

SOMMES D'EXPONENTIELLES ASSOCIÉES AUX FONCTIONS DIGITALES RESTREINTES

CHRISTIAN MAUDUIT — ZAID SHAWKET

ABSTRACT. In this work, we study the exponential sums associated to certain classes of arithmetic functions, called restricted digital functions. The estimation of these exponential sums allows to study the uniform distribution modulo 1 of restricted digital functions as well as the statistical properties of the sequences of integers associated with them.

Communicated by András Sárközy

A la mémoire de Gérard Rauzy

1. Notations

Dans tout ce travail q désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{E}$ une famille de q sous-ensembles de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, notés $E_0, \dots, E_{q-1}$. Si E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ et ν un nombre entier strictement positif, on note $E(\nu)$ l'ensemble $E \cap \{0, \dots, \nu - 1\}$.

On suppose que l'un au moins des ensembles $E_0, \dots, E_{q-1}$ est infini et on note $\Delta(\mathcal{E}) = \left(\bigcup_{d < q} E_d \right) \setminus \left(\bigcap_{d < q} E_d \right)$. Pour tout $d \in \{0, \dots, q - 1\}$ on désigne par δ_d la suite définie par

$$\delta_d(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in E_d \\ 0 & \text{si } n \notin E_d . \end{cases}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 11A63, 11B85, 11K36, 11L15.

Keywords: Fonctions digitales, équirépartition modulo 1, sommes d'exponentielles, suites automatiques.

Travail effectué avec le soutien de l'Agence Nationale de la Recherche, grant ANR-10-BLAN 0103 MUNUM.

Si $n = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_q n \rfloor} n_i q^i$ avec $n_i \in \{0, \dots, q-1\}$ pour tout $i \in \{0, \dots, \lfloor \log_q n \rfloor\}$, est la représentation en base q de l'entier $n \geq 1$ (on représente zéro par 0), on note pour tout $d \in \{0, \dots, q-1\}$

$$|n|_d^{E_d} = \text{card} \{i \in E_d, n_i = d\}.$$

Si $E_d = \emptyset$, on a donc $|n|_d^\emptyset = 0$ pour tout nombre entier $n \geq 0$.

Par exemple, si $q = 10$ et si n est le nombre dont la représentation décimale est 12345678910111213, alors

- si E_1 est l'ensemble des nombres pairs, on a $\{i \in E_1, n_i = 1\} = \{4, 16\}$ et donc $|n|_1^{E_1} = 2$,
- si E_1 est l'ensemble des nombres premiers, on a $\{i \in E_1, n_i = 1\} = \{3, 5, 7\}$ et donc $|n|_1^{E_1} = 3$.

Pour tout nombre entier $\nu \geq 1$ fixé et $n < q^\nu$ on peut également représenter le nombre entier n sous la forme $n = n_{\nu-1}q^{\nu-1} + \dots + n_0$ avec $(n_0, \dots, n_{\nu-1}) \in \{0, \dots, q-1\}^\nu$ et noter

$$|n|_{\nu,0}^{E_0} = \text{card} \{i \in E_0 \cap \{0, \dots, \nu-1\}, n_i = 0\}.$$

On remarque que $|n|_{\nu,0}^{E_0} = \text{card} (E_0 \cap \{\lfloor \log_q n \rfloor, \dots, \nu-1\}) + |n|_0^{E_0}$.

Ainsi, si $q = 10$, n désigne encore le nombre dont la représentation décimale est 1234567890111213 et si $E_0 = \mathbb{N}$, alors $|n|_{\nu,0}^{E_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \leq 16 \\ \nu - 15 & \text{si } \nu \geq 16 \end{cases}$.

Enfin si x est un nombre réel, on pose $e(x) = e^{2\pi i x}$ et pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}, \alpha) \in \mathbb{R}^{q+1}$ on note

$$\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}, \alpha) = \sum_{0 < n < N} e(\alpha_0 |n|_0^{E_0} + \dots + \alpha_{q-1} |n|_{q-1}^{E_{q-1}} + \alpha n)$$

et $\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}, 1)$.

2. Présentation des résultats

Ce travail concerne l'étude des fonctions digitales restreintes, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions arithmétiques $|n|_d^{E_d}$ pour $d \in \{0, \dots, q-1\}$.

Dans le paragraphe 3, nous montrons comment les fonctions génératrices associées à ces fonctions digitales restreintes peuvent s'exprimer sous la forme de produits infinis, généralisant ainsi le lemme 1 de [8].

Ceci nous permet d'étudier dans le paragraphe 4 les sommes d'exponentielles associées aux fonctions digitales restreintes (théorèmes 4.1 et 4.2). Comme nous le verrons, ces sommes d'exponentielles ont un comportement très différent selon que $\Delta(\mathcal{E})$ est fini ou infini.

Dans le paragraphe 5, nous montrons plusieurs applications des théorèmes 4.1 et 4.2 à l'étude des propriétés statistiques des fonctions digitales restreintes. Ainsi, le théorème 5.1 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équirépartie modulo 1 lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(n) = h_0|n|_0^{E_0} + \dots + h_{q-1}|n|_{q-1}^{E_{q-1}}$ avec $(h_0, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q$ et les théorèmes 5.3 et 5.4 des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $\left((|n|_d^{E_d} \alpha_d)_{d \in \mathcal{D}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^{\text{card } \mathcal{D}}$ lorsque $\mathcal{D} \subset \{0, \dots, q-1\}$ et $(\alpha_d)_{d \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\text{card } \mathcal{D}}$.

Le paragraphe 6 concerne l'étude des propriétés statistiques de la suite croissante formée des nombres entiers n qui vérifient les conditions digitales restreintes

$$|n|_d^{E_d} \equiv a_d \pmod{m_d} \text{ pour tout } d \in \{0, \dots, q-1\},$$

lorsque $(a_0, \dots, a_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q$ et $(m_0, \dots, m_{q-1}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^q$ sont fixés et tels que $\text{pgcd}(m_0, \dots, m_{q-1}) = 1$. Cette suite généralise la suite de Thue-Morse (qui correspond au cas particulier $q = 2$, $E_0 = \emptyset$, $E_1 = \mathbb{N}$ et $(a_1, m_1) = (0, 2)$) dont l'étude des propriétés arithmétiques et statistiques a fait l'objet de nombreux travaux (voir [1, 19] pour une présentation de ces travaux).

En annexe (paragraphe 7) nous donnons (en reprenant la démarche introduite par Michel Dekking et Michel Mendes-France dans [7]) la représentation graphique des courbes associées aux suites $(\frac{1}{3}|n|_0^{E_0} + \frac{1}{4}|n|_1^{E_1})_{n \in \mathbb{N}}$ pour quatre exemples de couples d'ensembles (E_0, E_1) . Ces courbes ont été obtenues en reliant par un segment de droite les points du plan complexe représentant les sommes de Weyl $\sum_{n < N} e(\frac{1}{3}|n|_0^{E_0} + \frac{1}{4}|n|_1^{E_1})$ lorsque $1 \leq N < 10^{14}$.

On dit qu'une fonction arithmétique f est q -additive (resp. fortement q -additive) si pour tout nombre entier positif ν et pour tout couple de nombres entiers positifs a et b tels que $b < q^\nu$, on a $f(aq^\nu + b) = f(aq^\nu) + f(b)$ (resp. $f(aq^\nu + b) = f(a) + f(b)$). Cette notion a été introduite indépendamment par Bellman et Shapiro [3] et Gelfond [10].

