S_{2k+2}\ S_{2k}\ S_{2k-2}\ \dots\ S_2\ S_0\ S_1\ S_3\ \dots\ S_{2k-1}\ S_{2k+1}$$

Lemme 7. *Soit $n > 0$ un entier fixé ; pour $x \in \{1, \dots, d_1\}$ soit J_x l'ensemble des mots de S_n commençant par x ; alors S_n est la réunion disjointe des ensembles J_x, lesquels sont des intervalles contigus de $\mathcal{L}$.*

Pour tout n, J_1 et J_2 sont contigus, J_2 et J_3 sont contigus et ainsi de suite jusqu'à J_{d-1} et J_d.

S_n se présente ainsi pour n pair

$$J_1\ J_2\ \dots\ J_{d-1}\ J_d$$

et pour n impair

$$J_d \; J_{d-1} \; \dots \; J_2 \; J_1$$

De plus pour n impair :

le mot maximum de J_x est $x0d_1d_2\dots d_{n-2}$ sauf si $x = d_1$ auquel cas c'est $d_1d_2\dots d_n$.

le mot minimal de J_x est $xd_1d_2\dots d_{n-1}$ (si $x = d_1$ c'est $d_1d_1d_2\dots d_{n-1}$).

Et pour n pair :

le mot maximal de J_x est $xd_1d_2\dots d_{n-1}$ (si $x = d_1$ c'est $d_1d_1d_2\dots d_{n-1}$).

le mot minimal de J_x est $x0d_1d_2\dots d_{n-2}$ sauf si $x = d_1$ auquel cas c'est $d_1d_2\dots d_n$.

Dans le cas périodique impair on utilisera $(d^\star_n)_{n\geq 1}$ au lieu de $(d_n)_{n\geq 1}$ dans les lemmes ***5****,* ***6*** *et* ***7****.*

Preuve : utiliser l'ordre alterné, en particulier (1) ou (1*bis*) de la proposition 1 ou (2*ter*) de la définition 2 ainsi que (3) $\diamond$.

Remarque : Toutes ces formule restent valides si $d_1 = 1$, x ne prenant alors que la valeur d_1 dans le Lemme ***7***.

6. Preuve des propositions 3,4,5 et du Théorème 1

Preuve de l'assertion 3 *du Théorème* 1 *: f est une bijection croissante entre $\mathcal{L}$ et $\mathbb{Z}$* : rappelons que $\mathrm{T_n}$ est l'ensemble des mots admissibles de longueur $\leq n$ dont le premier chiffre x_1 est non nul auxquels on adjoint le mot vide et que son cardinal est H_n ; on pose pour tout mot admissible $x_1\dots x_{2k+1}$ de longueur $2k+1$:

$$f(x_1\dots x_{2k+1}) = x_1H_{2k} - x_2H_{2k-1} + x_3H_{2k-2} - \dots - x_{2k}H_1 + x_{2k+1}H_0$$

et pour tout mot admissible de longueur $2k$

$$f(x_1\dots x_{2k}) = -x_1H_{2k-1} + x_2H_{2k-2} - x_3H_{2k-3} + \dots - x_{2k-1}H_1 + x_{2k}H_0.$$

Si le $-\beta$-développement de ${}^{-\beta}/{}_{\beta+1}$ est $d_1d_2\dots$ le plus grand mot de T_{2k+1} est $d_1d_2\dots d_{2k+1}$ (lemme 5) ; c'est ce qui nous a conduit à définir M_{2k+1} comme :

$$M_{2k+1} = f(d_1\dots d_{2k+1}) = d_1H_{2k} - d_2H_{2k-1} + d_3H_{2k-2} - \dots - d_{2k}H_1 + d_{2k+1}H_0.$$

Le plus petit mot de T_{2k} est $d_1d_2\dots d_{2k}$ aussi nous avons défini N_{2k} comme : $-N_{2k} = f(d_1\dots d_{2k}) = -d_1H_{2k-1} + d_2H_{2k-2} - \dots - d_{2k-1}H_1 + d_{2k}H_0$ et $N_0 = 0$.

Nous allons montrer l'assertion par récurrence sur la longueur des mots, faisant les deux hypothèses

$\mathbb{H}_{2k+1}$: la restriction de f à T_{2k+1} est une bijection croissante de T_{2k+1} dans l'intervalle $[-N_{2k}, M_{2k+1}]$ de $\mathbb{Z}$ et $H_{2k+1} = N_{2k} + M_{2k+1} + 1$

$\mathbb{H}_{2k}$: la restriction de f à T_{2k} est une bijection croissante de T_{2k} dans l'intervalle $[-N_{2k}, M_{2k-1}]$ et $H_{2k} = N_{2k} + M_{2k-1} + 1$.

Nous allons prouver que si $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_{2k}$ sont vraies alors $\mathbb{H}_{2k+1}$ et $\mathbb{H}_{2k+2}$ sont vraies.

L' hypothèse $\mathbb{H}_1$ est vraie : $d_1 = \lfloor \beta \rfloor$ (et $d_1 = b - 1$ si $\beta = b \in \mathbb{N}$) et $d_2 \leq d_1$; l'ensemble ordonné des mots admissibles de longueur ≤ 1 est $\{\epsilon, 1, 2, \ldots, d_1\}$; l'ensemble $f\,(T_1)$ est $\{a_1 K_0 = a_1\,;\, a_1 \in \{\epsilon, 1, \ldots d_1\}\}$, l'application définit une bijection croissante entre T_1 et $\{0, 1, \ldots, d_1\}$ qui est aussi $[0, M_1]$ où $M_1 = d_1 H_0 = d_1$ (on a posé $K_0 = H_0 = 1$) ; $K_1 = -H_1 = -(d_1 + 1)$; ainsi le cardinal de l'intervalle $[0, M_1]$ est bien H_1 $\diamond$.

Preuve de $\mathbb{H}_2$: l'ensemble ordonné des mots admissibles de longueur ≤ 2 ne commençant pas par 0 est :
$\{d_1 d_2, d_1(d_2 + 1), \ldots, d_1 d_1, (d_1 - 1)0, (d_1 - 1)1, \ldots, (d_1 - 1)d_1, \ldots, 10, 11, 12, \ldots, 1d_1\}$

Les nombres $a_1 K_1 + a_2 K_0 = -a_1 H_1 + a_2 H_0$ sont donc ($H_0 = 1$ et $H_1 = d_1 + 1$)

$$\{-d_1(d_1 + 1) + d_2, -d_1(d_1 + 1) + d_2 + 1, \ldots, -d_1(d_1 + 1) + d_1\}$$

$$\{-(d_1 - 1)(d_1 + 1), -(d_1 - 1)(d_1 + 1) + 1, \ldots, -(d_1 - 1)(d_1 + 1) + d_1\}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\{-1.(d_1 + 1), -1(d_1 + 1) + 1, \ldots, -1(d_1 + 1) + d_1\}$$

Ces nombres croissent de $-N_2 = -d_1 H_1 + d_2 H_0$ à -1 et tous les nombres de l'intervalles sont atteints : on obtient une bijection croissante entre $T_2 \setminus T_1$ et $[-N_2, -1]$.

Donc T_2 est égal au cardinal de $[-N_2, M_1]$ et on a $H_2 = N_2 + M_1 + 1$ (+1 à cause de 0) $\diamond$.

Si $\mathbb{H}_n$ est vraie alors f envoie tout intervalle de T_n sur un intervalle de $\mathbb{Z}$ de même type. Soit S_n l'ensemble des mots admissibles $x_1 \ldots x_n$ de longueur exactement n dont le premier chiffre x_1 n'est pas nul ; T_n est la réunion disjointe des S_i pour $i = 1, \ldots, n$ et les S_i sont des intervalles contigus ; S_{2k} est contigu à S_{2k-2} qui est contigu à S_{2k-4} et ainsi de suite jusqu'à S_2 qui est contigu à S_0 , qui est contigu à S_1 lui même contigu à S_3 et ainsi de suite.

Supposons $\mathbb{H}_i$ vraie pour $i \leq 2k$ et montrons que H_{2k+1} est vraie ; $\mathbb{H}_{2k}$ dit que la restriction de f à T_{2k} est une bijection strictement croissante de T_{2k} sur $[-N_{2k}, M_{2k-1}]$; nous devons prouver que la restriction de f à $S_{2k+1} = T_{2k+1} \setminus T_{2k}$ est une bijection croissante de S_{2k+1} sur $]M_{2k-1}, M_{2k+1}]$.

S_{2k+1} est la réunion disjointe des intervalles

$$J_x\,, x = 1, \ldots, d_1 \text{ où } J_x = \{x x_2 \ldots x_{2k+1}; x x_2 \ldots x_{2k+1} \in \mathcal{L}\}\,.$$

Soit pour x fixé I_x l'ensemble des mots de longueur $2k$ $x_2 \ldots x_{2k+1}$ tels que $x x_2 \ldots x_{2k+1}$ est un mot admissible de longueur $2k + 1$. I_x est un intervalle de S_{2k}.

Comme $f(xx_2x_3\dots x_{2k+1}) = xH_{2k} + f(x_2\dots x_{2k+1})$, on a $f(J_x) = xH_{2k} + f(I_x)$.

D'après le lemme 5 si $x < d_1$ alors $I_x = [d_1\dots d_{2k}, 0d_1d_2\dots d_{2k-1}]$ et si $x = d_1$ alors $I_x = [d_1d_2\dots d_{2k}, d_2\dots d_{2k+1}]$.

L'hypothèse H_{2k} dit que pour $x \le d_1$, f est une bijection croissante entre I_x et $f(I_x)$ qui est un intervalle et donc : pour $x < d_1$, $f(I_x) = [-N_{2k}, M_{2k-1}]$ et pour $x = d_1$ $f(I_x) = [-N_{2k}, -d_2H_{2k} + d_3H_{2k-1} - \dots + d_{2k+1}H_0]$.