La fonction somme des chiffres en base 2, $s(n) = |n|_1^{\mathbb{N}}$ (qui correspond au cas particulier de la suite de Thue-Morse), est fortement 2-additive. Ses propriétés arithmétiques et statistiques ont été étudiées dans [5, 9, 10, 22, 23, 24, 25].

Si $d \in \{1, \dots, q-1\}$, alors la fonction qui à $n \in \mathbb{N}$ associe $|n|_d^{E_d}$ est q -additive, mais n'est pas fortement q -additive lorsque $E_d \neq \mathbb{N}$: pour tout nombre entier positif ν et pour tout couple de nombres entiers positifs a et b tels que $b < q^\nu$, on a

$$|aq^\nu + b|_d^{E_d} = |aq^\nu|_d^{E_d} + |b|_d^{E_d}.$$

Mais si $E_0 \neq \emptyset$, alors la fonction qui à $n \in \mathbb{N}$ associe $|n|_0^{E_0}$ n'est pas q -additive. En effet, pour tout nombre entier positif ν et pour tout couple de nombres entiers positifs a et b tels que $b < q^\nu$, on a

$$\begin{aligned} |aq^\nu + b|_0^{E_0} &= |aq^\nu|_0^{E_0} - \left(|b|_1^{E_0} + \dots + |b|_{q-1}^{E_0} \right) \\ &= |aq^\nu|_0^{E_0} + |b|_0^{E_0} - \text{card} \left(E_0 \cap \{0, \dots, [\log_q b]\} \right). \end{aligned}$$

Il existe de nombreuses généralisations de la suite de Thue-Morse dans la littérature, liées en particulier aux notions d'automate, de substitution et de morphisme itéré (voir [2, 4] pour ces notions et [6, 15, 16, 17, 18, 20] pour l'étude des propriétés statistiques des suites associées).

Une généralisation extrêmement intéressante a été proposée en 1968 par Keane dans le cadre de l'étude des propriétés ergodiques de certains systèmes dynamiques symboliques [11] (voir également [13, 14, 21]). La première étape de cette construction consiste, à partir de la donnée de deux suites constituées respectivement de ℓ et ℓ' éléments du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $B = b_1 \dots b_\ell$ et $B' = b'_1 \dots b'_{\ell'}$, à construire une troisième suite constituée de $\ell\ell'$ éléments du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, notée $B \otimes B$ et égale à $(b_1 + b'_1) \dots (b_1 + b'_{\ell'}) \dots (b_\ell + b'_1) \dots (b_\ell + b'_{\ell'})$ (l'addition étant celle du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$). En itérant le procédé, on peut ainsi construire des suites arbitrairement longues d'éléments du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Par exemple, lorsque $m = 2$ et $B = 0 \ 1$, on obtient $B^{\otimes \infty} = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots$ dont le $(n+1)$ ième terme est égal à $s(n) = |n|_1^{\mathbb{N}}$ modulo 2 (qui correspond à nouveau au cas particulier de la suite de Thue-Morse).

De la même manière, si $d \in \{1, \dots, q-1\}$, les valeurs de la fonction arithmétique $|n|_d^{E_d}$ modulo m_d sont données par la suite d'éléments de $\mathbb{Z}/m_d\mathbb{Z}$ $B_0 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes \dots$ où l'on a posé

$$B_n = \begin{cases} 0^q & \text{si } n \notin E_d \\ 0^d \ 1 \ 0^{q-d-1} & \text{si } n \in E_d. \end{cases}$$

Par contre, si $E_0 \neq \emptyset$ et $m_0 \geq 2$, les valeurs de la fonction arithmétique $|n|_0^{E_0}$ modulo m_0 ne constituent pas une suite de Thue-Morse généralisée au sens de Keane.

3. Fonction génératrice

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des formules explicites pour la fonction génératrice :

$$S_N^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{0 < n < N} x_0^{|n|_0^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n.$$

Pour cela nous allons généraliser la démarche présentée dans [8] en introduisant pour $N \leq q^\nu$:

$$T_{\nu, N}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{n < N} x_0^{|n|_{\nu, 0}^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n.$$

Le lemme suivant généralise donc le lemme 1 de [8]:

LEMME 3.1. *Pour tout nombre entier positif ν on a*

$$(i) \quad S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{j < \nu} (x_1^{\delta_1(j)} y^{q^j} + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(j)} y^{(q-1)q^j}) \times \\ \times T_{j, q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, \dots, x_{q-1}, y)$$

$$(ii) \quad S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + (x_1^{\delta_1(\nu)} y^{q^\nu} + \dots \\ + x_{\ell-1}^{\delta_{\ell-1}(\nu)} y^{(\ell-1)q^\nu}) \times T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, \dots, x_{q-1}, y) \\ \text{pour } 2 \leq \ell < q,$$

$$(iii) \quad S_{\ell q^\nu + N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\ + x_\ell^{\delta_\ell(\nu)} y^{\ell q^\nu} T_{\nu, N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\ \text{pour } 1 \leq \ell < q \text{ et } N' < q^\nu$$

Démonstration. (i) Pour tout nombre entier positif ν , on a

$$S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\ = \sum_{0 < n < q^\nu} x_0^{|n|_0^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\ = \sum_{j < \nu} \sum_{q^j \leq n < q^{j+1}} x_0^{|n|_0^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j < \nu} \sum_{a=1}^{q-1} \sum_{m < q^j} x_0^{|aq^j+m|_0^{E_0}} x_1^{|aq^j+m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|aq^j+m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{aq^j+m} \\
 &= \sum_{j < \nu} \sum_{a=1}^{q-1} \sum_{m < q^j} x_0^{|aq^j+m|_{j,0}^{E_0}} x_1^{|aq^j+m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|aq^j+m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{aq^j+m}
 \end{aligned}$$

Or pour tout $(j, a, d, m) \in \{0, \dots, \nu-1\} \times \{1, \dots, q-1\}^2 \times \{0, \dots, q^j-1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 |aq^j+m|_{j,0}^{E_0} &= |m|_{j,0}^{E_0}, \\
 |aq^j+m|_d^{E_d} &= |m|_d^{E_d} \text{ si } d \neq a, \\
 \text{et } |aq^j+m|_a^{E_a} &= \delta_a(j) + |m|_a^{E_a}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= \sum_{j < \nu} \sum_{a=1}^{q-1} x_a^{\delta_a(j)} y^{aq^j} \sum_{m < q^j} x_0^{|m|_{j,0}^{E_0}} x_1^{|m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^m \\
 &= \sum_{j < \nu} \sum_{a=1}^{q-1} x_a^{\delta_a(j)} y^{aq^j} T_{j,q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y).
 \end{aligned}$$

(ii) Pour tout nombre entier positif ν et pour tout $\ell \in \{2, \dots, q-1\}$, on a

$$\begin{aligned}
 &S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\
 &= \sum_{0 < n < \ell q^\nu} x_0^{|n|_0^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\
 &= S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\
 &\quad + \sum_{a=1}^{\ell-1} \sum_{aq^\nu \leq n < (a+1)q^\nu} x_0^{|n|_0^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\
 &= S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\
 &\quad + \sum_{a=1}^{\ell-1} \sum_{m < q^\nu} x_0^{|aq^\nu+m|_0^{E_0}} x_1^{|aq^\nu+m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|aq^\nu+m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{aq^\nu+m} \\
 &= S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\
 &\quad + \sum_{a=1}^{\ell-1} \sum_{m < q^\nu} x_0^{|aq^\nu+m|_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{|aq^\nu+m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|aq^\nu+m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{aq^\nu+m}
 \end{aligned}$$