Alors pour $x < d_1$ (nous poserons pour simplifier $f(J_x) = [A_x, B_x]$)

$$f(J_x) = [xH_{2k} - N_{2k}, xH_{2k} + M_{2k-1}] = [A_x, B_x]$$

et pour $x = d_1$, puisque $d_1H_{2k} - d_2H_{2k-1} + \dots + d_{2k+1}H_0 = M_{2k+1}$

$$f(J_{d_1}) = [d_1H_{2k} - N_{2k}, d_1H_{2k} - d_2H_{2k-1} + \dots + d_{2k+1}H_0]$$

$$f(J_{d_1}) = [d_1H_{2k} - N_{2k}, M_{2k+1}] = [A_{d_1}, M_{2k+1}]$$

(si $d_1 = 1$ on a encore $f(J_{d_1}) = [H_{2k} - N_{2k}, M_{2k+1}] =]M_{2k-1}, M_{2k+1}]$)

$$f(J_{d_1}) = [d_1H_{2k} - N_{2k}, M_{2k+1}] = [A_{d_1}, M_{2k+1}]$$

et dans tous les cas f est une bijection croissante entre J_x et l'intervalle image.

Il nous suffit maintenant de prouver que les intervalles images sont bien contigus, donc que

$$M_{2k-1} + 1 = A_1, \quad B_1 + 1 = A_2, \quad B_2 + 1 = A_3, \dots, B_{d_1-1} + 1 = A_{d_1}$$

pour obtenir (puisque tous les intervalles sont contigus) que f est une bijection croissante de S_{2k+1} sur $]M_{2k-1}, M_{2k+1}]$.

Pour $x = 2, \dots, d_1$ on a

$$A_x - B_{x-1} = xH_{2k} - N_{2k} - ((x-1)H_{2k} + M_{2k-1}) = H_{2k} - N_{2k} - M_{2k-1} = 1$$

et que d_1 soit ou non égal à 1 nous avons $A_1 = H_{2k} - N_{2k} = M_{2k-1} + 1$

Donc f est une bijection croissante entre T_{2k+1} et $[-N_{2k}, M_{2k+1}] =$; puisque H_{2k+1} est le cardinal de T_{2k+1} , $H_{2k+1} = N_{2k} + M_{2k+1} + 1$.

Nous avons vérifié H_{2k+1} $\diamond$.

Supposons maintenant que H_i est vraie pour $i \le 2k+1$ et montrons qu'alors H_{2k+2} est vraie.

S_{2k+2} est la réunion disjointe des intervalles J_x $(x = d, d_1 - 1, \dots, 2, 1)$ où J_x est l'ensemble des mots admissibles de longueur $2k+2$, $xx_2\dots x_{2k+2}$; soit I_x pour $x = d_1, d_1 - 1, \dots, 2, 1$ l'ensemble des mots $x_2\dots x_{2k+2}$ de longueur $2k+1$ tels que $xx_2\dots x_{2k+2}$ est admissible; I_x est un intervalle et d'après le Lemme 5 :

si $x = d_1$ alors $I_{d_1} = [d_2d_3\dots d_{2k+2}, d_1d_2\dots d_{2k+1}]$

si $x < d_1$ alors $I_x = [0d_1d_2\dots d_{2k}, d_1d_2\dots d_{2k+1}]$

J_x est aussi un intervalle, précisément $x + I_x$ et $f(J_x) = -xH_{2k+1} + f(I_x)$; donc si $x \ne d_1$, les intervalles $f(J_x)$ de $\mathbb{Z}$ sont pour $x < d_1$

$$\begin{aligned}
f(J_x) &= [-xH_{2k+1} + f(0d_1 \dots d_{2k}), -xH_{2k+1} + f(d_1 \dots d_{2k+1})] \\
&= [-xH_{2k+1} - d_1 H_{2k-1} + d_2 H_{2k-2} - \cdots \\
&\quad +d_{2k}H_0, -xH_{2k+1} + d_1 H_{2k} - d_2 H_{2k-1} + \cdots + d_{2k+1}H_0] \\
&= [-xH_{2k+1} - N_{2k}, -xH_{2k+1} + M_{2k+1}] \\
&= [A_x, B_x]
\end{aligned}$$

et pour $x = d_1$

$$\begin{aligned}
f(J_{d_1}) &= [-d_1 H_{2k+1} + d_2 H_{2k} - \cdots \\
&\quad +d_{2k+2}H_0, -d_1 H_{2k+1} + d_1 H_{2k} - d_2 H_{2k-1} + \cdots + d_{2k+1}H_0] \\
&= [-N_{2k+2}, -d_1 H_1 + M_{2k+1}] \\
&= [-N_{2k+2}, B_{d_1}]
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à vérifier comme plus haut que $B_{d_1}+1 = A_{d_1-1}$, $B_{d_1-1}+1 = A_{d_1-2}$,...,$B_2 + 1 = A_1$, et que $B_1 = N_{2k-1}$ (le cas $d_1 = 1$ se vérifie de même) ; nous obtenons une bijection croissante entre T_{2k+2} et $[-N_{2k+2}, M_{2k}]$. Comme $\mathbb{H}_{2k+2}$ est le cardinal de T_{2k+2}, il vient que $\mathbb{H}_{2k+2} = N_{2k+2} + M_{2k} + 1$ et ceci termine la preuve de $\mathbb{H}_{2k+2}$ $\diamond$.

Par suite f établit une bijection croissante entre $\mathcal{L}$ et $\mathbb{Z}$; ceci termine la preuve de l'assertion 3 du Théorème 1.

L'assertion 2 *du Théorème* 1 *s'en déduit immédiatement*.

Preuve de la Proposition 4 : les égalités du type $H_{2k+1} = N_{2k} + M_{2k+1} + 1$ ont été vérifiées au cours de la preuve de l'assertion 3 du Théorème 1.

Comme H_n est strictement croissante (tous les mots de longueur n ont un prolongement de longueur $n+1$ et un mot au moins en a deux) ces égalités impliquent la croissance stricte des suites $(M_{2k+1})_{k\geq 0}$ et $(N_{2k})_{k\geq 0}$ $\diamond$.

Preuve de la proposition 3 : La définition 3 définit M_{2k+1} et N_{2k} au moyen d'une récurrence ; la formule $H_{2k+1} = N_{2k} + M_{2k+1} + 1$ montrée à la proposition 4 permet d'en déduire la récurrence vérifiée par les $H_n \diamond$.

Exemple. Soit $(d_n)_{n\geq 1} = 21000000\dots$; les mots de longueur $1, 2, 3, 4$ ne commençant pas par 0 sont

$\{1, 2\}\{21, 22, 10, 11, 12\}\{121, 122, 110, 111, 112, 100, 101, 102, 221, 222, 210\}$
$\{2100, 2101, 2102, 2221, 2222, 2210, 1021, 1022, 1010, 1011,$
$1012, 1000, \dots, 1122, 1100, 1101, 1102\}$

dont les images par f sont

$\{0, 1, 2\}\{-5, -4, -3, -2, -1\}\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 112, 13\}$

$\{-30, -29, \dots, -7, -6\}$; $M_1 = 2, N_2 = 5, M_3 = 13, N_4 = 30$, $H_0 = 1, H_1 = 3, H_2 = 8, H_3 = 19$.

Si $(d_n)_{n\geq 1} = 3222222\dots = 32^\infty$, les intervalles concernés sont $T_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ dont les images par f sont $\{0, 1, 2, 3\}$;

$T_2/T_1 = \{32, 33, 20, 21, 22, 23, 10, 11, 12, 13\}$ dont les images par f sont

$\{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$. $S_3 = T_3/\mathrm{T}_2$ est la réunion disjointe des intervalles J_1,J_2 , J_3 où

$$J_1 = \{132, 133, 120, 121, 122, 123, 110, 111, 112, 113, 100, 101, 102, 103\}$$

dont l'image par f est $A_1 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$

$$J_2 = \{232, 233, 220, 221, 222, 223, 210, 211, 212, 213, 200, 201, 202, 203\}$$

dont l'image par f est $A_2 = \{18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$

$$J_3 = \{332, 333, 320, 321, 322\}$$

d'image $A_3 = \{32, 33, 34, 35, 36\}$.

Ici $H_{0,}, H_{1,} H_2, H_3$ sont égaux à $\{1, 4, 14, 47\}$;

M_1, N_2, M_3 sont égaux à $\{3, -10, 36\}$.

Pour $3211111\ldots$la seule différence concernant les mots de longueur $1, 2, 3$ se trouve dans

$$J_3 = \{332, 333, 320, 321\}$$

car 322 n'est pas admissible ; $H_0, H_{1,} H_2, H_3$ sont égaux à $\{1, 4, 14, 46\}$ et M_1, N_2, M_3 à $\{3, -10, 35\}$.

Preuve de la proposition 5 *: étant donné un entier m l'algorithme glouton fournit bien son développement .*

Connaissant $(d_n)_{n\geq 1}$, on détermine les suites M_{2k+1}, N_{2k} à l'aide des formules données à la définition 3 et K_n et H_n à l'aide de la proposition 4 ; nous devons vérifier que l'algorithme donne un mot du langage $\mathcal{L}$ dont l'image par f est m. Nous ferons une récurrence : l'assertion est vraie si m se trouve dans $[-N_0, M_1] = [0, d_1]$ ou si m se trouve dans $[-N_2, M_1]$. Nous allons prouver que si pour $m \in [-N_{2k}, M_{2k-1}]$ l'algorithme glouton fournit le développement de m c'est encore vrai si m appartient à $[-N_{-2k}, M_{2k+1}]$ et que si c'est vrai pour $m \in [-N_{2k}, M_{2k+1}]$ c'est encore vrai si $m \in [-N_{2k+2}, M_{2k+1}]$. Nous vérifierons le premier cas, le second est similaire.

Soit $m \in [-N_{2k}, M_{2k+1}]$; si m est dans $[-N_{2k}, M_{2k-1}]$, il n'y a rien à vérifier ; sinon, $m \in [M_{2k-1} + 1, M_{2k+1}]$ et puisque $H_{2k} = N_{2k} + M_{2k-1} + 1$ il y a un unique x tel que $m - xH_{2k} \in [-N_{2k}, M_{2k-1}]$; si le développement de m est $x_1 \ldots x_r$ nous savons que les nombres de $[-N_{2k}, M_{2k+1}] \setminus [-N_{2k}, M_{2k-1}]$ ont exactement $2k+1$ chiffres dans leur développement et que $m - x_1 H_{2k}$ se trouve dans $[-N_{2k}, M_{2k-1}]$; donc $x_1 = x$, et $m - xH_{2k} = m - x_1 H_{2k}$; le premier chiffre du développement de m est donc fourni par l'algorithme glouton. Les autres le seront aussi en raison de l'hypothèse de récurrence. Donc lorsque l'algorithme se termine il fournit le développement $x_1 \ldots x_m$ de m ; le mot fourni est donc dans $\mathcal{L}$ $\diamond$.