Or pour tout $(a, d, m) \in \{1, \dots, q-1\}^2 \times \{0, \dots, q^\nu - 1\}$ on a

$$\begin{aligned} |aq^\nu + m|_{\nu,0}^{E_0} &= |m|_{\nu,0}^{E_0}, \\ |aq^\nu + m|_d^{E_d} &= |m|_d^{E_d} \text{ si } d \neq a, \\ \text{et } |aq^\nu + m|_a^{E_a} &= \delta_a(\nu) + |m|_a^{E_a}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\ &\quad + \sum_{a=1}^{\ell-1} x_a^{\delta_a(\nu)} y^{aq^\nu} \sum_{m < q^\nu} x_0^{|m|_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{|m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^m \\ &= S_{q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\ &\quad + \sum_{a=1}^{\ell-1} x_a^{\delta_a(\nu)} y^{aq^\nu} T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y). \end{aligned}$$

(iii) Pour tout nombre entier positif ν , pour tout $\ell \in \{1, \dots, q-1\}$ et pour tout $N' < q^\nu$, on a

$$\begin{aligned} &S_{\ell q^\nu + N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\ &= \sum_{0 < n < \ell q^\nu + N'} x_0^{|n|_0^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\ &= S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\ &\quad + \sum_{m < N'} x_0^{| \ell q^\nu + m |_0^{E_0}} x_1^{| \ell q^\nu + m |_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{| \ell q^\nu + m |_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{\ell q^\nu + m} \\ &= S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\ &\quad + \sum_{m < N'} x_0^{| \ell q^\nu + m |_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{| \ell q^\nu + m |_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{| \ell q^\nu + m |_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{\ell q^\nu + m} \end{aligned}$$

Or pour tout $(d, m) \in \{1, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, N'-1\}$ on a

$$\begin{aligned} | \ell q^\nu + m |_{\nu,0}^{E_0} &= |m|_{\nu,0}^{E_0}, \\ | \ell q^\nu + m |_d^{E_d} &= |m|_d^{E_d} \text{ si } d \neq \ell, \\ \text{et } | \ell q^\nu + m |_l^{E_l} &= \delta_l(\nu) + |m|_l^{E_l}. \end{aligned}$$

Où on déduit que

$$S_{\ell q^\nu + N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = S_{\ell q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) +$$

$$+x_\ell^{\delta_\ell(\nu)} y^{\ell q^\nu} \sum_{m < N'} x_0^{|m|_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{|m|_1^{E_1}} \cdots x_{q-1}^{|m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^m,$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.1. $\square$

Le lemme 3.1 nous montre que nous pouvons exprimer les fonctions génératrices $S_N^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ (pour $N < q^{\nu+1}$) en fonction des $T_{j,q^j}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ (pour $j \leq \nu$) et des $T_{\nu,N'}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ (pour $N' < q^\nu$).

Pour que ce lemme soit opérationnel, il nous faut vérifier que les $T_{\nu,N'}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ (pour $N' < q^\nu$) peuvent à leur tour s'exprimer en fonction des $T_{j,q^j}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ (pour $j < \nu$). C'est ce que montre le lemme suivant de manière récursive.

LEMME 3.2. *Pour tout nombre entier strictement positif ν et pour tout $(\ell, j) \in \{1, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, \nu-1\}$ on a*

$$\begin{aligned} (i) \quad T_{\nu,\ell q^j}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= x_0^{\text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\})} (x_0^{\delta_0(j)} + x_1^{\delta_1(j)} y^{q^j} + \cdots \\ &\quad + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(j)} y^{(q-1)q^j}) \times T_{j,q^j}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y). \\ (ii) \quad T_{\nu,\ell q^j+N'}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= T_{\nu,\ell q^j}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\ &\quad + x_0^{\text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\})} \times x_\ell^{\delta_\ell(j)} y^{\ell q^j} T_{j,N'}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y). \end{aligned}$$

Démonstration. (i) Pour tout nombre entier strictement positif ν et pour tout $(\ell, j) \in \{1, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, \nu-1\}$ on a

$$\begin{aligned} &T_{\nu,\ell q^j}^\mathcal{E}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\ &= \sum_{n < \ell q^j} x_0^{|n|_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \cdots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\ &= \sum_{a < q} \sum_{aq^j \leq n < (a+1)q^j} x_0^{|n|_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \cdots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\ &= \sum_{a < q} \sum_{m < q^j} x_0^{|aq^j+m|_{\nu,0}^{E_0}} x_1^{|aq^j+m|_1^{E_1}} \cdots x_{q-1}^{|aq^j+m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{aq^j+m}. \end{aligned}$$

Or pour tout $(a, d, m) \in \{1, \dots, q-1\}^2 \times \{0, \dots, q^{\nu-1}\}$ on a

$$\begin{aligned} |m|_{\nu,0}^{E_0} &= \text{card}(E_0 \cap \{j, \dots, \nu-1\}) + |m|_{j,0}^{E_0}, \\ |aq^j+m|_{\nu,0}^{E_0} &= \text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\}) + |m|_{j,0}^{E_0}, \\ |aq^j+m|_d^{E_d} &= |m|_d^{E_d} \text{ si } d \neq a, \\ \text{et } |aq^j+m|_a^{E_a} &= \delta_a(j) + |m|_a^{E_a}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 T_{\nu, \ell q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= x_0^{\text{card}(E_0 \cap \{j, \dots, \nu-1\})} T_{j, \ell q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\
 &\quad + x_0^{\text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\})} (x_1^{\delta_1(j)} y^{q^j} + \dots \\
 &\quad + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(j)} y^{(q-1)q^j}) \times T_{j, q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\
 &= x_0^{\text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\})} (x_0^{\delta_0(j)} + x_1^{\delta_1(j)} y^{q^j} + \dots \\
 &\quad + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(j)} y^{(q-1)q^j}) \times T_{j, q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)
 \end{aligned}$$

(ii) Pour tout nombre entier strictement positif ν et pour tout

$$(\ell, j) \in \{1, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, \nu-1\},$$

on a pour tout $N' < q^j$

$$\begin{aligned}
 T_{\nu, \ell q^j + N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= \sum_{n < \ell q^j + N'} x_0^{|n|_{\nu, 0}^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\
 &= T_{\nu, \ell q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\
 &\quad + \sum_{m < N'} x_0^{|\ell q^j + m|_{\nu, 0}^{E_0}} x_1^{|\ell q^j + m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|\ell q^j + m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{\ell q^j + m}.
 \end{aligned}$$

Or pour tout $(d, m) \in \{1, \dots, q-1\} \times \{0, \dots, N'-1\}$ on a

$$|\ell q^j + m|_{\nu, 0}^{E_0} = \text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\}) + |m|_{j, 0}^{E_0},$$

$$|\ell q^j + m|_d^{E_d} = |m|_d^{E_d} \text{ si } d \neq \ell,$$

$$\text{et } |\ell q^j + m|_{\ell}^{E_{\ell}} = \delta_{\ell}(j) + |m|_{\ell}^{E_{\ell}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 T_{\nu, \ell q^j + N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= T_{\nu, \ell q^j}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) + \\
 &\quad + x_0^{\text{card}(E_0 \cap \{j+1, \dots, \nu-1\})} \times \\
 &\quad \times x_{\ell}^{\delta_{\ell}(j)} y^{\ell q^j} T_{j, N'}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y),
 \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.2. $\square$

Les ensembles $E_0, \dots, E_{q-1}$ étant donnés, nous allons maintenant effectuer une partition de l'ensemble $\{0, \dots, \nu-1\}$ de la manière suivante :

On pose

$$E_{0, \dots, 0}(\nu) = \{0, \dots, \nu-1\} \setminus \left(\bigcap_{d < q} E_d(\nu) \right),$$

et si $(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \in \{0, 1\}^q \setminus (0, \dots, 0)$ on pose

$$E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu) = \bigcap_{\delta_d=1} E_d(\nu) \setminus \bigcup_{\delta_d=0} E_d(\nu).$$

EXEMPLE. Pour $q = 3$ on obtient la figure 1.