Preuve de l'assertion 1) *du théorème* 1 : nous devons prouver que $\lim \frac{H_{n+1}}{H_n}$ existe ; si c'est le cas la limite est forcément β parce qu'alors elle doit etre égale à l'exponentielle de l'entropie h qui est $\ln \beta$.

Un calcul facile montre que la série formelle

$$R(X) = \frac{1 + X + X^2 + X^3 + \cdots}{1 - (d_1 X + (d_2 - d_1)X^2 - (d_3 - d_2)X^3 + \cdots)}$$

admet pour développement en série $H_0 + H_1 X + H_2 X^2 + H_3 X^3 + \cdots$; comme les coefficients sont bornés le rayon de convergence est > 0 ; soit $1/\theta$ le plus petit pole de $R(X)$ (le pole existe parce que les d_n sont bornés et que $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$ puisque le système dynamique est d'entropie > 0) ; il existe un entier r et un polynome P de degré $< r$ tels que

$$R(X) = \frac{P(X)}{(1 - \theta X)^r} + \sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

avec$\sum_{n\geq 0} a_n \theta^n$ borné. On peut donc trouver un polynome Q tel que

$$R(X) = \sum_{n\geq 0} Q(n)\theta^n X^n + \sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

et nous obtenons pour un certain θ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = \theta$$

La limite existe ; elle ne peut différer de β : donc $\beta = \theta$ $\diamond$.

La proposition qui suit est conséquence immédiate des résultats de S. Ito , C. Frougny and A.C. Lai (voir [2][4]ou [5] pour les définitions) :

Proposition 6. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Le système de numération en base $-\beta$ est rationnel; on entend par la que le langage associé est rationnel.

2) La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est ultimement périodique .

3) Les séries formelles $\sum_{n\geq 0} H_n X^n$, $\sum_{n\geq 0} M_{2n+1} X^{2n+1}$ et $\sum_{n\geq 0} N_{2n} X^{2n}$ sont des séries $\mathbb{N}$ rationnelles (resp.rationnelles).

Lorsque β est un nombre de Pisot ces conditions sont remplies.

Etant donné un nombre réel $\beta > 1$, quels sont les systèmes de numération qui fournissent, via un algorithme glouton lié à l'ordre alterné, un développement pour chaque entier relatif ? Si l'on ajoute la contrainte suivante : l'ensemble des développements doit etre le langage d'un système dynamique d'entropie $\ln \beta$, on peut conjecturer qu'un tel système de numération est lié au $-\beta$ shift.

7. Substitutions

7.1. La $-\beta$ substitution

Nous appelons *substitution* [15] sur l'alphabet $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ une application de B dans l'ensemble $B^\star$ des mots finis sur B : $b_i \mapsto \sigma(b_i) \in B^\star$; la longueur de $\sigma(b_i)$ dépend de i ; B n'est pas nécéssairement fini, il peut etre dénombrable. Pour toute lettre b le mot b^0 désignera le mot vide.

Definition 4. La $-\beta$ substitution. *Soit $\beta > 1$, et soient $(d_n)_{n\geq 1}$ le $-\beta$ développement de $\frac{-\beta}{\beta+1}$ et $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ la suite caractéristique lorsque l'on est dans le cas périodique impair. Nous appellerons $-\beta$ substitution la subsitution σ définie sur l' alphabet dénombrable $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ par*

$\sigma(b_0) = b_0^{d_1} b_1$

$\sigma(b_1) = b_2 0^{d_1-d_2-1} b_1$ *sauf si* $d_2 = d_1$ *auquel cas* $\sigma(b_1) = b_2$

$\sigma(b_2) = b_0^{d_3} b_3$

et pour tout n

$\sigma(b_{2n}) = b_0^{d_{2n+1}} b_{2n+1}$

$\sigma(b_{2n+1}) = b_{2n+2} b_0^{d_1-d_{2n+2}-1} b_1$ *sauf si* $d_{2n+2} = d_1$*auquel cas* $\sigma(b_{2n+1}) = b_{2n+2}$

Lorsque $(d_n)_{n\geq 1}$est purement périodique de période impaire, utiliser $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ au lieu de $(d_n)_{n\geq 1}$.

La deuxième $-\beta$ substitution (cas ultimement périodique). Dans le cas où la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est ultimement périodique, nous définirons une substitution τ sur un alphabet fini C.

En raison du caractère alterné de l'ordre nous écrirons la suite$(d_n)_{n\geq 1}$ (ou $(d_n^\star)_{n\geq 1}$ le cas échéant) sous la forme $d_1 \ldots d_h (d_{h+1} \ldots d_{h+2k})^\infty$ avec une prépériode $d_1 \ldots d_h$ de longueur quelconque et une période $d_{h+1} \ldots d_{h+2k}$ de longueur paire ; si l'on est dans le cas purement périodique, la suite caractéristique est toujours de période paire. Dans le cas ultimement périodique si la plus courte période est un mot $u = d_{h+1} \ldots d_{h+k}$ de longueur impaire on la remplace par $uu = d_{h+1} \ldots d_{h+k} d_{h+1} \ldots d_{h+k}$. Nous définirons une substitution τ sur un alphabet fini C comme suit :

$$C = \{b_0, b_1, b_2, \ldots b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+2k-1}\}$$

$\tau(b_0) = b_0^{d_1} b_1$

$\tau(b_1) = b_2 b_0^{d_1-d_2-1} b_1$ si $d_1 - d_2 > 0$, b_2 si $d_2 - d_1 = 0$

$\tau(b_2) = b_0^{d_3} b_3$

.

$\tau(b_h) =b_{h+1} b_0^{d_1-d_{h+1}-1} b_1$ (b_{h+1} si $d_{h+1} = d_1$) si h est impair et $b_0^{d_{h+1}} b_{h+1}$ si h est pair

.

$\tau(b_{h+2k-2}) =b_0^{d_{h+2k-1}} b_{h+2k-1}$ si $h + 2k - 2$ est pair et $b_{h+2k-1} b_0^{d_1-d_{h+2k-1}-1} b_1$ si $h + 2k - 2$ est impair (b_{h+2k-1}si $d_1 = d_{h+2k-1}$)

et enfin

$\tau(b_{h+2k-1}) =\tau(d_h)$

Il n'y a pas de lettre b_{h+2k} mais d_{h+2k} apparait dans les formules.

Ces substitutions finies possèdent des matrices d'incidence dont β sera valeur propre dominante [15].

Theoreme 2. La lettre b_0 *engendre un mot infini* $\sigma^{\infty}(b_0) = \lim_{n\to\infty} \sigma^n(b_0)$. *point fixe de la substitution.*

La longueur $\mid \sigma^n(b_0) \mid$ *du* n^{ime} *itéré de* b_0 *par la subsitution* σ *est égal à* H_n.

Lorsqu'elle est définie la substitution τ *engendre aussi un mot infini* $\tau^{\infty}(b_0)$ *; les mots* $\sigma^n(b_0)$ *et* $\tau^n(b_0)$ *sont de meme longueur.*

Exemple : si $(d_n)_{n\geq 1} = 3222\ldots = 32^{\infty}$, la substitution σ est definie par : $\sigma(b_0) = b_0b_0b_0b_1$, $\sigma(b_1) = b_2b_1$, $\sigma(b_2) = b_0b_0b_3$, et $\sigma(b_{2k+1}) = b_{2k+2}b_1$, $\sigma(b_{2k}) = b_0b_0b_{2k+1}$.

Le point fixe de σ commence par (nous avons écrit 0 au lieu de b_0 pour plus de lisibilité)

$$000b_1/000b_1000b_1b_1b_2/000b_1000b_1000b_1b_1b_2000b_1000b_1000b_1b_1b_2$$

$$b_1b_200b_3/$$

Si $(d_n)_{n\geq 1} = 10000\ldots = 1(00)^{\infty}$ la substitution τ sera définie sur l'alphabet $\{b_0, b_1, b_2\}$ et $\tau(b_0) = b_0b_1$, $\tau(b_1) = b_2b_1$, $\tau(b_2) = b_1$

Preuve du théorème 2 : la substitution admet un point fixe puisque $\sigma(b_0)$ commence par b_0. L'égalité $H_n =\mid \sigma^n(b_0) \mid$ est la conséquence immédiate de la proposition 7 énoncée ci-dessous.

Définissons une relation d'équivalence sur l'ensemble des lettres de B par : pour p et $q > 0$, $b_p \sim b_q$ si et seulement si pour tout mot $a \in \mathcal{L}$, $d_1\ldots d_pa \in \mathcal{L} \iff d_1\ldots d_qa \in \mathcal{L}$, et la classe de b_0 est celle des lettres après lesquelles on peut mettre tous les mots de $\mathcal{L}$.

Appelons $\mathrm{P_r}$ l'ensemble des mots m de $L_{-\beta}$ tels que

$$m \in \mathrm{P_r} \iff (ma \in L_{-\beta} \iff d_1\ldots d_ra \in L_{-\beta}$$

et si $\mathrm{r} = 0$, $m \in \mathrm{P_0}$ si pour tout mot a de $L_{-\beta}$ $ma \in L_{-\beta}$.

Proposition 7. *Pour tout* $\mathrm{r} \geq 0$ *le nombre de mots de* T_n *qui sont dans* $\mathrm{P_r}$ *est égal au nombre de lettres dans* $\sigma^n(b_0)$ *qui sont dans la classe de* b_r.

L'égalité $H_n =\mid \sigma^n(b_0) \mid$ est conséquence immédiate de la Proposition 7.

Preuve de la proposition 7 *:* La proposition est vérifiée pour T_1 ; faisons une récurrence sur n avec l'hypothèse que la proposition est vraie pour T_n.

Un mot de $\mathrm{P_r}$ se prolonge, si r est pair, par les chiffres $0, 1, \ldots, (d_{r+1} - 1), d_{r+1}$ ce qui donne d_{r+1} prolongements dans $\mathrm{P_0}$ et un prolongement dans $\mathrm{P_{r+1}}$.

Une lettre de la classe de b_r se substitue en d_{r+1} lettres b_0 qui sont dans la classe de b_0 et une lettre b_{r+1} : le compte est bon.