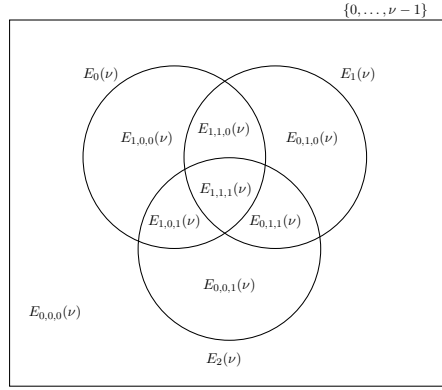


FIGURE 1. Les ensembles $E_{\delta_0, \delta_1, \delta_2}$, où $(\delta_0, \delta_1, \delta_2) \in \{0, 1, 2\}^3$

Le lemme suivant va nous permettre d'exprimer $T_{\nu, q}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ sous la forme d'un produit.

LEMME 3.3. Pour tout nombre entier strictement positif ν , on a

$$T_{\nu, q}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \prod_{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \in \{0, 1\}^q} \prod_{r \in E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)} (x_0^{\delta_0} + x_1^{\delta_1} y^{q^r} + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}} y^{(q-1)q^r}).$$

Démonstration. Ce lemme se montre facilement par récurrence sur ν . En effet, on a

$$T_{1, q}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = x_0^{\delta_0(0)} + x_1^{\delta_1(0)} y + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(0)} y^{q-1}$$

et si $\nu \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} T_{\nu+1, q^{\nu+1}}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) &= \sum_{n < q^{\nu+1}} x_0^{|n|_{\nu+1, 0}^{E_0}} x_1^{|n|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^n \\ &= \sum_{a < q} \sum_{m < q^{\nu}} x_0^{|aq^{\nu} + m|_{\nu+1, 0}^{E_0}} x_1^{|aq^{\nu} + m|_1^{E_1}} \dots x_{q-1}^{|aq^{\nu} + m|_{q-1}^{E_{q-1}}} y^{aq^{\nu} + m} \end{aligned}$$

Or, pour tout $(a, d, m) \in \{1, \dots, q-1\}^2 \times \{0, \dots, q^\nu - 1\}$ on a

$$\begin{aligned} |m|_{0, \nu+1}^{E_0} &= \delta_0(\nu) + |m|_{0, \nu}^{E_0}, \\ |aq^\nu + m|_{0, \nu+1}^{E_0} &= |m|_{0, \nu}^{E_0}, \\ |aq^\nu + m|_d^{E_d} &= |m|_d^{E_d} \text{ si } d \neq a, \\ \text{et } |aq^\nu + m|_a^{E_a} &= \delta_a(\nu) + |m|_a^{E_a}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &T_{\nu+1, q^{\nu+1}}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\ &= (x_0^{\delta_0(\nu)} + x_1^{\delta_1(\nu)} y^{q^\nu} + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(\nu)} y^{(q-1)q^\nu}) \times \\ &\quad \times T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) \\ &= (x_0^{\delta_0(\nu)} + x_1^{\delta_1(\nu)} y^{q^\nu} + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}(\nu)} y^{(q-1)q^\nu}) \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \\ \in \{0,1\}^q}} \prod_{\substack{r \in \\ E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}} (x_0^{\delta_0} + x_1^{\delta_1} y^{q^r} + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}} y^{(q-1)q^r}) \\ &= \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \\ \in \{0,1\}^q}} \prod_{\substack{r \in \\ E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu+1)}} (x_0^{\delta_0} + x_1^{\delta_1} y^{q^r} + \dots + x_{q-1}^{\delta_{q-1}} y^{(q-1)q^r}) \end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence à $T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y)$ et en remarquant que

$$(\delta_0(\nu), \dots, \delta_{q-1}(\nu)) = (\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \Leftrightarrow \nu \in E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu+1),$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.3. $\square$

4. Sommes d'exponentielles associées aux fonctions digitales restreintes

L'objet de cette partie est d'étudier les sommes d'exponentielles associées aux fonctions digitales restreintes. En particulier nous démontrons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 4.1. *Soient $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ non tous finis et $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ des nombres réels tels que $E_d \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_d \notin \mathbb{Z}$. Si*

$\Delta(\mathcal{E})$ est infini ou si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini et que les nombres réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ ne sont pas tous égaux modulo 1, alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) &= \sum_{0 < n < N} e(\alpha_0 |n|_0^{E_0} + \dots + \alpha_{q-1} |n|_{q-1}^{E_{q-1}}) \\ &= o(N). \end{aligned}$$

Lorsque $\Delta(\mathcal{E})$ est fini et $\alpha_0 = \dots = \alpha_{q-1} = \alpha$ modulo 1, le résultat dépend des paramètres comme le montre le théorème suivant.

Notons $\nu_0 = \inf\{\nu \in \mathbb{N} \mid E_0 \cap [\nu, +\infty[= E_1 \cap [\nu, +\infty[= \dots = E_{q-1} \cap [\nu, +\infty[\text{ (} := E_\infty \text{)}\}$.

THÉORÈME 4.2. Soient $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ non tous finis telle que $\Delta(\mathcal{E})$ est fini et α un nombre réel.

(i) Si q est pair, $\alpha = \frac{1}{2}$ et il existe $i \in \{0, \dots, \nu_0 - 1\}$ tel que $\text{card}\{d < q, i \in E_d\} = \text{card}\{d < q, i \notin E_d\}$ alors on a $\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) = o(N)$.

(ii) Dans tous les autres cas, on a $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \left| \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) \right| > 0$.

Ces théorèmes permettent de montrer plusieurs résultats concernant l'équidistribution de certaines suites arithmétiques (voir § 5).

4.1. Démonstration du théorème 4.1

Pour démontrer le théorème 4.1, nous allons commencer par montrer le lemme suivant.

LEMME 4.3. Sous les hypothèses du théorème 4.1, on a

$$\left| T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \leq q^\nu \varepsilon_\nu^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1})$$

avec $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \varepsilon_\nu^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = 0$.

Démonstration. En effet il résulte du lemme 3.3 que

$$\frac{1}{q^\nu} T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) = \prod_{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \in \{0, 1\}^q} \frac{(e(\delta_0 \alpha_0) + \dots + e(\delta_{q-1} \alpha_{q-1}))^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}}{q^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}}.$$

- Si $\Delta(\mathcal{E})$ est infini cela signifie qu'il existe $(\delta_0^*, \dots, \delta_{q-1}^*)$ différent à la fois de $(0, \dots, 0)$ et de $(1, \dots, 1)$ et tel que

$$\text{card } E_{\delta_0^*, \dots, \delta_{q-1}^*}(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut alors majorer $\frac{1}{q^\nu} T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1)$ par

$$\left(\frac{e(\delta_0^* \alpha_0) + \dots + e(\delta_{q-1}^* \alpha_{q-1})}{q} \right)^{\text{card } E_{\delta_0^*, \dots, \delta_{q-1}^*}(\nu)}$$

ce qui démontre le lemme dans ce premier cas puisque, si $E_d = \emptyset$, on a $\delta_d^* = 0$ et si $E_d \neq \emptyset$, on a $\alpha_d \notin \mathbb{Z}$ ce qui entraîne que l'on a $|e(\delta_0^* \alpha_0) + \dots + e(\delta_{q-1}^* \alpha_{q-1})| < q$ et

$$\varepsilon_\nu^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = \left(\frac{|e(\delta_0^* \alpha_0) + \dots + e(\delta_{q-1}^* \alpha_{q-1})|}{q} \right)^{\text{card } E_{\delta_0^*, \dots, \delta_{q-1}^*}(\nu)}$$

vérifie $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \varepsilon_\nu^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = 0$.

- Si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini, cela entraîne que $\bigcap_{d < q} E_d = E_{1, \dots, 1}$ est infini.

On peut alors majorer $\frac{1}{q^\nu} T_{\nu, q^\nu}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1)$ par

$$\left(\frac{e(\alpha_0) + \dots + e(\alpha_{q-1})}{q} \right)^{\text{card } E_{1, \dots, 1}(\nu)}$$

ce qui démontre le lemme dans ce deuxième cas puisque les nombres $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ n'étant pas tous égaux modulo 1, on a $|e(\alpha_0) + \dots + e(\alpha_{q-1})| < q$ et

$$\varepsilon_\nu^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = \left(\frac{|e(\alpha_0) + \dots + e(\alpha_{q-1})|}{q} \right)^{\text{card } E_{1, \dots, 1}(\nu)}$$

vérifie $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \varepsilon_\nu^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = 0$, ce qui termine la preuve du lemme 4.3.

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4.1.

Démonstration. Soit $N = \ell_1 q^{\nu_1} + \dots + \ell_L q^{\nu_L}$, avec $\nu_1 > \dots > \nu_L$ et $\ell_i \in \{1, \dots, q-1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$.

On a

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1})| &= \left| S_N^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \\ &\leq \left| S_{\ell_1 q^{\nu_1}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| + \\ &\quad + \left| T_{\nu_1, \ell_2^{\nu_2} + \dots + \ell_L q^{\nu_L}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.1 (iii).

Or on a

$$\begin{aligned} \left| S_{\ell_1 q^{\nu_1}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| &\leq (q-1) \sum_{j < \nu_1} \left| T_{j, q^j}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| + \\ &\quad + (\ell_1 - 1) \left| T_{\nu_1, q^{\nu_1}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.1 (i) et (ii), et

$$\begin{aligned} \left| T_{\nu_1, \ell_2 q^{\nu_2} + \dots + \ell_L q^{\nu_L}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \\ \leq q \left(\left| T_{\nu_2, q^{\nu_2}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| + \dots + \left| T_{\nu_L, q^{\nu_L}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \right) \end{aligned}$$

en itérant le lemme 3.2 (ii) et en utilisant le lemme 3.2 (i).

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \right| &\leq (2q-1) \sum_{j \leq \nu_1} \left| T_{j, q^j}^{\mathcal{E}}(e(\alpha_0), \dots, e(\alpha_{q-1}), 1) \right| \\ &\leq (2q-1) \sum_{j \leq \nu_1} q^j \varepsilon_j^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.3 et donc

$$\frac{1}{N} \left| \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \right| \leq \frac{2q-1}{q^{\nu_1}} \sum_{j \leq \nu_1} q^j \varepsilon_j^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1})$$

ce qui entraîne, d'après le théorème de Césaro,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = 0$$

et achève ainsi la démonstration du théorème 4.1. $\square$

4.2. Démonstration de théorème 4.2

Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant :

LEMME 4.4. *La somme $\sum_{r < q^{\nu_0}} e\left((|r|_{\nu_0, 0}^{E_0} + |r|_1^{E_1} + \dots + |r|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right)$ est nulle si et seulement si q est pair, $\alpha = \frac{1}{2}$ et il existe $i \in \{0, \dots, \nu_0 - 1\}$ tel que $\text{card}\{d < q, i \in E_d\} = \text{card}\{d < q, i \notin E_d\}$.*

Démonstration. D'après les lemme 3.3, on a

$$\sum_{r < q^{\nu_0}} e\left((|r|_{\nu_0, 0}^{E_0} + |r|_1^{E_1} + \dots + |r|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= T_{\nu_0, q^{\nu_0}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha), \dots, e(\alpha), 1) \\
 &= \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \\ \in \{0,1\}^q}} (e(\delta_0\alpha) + \dots + e(\delta_{q-1}\alpha))^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)} \\
 &= \prod_{i < \nu_0} (e(\delta_0(i)\alpha) + \dots + e(\delta_{q-1}(i)\alpha)).
 \end{aligned}$$

La somme est donc nulle si et seulement si il existe $i \in \{0, \dots, \nu_0 - 1\}$ tel que

$$(e(\delta_0(i)\alpha) + \dots + e(\delta_{q-1}(i)\alpha)) = 0,$$

c'est-à-dire tel que

$$\text{card } \{d < q, i \notin E_d\} + \text{card } \{d < q, i \in E_d\}e(\alpha) = 0,$$

ce qui est possible si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\text{card } \{d < q, i \notin E_d\} = \text{card } \{d < q, i \in E_d\}$ (et donc q pair), ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.2

Démonstration. (i) Lorsque q est pair, $\alpha = \frac{1}{2}$ et qu'il existe $i \in \{0, \dots, \nu_0 - 1\}$ tel que $\text{card } \{d < q, i \notin E_d\} = \text{card } \{d < q, i \in E_d\}$, il résulte du lemme 4.4 que

$$\sum_{r < q^{\nu_0}} e\left((|r|_{\nu_0,0}^{E_0} + |r|_1^{E_1} + \dots + |r|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right) = 0.$$

Il résulte maintenant du lemme 3.3 que pour tout nombre entier $\nu \geq \nu_0$ on a

$$\begin{aligned}
 T_{\nu, q^{\nu}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha), \dots, e(\alpha), 1) &= \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \\ \in \{0,1\}^q}} (e(\delta_0\alpha) + \dots + e(\delta_{q-1}\alpha))^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)} \\
 &= T_{\nu_0, q^{\nu_0}}^{\mathcal{E}}(e(\alpha), \dots, e(\alpha), 1) \times \\
 &\quad \times \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \\ \in \{0,1\}^q}} (e(\delta_0\alpha) + \dots + e(\delta_{q-1}\alpha))^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}} \cap \{0, \dots, \nu-1\}} = 0.
 \end{aligned}$$

Les mêmes arguments que ceux présentés dans la fin de la démonstration du théorème 4.1 permettent donc de montrer, en écrivant N sous la forme $N = \ell_1 q^{\nu_1} + \dots + \ell_L q^{\nu_L}$ avec $\nu_1 > \dots > \nu_L$ et $\ell_i \in \{1, \dots, q-1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$, que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) = 0$.