Si r est impair un mot de $\mathrm{P_r}$ se prolonge par les chiffres $d_{r+1}, (d_{r+1}+1), \ldots, (d_1-1), d_1$ (resp. d_{r+1} si $d_1 = d_{r+1}$) ; parmi les mots obtenus $d_1 - d_{r+1} - 1$ sont dans $\mathrm{P_0}$, un se trouve dans $\mathrm{P_1}$, un se trouve dans $\mathrm{P_{r+1}}$(resp. le seul prolongement se trouve dans $\mathrm{P_{r+1}}$).

Une lettre de la classe de b_r se substitue en $b_{r+1}, (b_{r+1}-1), \ldots, b_1$ (resp. en b_{r+1})parmi lesquelles $d_1 - d_{r+1} - 1$ sont dans la classe de b_0, un dans la classe de b_{r+1}, un dans la classe de b_1(resp. une seule lettre dans la classe de b_{r+1}) :

Ainsi la proposition est vérifiée pour T_{n+1} $\diamond$.

Le mot infini bilatéral

Nous allons donner un zeste de bilatéralité à notre substitution σ ; commençons par un exemple : soit $(d_n)_{n\geq 1}$ débutant par $322\ldots$; on remplace b_0 par 0 dans les images pour une lecture plus claire (on substitue 0 comme b_0) ; $\sigma(b_0) = 000b_1$, $\sigma(b_1) = b_2b_1$, $\sigma(b_2) = 00b_3$.

$\sigma^0(b_0) = 0$, $\sigma^1(0) = 000b_1$, $\sigma^2(0) = 000b_1000b_1000b_1b_2b_1$,

$\sigma^3(b_0) =$

$000b_1000b_1000b_1b_2b_1000b_1000b_1000b_1b_2b_1000b_1000b_1000b_1b_2b_1000b_3b_2b_1$

Ecrivons $\sigma^0(b_0) = 0 = \| u_0 \|$ qui sera le point d'équilibre du mot infini bilatéral, et laissons à droite $\sigma^1(b_0)/\sigma^0(b_0)$: on obtient

$\| u_0 \| u_1 \ldots u_{M_1} = \| 0 \| 00b_1$

ensuite écrivons $\sigma^1(b_0)/\sigma^0(b_0) = u_1 \ldots u_{M_1}$ en miroir (de droite à gauche) : $u_{M_1} \ldots u_1$. Substituons $u_{M_1}, \ldots, u_1 = b_100$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \sigma(u_{M_1-1}) \ldots \sigma(u_1) &= \sigma(b_1)\sigma(0)\sigma(0) \\ &= b_2b_1000b_1000b_1 \\ &= \sigma^2(b_0)/\sigma^1(b_0) \end{aligned}$$

que nous noterons $u_{-N_2} \ldots u_{-1}$; et écrivons ce mot à gauche de $u_0 = \| 0 \|$: nous obtenons :

$$b_2b_1000b_1000b_1 \| 0 \| 00b_1 = u_{-N_2}u_{-N_2-1} \ldots u_{-1}u_0u_1 \ldots u_{M_1}$$

$\| u_0 \|$sépare les nombres positifs et les négatifs.

Renversons ensuite le mot

$$\sigma^2(b_0)/\sigma^1(b_0) = u_{-N_2}u_{-N_2+1} \ldots u_{-1} = b_2b_1000b_1000b_1$$

en miroir de gauche à droite pour obtenir : $u_{-1}u_{-2} \ldots u_{-N_2} = b_1000b_1000b_1b_2$.

Substituons $u_{-1}u_{-2} \ldots u_{-N_2} = b_1000b_1000b_1b_2$.

Nous obtenons $\sigma(u_{-1}u_{-2} \ldots u_{-N_2})$ que nous noterons $u_{M_1+1} \ldots u_{M_3}$et qui est

$b_2b_1000b_1000b_1000b_1b_2b_1000b_1000b_1000b_1b_2b_100b_3$.

Plaçons ce mot à droite du mot bilatéral pour obtenir :

$$\begin{aligned} &b_2b_1000b_1000b_1 \| 00b_1 \mid b_2b_1000b_1000b_1000b_1b_2b_1000b_1000b_1000b_1b_2b_100b_3 = \\ &u_{-N_2}u_{-N_2-1} \ldots u_{-1} \| u_0 \| u_1 \ldots u_{M_1} \mid u_{M_1+1} \ldots u_{M_3} \end{aligned}$$

et continuons : on renverse $u_{M_1} \ldots u_{M_3}$, on obtient $u_{M_3} \ldots u_{M_1}$, que l'on substitue et on ajoute le résultat obtenu à gauche de

$$u_{-N_2}u_{-N_2-1} \ldots u_{-1} \| u_0 \| u_1 \ldots u_{M_1} \mid u_{M_1+1} \ldots u_{M_3}$$

pour obtenir

$$u_{-N_2} \ldots u_{-N_2-1} \mid u_{-N_2}u_{-N_2-1} \ldots u_{-1} \| u_0 \| u_1 \ldots u_{M_1} \mid u_{M_1+1} \ldots u_{M_3}$$

et ainsi de suite.