(ii) Lorsque q est impair, ou lorsque $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ou lorsque pour tout $i \in \{0, \dots, \nu_0 - 1\}$ on a $\text{card}\{d < q, i \in E_d\} \neq \text{card}\{d < q, i \notin E_d\}$, il résulte du lemme 4.4 que

$$\sum_{r < q^{\nu_0}} e\left((|r|_{\nu_0,0}^{E_0} + |r|_1^{E_1} + \dots + |r|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right) \neq 0.$$

Pour démontrer que $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} |\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha)| > 0$ il suffit de vérifier que

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^{\nu}} \left| \sum_{q^{\nu} \leq n < q^{\nu+1}} e\left((|n|_0^{E_0} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right) \right| > 0.$$

En effet, si l'on avait $\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) = o(N)$ on aurait $\mathcal{W}_{q^{\nu}}^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) = o(q^{\nu})$ et donc

$$\sum_{q^{\nu} \leq n < q^{\nu+1}} e\left((|n|_0^{E_0} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right) = \mathcal{W}_{q^{\nu+1}}^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) - \mathcal{W}_{q^{\nu}}^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha) = o(q^{\nu}).$$

Considérons donc la somme par paquet

$$S = \sum_{q^{\nu} \leq n < q^{\nu+1}} e\left((|n|_0^{E_0} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right)$$

et remarquons que pour tout nombre entier n tel que $q^{\nu} \leq n < q^{\nu+1}$, on a

$$\begin{aligned} |n|_0^{E_0} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1}} &= |n|_0^{E_{\infty}} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1}} + |n|_{\nu_0,0}^{E_0 \cap \{0, \dots, \nu_0-1\}} + \\ &\quad + |n|_1^{E_1 \cap \{0, \dots, \nu_0-1\}} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1} \cap \{0, \dots, \nu_0-1\}} \\ &= \text{card}(E_{\infty}(\nu+1)) + \varphi_{\nu_0}(n) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varphi_{\nu_0}(n) = |n|_{\nu_0,0}^{E_0 \cap \{0, \dots, \nu_0-1\}} + |n|_1^{E_1 \cap \{0, \dots, \nu_0-1\}} + \dots + |n|_{q-1}^{E_{q-1} \cap \{0, \dots, \nu_0-1\}}.$$

On a donc, en effectuant la division euclidienne de $n \in [q^{\nu}, q^{\nu+1}[$ par q^{ν_0} :

$$\begin{aligned} S &= e\left(\text{card}(E_{\infty}(\nu+1))\alpha\right) \sum_{q^{\nu} \leq n < q^{\nu+1}} e(\varphi_{\nu_0}(n)\alpha) \\ &= e\left(\text{card}(E_{\infty}(\nu+1))\alpha\right) \sum_{q^{\nu-\nu_0} \leq m < q^{\nu-\nu_0+1}} \sum_{r < q^{\nu_0}} e(\varphi_{\nu_0}(mq^{\nu_0} + r)\alpha) \\ &= (q-1) e\left(\text{card}(E_{\infty}(\nu+1))\alpha\right) q^{\nu-\nu_0} \sum_{r < q^{\nu_0}} e(\varphi_{\nu_0}(r)\alpha), \end{aligned}$$

et en particulier

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^\nu} |S| &= (q-1) \frac{1}{q^{\nu_0}} \left| \sum_{r < q^{\nu_0}} e(\varphi_{\nu_0}(r)\alpha) \right| \\ &= (q-1) \frac{1}{q^{\nu_0}} \left| \sum_{r < q^{\nu_0}} e\left((|r|_{\nu_0,0}^{E_0} + |r|_1^{E_1} + \dots + |r|_{q-1}^{E_{q-1}})\alpha\right) \right| > 0, \end{aligned}$$

ce qui achève ainsi la démonstration du théorème 4.2 $\square$

5. Application à l'étude de la répartition modulo 1 des fonctions digitales restreintes

L'objet de cette partie est d'appliquer les théorèmes 4.1 et 4.2 à l'étude de la répartition modulo 1 de certaines fonctions digitales restreintes.

Rapellons qu'une suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^t$ ($t \in \mathbb{N}$) si pour tout $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in [0, 1[^t$ et pour tout $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_t) \in [0, 1[^t$ tel que $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{card} \{n < N, \{\mathbf{u}_n\} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}[\} = (\beta_1 - \alpha_1) \dots (\beta_t - \alpha_t).$$

Le critère de Weyl (voir [12] ou [26]) permet de ramener l'étude de l'équirépartition modulo 1 à l'estimation de sommes d'exponentielles :

THÉORÈME (Critère de Weyl). *La suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^t$ si et seulement si pour tout $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^t \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, on a*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(\langle \mathbf{h}, \mathbf{u}_n \rangle) = 0,$$

où l'on dénote par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^t$.

Soient $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ une famille de sous ensembles de $\mathbb{N}$ non tous finis et $(h_0, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q$ un q -uplet de nombres entiers non tous nuls et f définie pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = h_0 |n|_0^{E_0} + \dots + h_{q-1} |n|_{q-1}^{E_{q-1}}$.

Notre premier résultat concerne l'étude de la répartition modulo 1 de la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ où α est un nombre réel.

THÉORÈME 5.1. *Soit $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ une famille de sous-ensemble $\mathbb{N}$ non tous finis.*

- (i) Si $\Delta(\mathcal{E})$ est infini, alors la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (ii) Si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini alors
- s'il existe $(d, d') \in \{0, \dots, q-1\}^2$ tel que $h_d \neq h_{d'}$, la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - si pour tout $(d, d') \in \{0, \dots, q-1\}^2$ on a $h_d = h_{d'}$, la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est jamais équirépartie modulo 1.

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs modulo 1 et n'est donc clairement pas équirépartie.

- (i) Si $\Delta(\mathcal{E})$ est infini, il résulte du théorème 4.1 que l'on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\sum_{n < N} e(pf(n)\alpha) = \sum_{n < N} e\left(ph_0\alpha|n|_0^{E_0} + \dots + ph_{q-1}\alpha|n|_{q-1}^{E_{q-1}}\right) = o(N)$$

et donc, d'après le critère Weyl, que la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- (ii) Si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\sum_{n < N} e(pf(n)\alpha) = \sum_{n < N} e\left(ph_0\alpha|n|_0^{E_0} + \dots + ph_{q-1}\alpha|n|_{q-1}^{E_{q-1}}\right).$$

- S'il existe $(d, d') \in \{0, \dots, q-1\}^2$ tel que $h_d \neq h_{d'}$ alors l'irrationalité de α entraîne que pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a $ph_d\alpha \neq ph_{d'}\alpha$ et il résulte donc du théorème 4.1 que l'on a $\sum_{n < N} e(pf(n)\alpha) = o(N)$ et donc

d'après le critère de Weyl, que la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Si pour tout $(d, d') \in \{0, \dots, q-1\}^2$ on a $h_d = h_{d'}$ alors posons, pour tout p fixé, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $ph_0\alpha = \dots = ph_{q-1}\alpha = \bar{\alpha}$ où $\bar{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a ainsi $\sum_{0 < n < N} e(pf(n)\alpha) = \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha})$ et il résulte donc du théorème 4.2

que l'on a $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} e(pf(n)\alpha) \right| > 0$ et donc, d'après le critère

de Weyl, que la suite $(f(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est jamais équirépartie modulo 1, ce qui achève ainsi la démonstration du théorème 5.1.

□

Le corollaire suivant concerne le cas particulier des fonctions sommes de chiffres restreintes.

COROLLAIRE 5.2. *Soit E_∞ un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. La suite*

$$(s_q^{E_\infty}(n)\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$$

est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Posons $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ avec $E_0 = \dots = E_{q-1} = E_\infty$. On a donc $\Delta(\mathcal{E}) = E_\infty \setminus E_\infty = \emptyset$ et $(h_0, \dots, h_{q-1}) = (0, \dots, q-1)$ et le corollaire 5.2 résulte donc immédiatement du théorème 5.1 (ii). $\square$

Les résultats suivants concernent l'étude de la répartition modulo 1 dans $\mathbb{R}^{\text{card } \mathcal{D}}$ de la suite multidimensionnelle $\left((|n|_d^{E_d} \alpha_d)_{d \in \mathcal{D}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(\alpha_d)_{d \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\text{card } \mathcal{D}}$.

THÉORÈME 5.3. *Soient $\mathcal{D} \subset \{0, \dots, q-1\}$ tel que $\text{card } \mathcal{D} = t < q$ et $(E_d)_{d \in \mathcal{D}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ non tous finis. Alors la suite*

$$\left((|n|_d^{E_d} \alpha_d)_{d \in \mathcal{D}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^t$ si et seulement si $(\alpha_d)_{d \in \mathcal{D}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^t$.

Démonstration. S'il existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\alpha_{d_0} \in \mathbb{Q}$, alors la suite

$$\left(|n|_{d_0}^{E_{d_0}} \alpha_{d_0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs modulo 1 et la suite $\left((|n|_d^{E_d} \alpha_d)_{d \in \mathcal{D}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^t$.

Supposons maintenant que $(\alpha_d)_{d \in \mathcal{D}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^t$ et pour tout $(p_d)_{d \in \mathcal{D}} \in \mathbb{Z}^t \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ fixé, posons

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_d &= p_d \alpha_d && \text{pour tout } d \in \mathcal{D} \text{ et} \\ \bar{\alpha}_d &= 0 && \text{pour tout } d \in \{0, \dots, q-1\} \setminus \mathcal{D} \end{aligned}$$

et considérons la famille $\mathcal{E} = (\bar{E}_0, \dots, \bar{E}_{q-1})$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} \bar{E}_d &= E_d && \text{si } d \in \mathcal{D} \text{ et } p_d \neq 0 \\ \bar{E}_d &= \emptyset && \text{si } d \in \mathcal{D} \text{ et } p_d = 0 \text{ ou si } d \in \{0, \dots, q-1\} \setminus \mathcal{D}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{n < N} e\left(\sum_{d \in \mathcal{D}} p_d \alpha_d |n|_d^{E_d}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e(\bar{\alpha}_0 |n|_0^{\bar{E}_0} + \dots + \bar{\alpha}_{q-1} |n|_{q-1}^{\bar{E}_{q-1}})$$

$$= o(N)$$

d'après le théorème 4.1 car d'une part $\mathcal{D}$ étant strictement inclus dans $\{0, \dots, q-1\}$, il existe au moins un $\bar{\alpha}_d$ nul et d'autre part il existe au moins un $d \in \mathcal{D}$ pour lequel $\bar{\alpha}_d = p_\alpha \alpha_d$ est non nul modulo 1.

Il résulte donc du critère de Weyl que la suite $\left((|n|_d^{E_d} \alpha_d)_{d \in \mathcal{D}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^t$ pour tout $(\alpha_d)_{d \in \mathcal{D}} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^t$, ce qui achève la démonstration du théorème 5.3. $\square$

THÉORÈME 5.4. *Soit $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ non tous finis.*

- (i) *Si $\Delta(\mathcal{E})$ est infini, alors la suite $(|n|_0^{E_0} \alpha_0, \dots, |n|_{q-1}^{E_{q-1}} \alpha_{q-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^q$ si et seulement si $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^q$.*
- (ii) *Si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini, alors la suite $(|n|_0^{E_0} \alpha_0, \dots, |n|_{q-1}^{E_{q-1}} \alpha_{q-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^q$ si et seulement si $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^q \setminus (\mathbb{R} \cdot \mathbb{Q})^q$.*

Démonstration. S'il existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\alpha_{d_0} \in \mathbb{Q}$, alors la suite

$$(|n|_{d_0}^{E_{d_0}} \alpha_{d_0})_{n \in \mathbb{N}}$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs modulo 1 et la suite

$$(|n|_0^{E_0} \alpha_0, \dots, |n|_{q-1}^{E_{q-1}} \alpha_{q-1})_{n \in \mathbb{N}}$$

n'est donc en aucun cas équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^q$.

Supposons maintenant que $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^q$ et considérons $(p_0, \dots, p_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

- (i) Si $\Delta(\mathcal{E})$ est infini, il résulte du théorème 4.1 que l'on a

$$\sum_{n < N} e\left(p_0 \alpha_0 |n|_0^{E_0} + \dots + p_{q-1} \alpha_{q-1} |n|_{q-1}^{E_{q-1}}\right) = o(N)$$

et donc, d'après le critère de Weyl, que la suite $(\alpha_0 |n|_0^{E_0}, \dots, \alpha_{q-1} |n|_{q-1}^{E_{q-1}})_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^q$ pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^q$.

- (ii) Si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini et si $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^q \setminus (\mathbb{R} \cdot \mathbb{Q})^q$ il résulte du théorème 4.1 que l'on a

$$\sum_{n < N} e\left(p_0 \alpha_0 |n|_0^{E_0} + \dots + p_{q-1} \alpha_{q-1} |n|_{q-1}^{E_{q-1}}\right) = o(N)$$

et donc d'après le critère de Weyl que la suite $(\alpha_0|n|_0^{E_0}, \dots, \alpha_{q-1}|n|_{q-1}^{E_{q-1}})_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^q$ pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^q \setminus (\mathbb{R} \cdot \mathbb{Q}^q)$.

Réciproquement, supposons que $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in (\mathbb{R} \cdot \mathbb{Q}^q) \setminus \mathbb{Q}^q$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $(p_0, \dots, p_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q$ tels que $p_0\alpha_0 = \dots = p_{q-1}\alpha_{q-1} = \alpha$.

On a alors

$$\sum_{0 < n < N} e\left(p_0\alpha_0|n|_0^{E_0} + \dots + p_{q-1}\alpha_{q-1}|n|_{q-1}^{E_{q-1}}\right) = \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}(\alpha, \dots, \alpha)$$

et il résulte du théorème 4.2 que

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} e\left(p_0\alpha_0|n|_0^{E_0} + \dots + p_{q-1}\alpha_{q-1}|n|_{q-1}^{E_{q-1}}\right) \right| > 0$$

ce qui entraîne, d'après le critère de Weyl, que la suite $(\alpha_0|n|_0^{E_0}, \dots, \alpha_{q-1}|n|_{q-1}^{E_{q-1}})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{R}^q$ et ce qui achève la démonstration du théorème 5.4.

□

6. Répartition modulo 1 des suites arithmétiques définies par des conditions digitales restreintes

L'objet de ce section est d'étudier pour tout $(m_0, \dots, m_{q-1}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^q$ tel que $\text{pgcd}(m_0, \dots, m_{q-1}) = 1$ et pour tout $(a_0, \dots, a_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q$ fixés, les propriétés statistiques de l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N}, \forall d \in \{0, \dots, q-1\}, |n|_d^{E_d} \equiv a_d \pmod{m_d}\}$$

et de la suite croissante formée des éléments de cet ensemble.