Definition 6. *Soit un réel $\beta > 1$, σ la substitution associée, $(M_{2k+1})_{k\geq 0}$ et $(N_{2k})_{k\geq 0}$ les suites définies à la définition 4 ; nous définissons comme suit le mot infini bilatéral $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associé à la $-\beta$ numération :*

$$u_0 \dots u_{M_1} = \sigma(b_0)$$

$$u_{-N_2} \dots u_{-1} = \sigma(u_{M_1} \dots u_1)$$

$$u_{M_1+1} \dots u_{M_3} = \sigma(u_{-1} \dots u_{-N_2}) = \sigma(u_{-N_0-1} \dots u_{-N_2})$$

$$u_{M_{2k-1}+1} \dots u_{M_{2k+1}} = \sigma\left(u_{-N_{2k-2}-1} \dots u_{-N_{2k}}\right)$$

$$u_{-N_{2k+2}} \dots u_{-N_{2k}-1} = \sigma\left(u_{M_{2k+1}} \dots u_{M_{2k-1}+1}\right)$$

Cette définition est cohérente car pour $k \geq 1$,
$M_{2k+1} - M_{2k-1} = \mid \sigma\left(u_{-N_{2k-2}-1} \dots u_{-N_{2k}}\right) \mid$ et
$N_{2k+2} - N_{2k+1} = \mid \sigma\left(u_{M_{2k-1}+1} \dots u_{2k+1}\right) \mid$
ainsi la récurrence indiquée fournit bien un mot infini $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Comparons maintenant le début du mot bilatéral obtenu pour $322\dots$ et les nombres de $\mathbb{Z}$

$| \, 32, 33, 20, 21, 22, 23, 10, 11, 12, 13 \parallel 0 \parallel 1, 2, 3 \mid 132, 133, 120, 121, 122, 123,$
$110, 111, 112, 113, 100, 101, 102, 103, 232, 233, 210, 211, 212, 213, 200, 201, 202,$
$203, 332, 333, 320, 321, 322 \,|$

Nous voyons que si $u_m = 0$ on doit ajouter 1 au dernier chiffre ; mais surtout dès que la lettre b_i apparait pour la première fois dans le procédé, si i est impair on se trouve du coté des nombres positifs comportant i chiffres et l'on doit passer du coté des nombres négatifs en ajoutant un chiffre supplémentaire, si i est pair on est parmi les nombres négatifs avec i chiffres, on doit passer aux nombres positifs et mettre un chiffre de plus.

L'auteur remercie le referee pour ses nombreuses et judicieuses suggestions et corrections.

Références

[1] AMBROŽ, P.—DOMBEK, D.—MASÁKOVÁ, Z.—PELANTOVÁ, E.: *Numbers with expansion in the numeration system with negative base*, Funct. Approx. Comment. Math. **47** (2012), part 2, 241–266.

[2] BERSTEL, J.—REUTENAUER, C.: *Les Séries Rationnelles et Leurs Langages*, in : *Etudes et Recherches en Informatique*, Masson, Paris, 1984.

[3] BERTRAND-MATHIS, A.: *Comment écrire les nombres entiers dans une base qui n'est pas entiere*, Acta Math. Hungar. **54** (1989), n°3–4, 237–241.

[4] DENKER, M.—GRILLENBERGER, C.—SIGMUND, K.: *Ergodic Theory on Compact Spaces*, in : Lectures Notes in Math. **527**, Springer-Verlag Berlin, 1976.

[5] FRAENKEL, A. S.: *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 105–114.

[6] FROUGNY, C.— LAI, A. C.: *On negative bases*, in : *Developments in Language Theory*, Lectures Notes in Comput. Sci., **5583**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, pp. 252–263.

[7] GRÜNWALD, V.: *Intorno all'arithmetica dei sistemia base negativa con particulare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale)*, Giornale di Matematiche di Battaglini **367** (1885), 203–221.

[8] ITO, S.—SADAHIRO, T.: *(-β)-expansions of real numbers*, Integers, **9** (2009), 239–359.

[9] LIAO, L.—STEINER, W.: *Dynamical properties of the negative beta-transformation*, Ergodic Theory and Dyn. Systems **32** (2012), n°5, 1673–1690.

[10] LIND, D.—KITCHENS, B.: *Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] LORAUD, N.: *β-shift, systèmes de numération et automates*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995) n°2, 473–498.

[12] LOTHAIRE, M.: Algebraic combinatorics on words, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, n° **90*** Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[13] S. MASÁKOVÁ, S.—PELANTOVÁ, E.: *Ito-Sadahiro numbers vs. Parry numbers*, Acta Polytechnica (Czech Republic) **51** (2011), no. 4, 59–64.

[14] PARRY, W.: *On the β expansions of real numbers*, Acta Math. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.

[15] QUEFFELEC, M.: *Substitution Dynamical Systems-Spectral Aanalysis*, in : Lectures Notes in Math. **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[16] RÉNYI, A.: *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta. Math. Sci. Hungar, **8** (1957), 401–414.

[17] STEINER, W.: *On the Delone property of beta-integers*, in : 8th International Conference Words 2011, Prague, September 12–16, 2011. Electronic Proceedings of Theoretical Computer Science **63**, 2011.

[18] ZECKENDORF, E.: *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **41** (1972), no. 1, 179–182.

Received November 8, 2012
Accepted July 20, 2014

Anne Bertrand-Mathis
LMA, CNRS UMR 7348
Université de Poitiers
UFR Sciences SP2MI
11, Bd. Marie et Pierre Curie BP 30179
F-86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex
FRANCE
E-mail: anne.bertrand@math.univ-poitiers.fr