PROPOSITION 6.1.

$$\text{card } E(N) = \frac{N}{m_0 m_1 \dots m_{q-1}} + o(N).$$

Démonstration. Les relations classiques d'orthogonalité

$$\frac{1}{m} \sum_{j < m} e\left(\frac{jn}{m}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \mid n \\ 1 & \text{si } m \nmid n \end{cases} \quad (6.1)$$

valables pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z})$ nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
 \text{card } E(N) &= \sum_{n < N} \prod_{d < q} \frac{1}{m_d} \sum_{j < m_d} e\left(j \frac{(|n|_d^{E_d} - a_d)}{m_d}\right) \\
 &= \frac{1}{m_0 \cdots m_{q-1}} \sum_{\substack{(j_0, \dots, j_{q-1}) \\ \in \{0, \dots, m_0-1\} \times \\ \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1}-1\}}} \sum_{n < N} e\left(j_0 \frac{(|n|_0^{E_0} - a_0)}{m_0} + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + j_{q-1} \frac{(|n|_{q-1}^{E_{q-1}} - a_{q-1})}{m_{q-1}}\right) \\
 &= \frac{1}{m_0 \cdots m_{q-1}} \sum_{\substack{(j_0, \dots, j_{q-1}) \\ \in \{0, \dots, m_0-1\} \times \\ \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1}-1\}}} e\left(-\left(\frac{j_0 a_0}{m_0} + \cdots + \frac{j_{q-1} a_{q-1}}{m_{q-1}}\right)\right) \times \\
 &\quad \times \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}\right) + \mathcal{O}(1) \\
 &= \frac{N}{m_0 \cdots m_{q-1}} + \\
 &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_0 \cdots m_{q-1}} \sum_{\substack{(j_0, \dots, j_{q-1}) \\ \in \{0, \dots, m_0-1\} \times \\ \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1}-1\} \\ \setminus (0, \dots, 0)}} \left| \mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}\right) \right|\right).
 \end{aligned}$$

Si $\Delta(\mathcal{E})$ est infini, il résulte du théorème 4.1 que pour tout $(j_0, \dots, j_{q-1}) \in \{0, \dots, m_0 - 1\} \times \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1} - 1\} \setminus (0, \dots, 0)$, on a $\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}\right) = o(N)$.

Si $\Delta(\mathcal{E})$ est fini et $(m_0, \dots, m_{q-1}) = 1$ alors pour tout $(j_0, \dots, j_{q-1}) \in \{0, \dots, m_0 - 1\} \times \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1} - 1\} \setminus (0, \dots, 0)$, les nombres rationnels $\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}$ ne sont pas tous égaux entre eux modulo 1 et il résulte encore du théorème 4.1 que $\mathcal{W}_N^{\mathcal{E}}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}\right) = o(N)$, ce qui termine la preuve de la proposition 6.1. $\square$

REMARQUE 6.2. Lorsque $\Delta(\mathcal{E})$ est fini et que $(m_0, \dots, m_{q-1}) \geq 2$, des phénomènes d'oscillation apparaissent et rendent l'estimation de $\text{card } E(N)$ plus délicate. L'exemple suivant en est une illustration.

EXEMPLE. Pour $q = 2$, $E_0 = E_1 = \mathbb{N}$, $(m_0, m_1) = (2, 2)$ et $(a_0, a_1) = (0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \text{card } E(2^N) &= \text{card } \{n < 2^N, |n|_0 \equiv |n|_1 \equiv 0 \pmod{2}\} \\ &= \sum_{k < N} \text{card } \{2^k \leq n < 2^{k+1}, |n|_0 \equiv |n|_1 \equiv 0 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \text{card } \{2^k \leq n < 2^{k+1}, |n|_0 \equiv |n|_1 \equiv 0 \pmod{2}\} \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ C_k^1 + C_k^3 + \dots + C_k^k = 2^{k-1} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit par sommation que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^N} \text{card } E(4^N) = \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^N} \text{card } E(2 \cdot 4^N) = \frac{1}{6}.$$

THÉORÈME 6.3. Soient $\mathcal{E} = (E_0, \dots, E_{q-1})$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ et α un nombre réel. Alors la suite $(n\alpha)_{n \in E}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ la suite $(n\alpha)_{n \in E}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs modulo 1 et n'est donc clairement pas équirépartie.

D'après le critère de Weyl le théorème 6.3 est donc équivalent au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et pour tout $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a

$$\sum_{n \in E(N)} e(nh\alpha) = o(\text{card } E(N)),$$

c'est-à-dire au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on a

$$\sum_{n \in E(N)} e(n\alpha) = o(\text{card } E(N)).$$

En utilisant à nouveau les relations d'orthogonalité (6.1) on a

$$\sum_{n \in E(N)} e(n\alpha) = \sum_{n < N} \left(\prod_{d < q} \frac{1}{m_d} \sum_{j < m_d} e\left(j \frac{|n|_d^{E_d} - a_d}{m_d}\right) \right) e(n\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m_0 m_1 \cdots m_{q-1}} \sum_{\substack{(j_0, \dots, j_{q-1}) \\ \in \{0, \dots, m_0-1\} \times \\ \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1}-1\}}} \sum_{n < N} e\left(j_0 \frac{(|n|_0^{E_0} - a_0)}{m_0} + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + j_{q-1} \frac{(|n|_{q-1}^{E_{q-1}} - a_{q-1})}{m_{q-1}} + n\alpha\right) \\
 &= \frac{1}{m_0 m_1 \cdots m_{q-1}} \sum_{\substack{(j_0, \dots, j_{q-1}) \\ \in \{0, \dots, m_0-1\} \times \\ \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1}-1\}}} e\left(-\left(\frac{j_0 a_0}{m_0} + \cdots + \frac{j_{q-1} a_{q-1}}{m_{q-1}}\right)\right) \times \\
 &\quad \times \mathcal{W}_N^\mathcal{E}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha\right) + \mathcal{O}(1)
 \end{aligned}$$

et il suffit donc pour démontrer le théorème 6.3 de démontrer que pour tout $(j_0, \dots, j_{q-1}) \in \{0, \dots, m_0 - 1\} \times \cdots \times \{0, \dots, m_{q-1}\}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a

$$\left| \mathcal{W}_N^\mathcal{E}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha\right) \right| = o(\text{card } E(N)).$$

Pour cela, posons pour tout nombre entier strictement positif ν

$$\mathcal{E}_\nu^\mathcal{E}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha\right) = \frac{1}{q^\nu} \left| T_{\nu, q^\nu}^\mathcal{E}\left(e\left(\frac{j_0}{m_0}\right), \dots, e\left(\frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}\right), e(\alpha)\right) \right|.$$

D'après le lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{E}_\nu^\mathcal{E}\left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha\right) \\
 &= \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \\ \in \{0, 1\}^q}} \times \\
 &\quad \times \prod_{\substack{r \in \\ E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}} \frac{\left| e\left(\frac{\delta_0 j_0}{m_0}\right) + e\left(\frac{\delta_1 j_1}{m_1} + q^\nu \alpha\right) + \cdots + e\left(\frac{\delta_{q-1} j_{q-1}}{m_{q-1}} + (q-1)q^r \alpha\right) \right|}{q^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}} \\
 &\leq \prod_{\substack{(\delta_0, \dots, \delta_{q-1}) \in \{0, 1\}^q \\ E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}} \text{ est infini}}} \times \\
 &\quad \times \prod_{\substack{r \in \\ E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}} \frac{\left| e\left(\frac{\delta_0 j_0}{m_0}\right) + e\left(\frac{\delta_1 j_1}{m_1} + q^\nu \alpha\right) + \cdots + e\left(\frac{\delta_{q-1} j_{q-1}}{m_{q-1}} + (q-1)q^r \alpha\right) \right|}{q^{\text{card } E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}(\nu)}}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_\nu \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right) = 0$ car sinon cela signifierait que l'on aurait pour tout q -uplet $(\delta_0, \dots, \delta_{q-1})$ tel que $E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}$ est infini, $\lim_{r \in E_{\delta_0, \dots, \delta_{q-1}}} q^r \alpha = \delta_0 \frac{j_0}{m_0} - \delta_1 \frac{j_1}{m_1} = \delta_1 \frac{j_1}{m_1} - \delta_2 \frac{j_2}{m_2} = \dots = \delta_{q-2} \frac{j_{q-2}}{m_{q-2}} - \delta_{q-1} \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}$, ce qui impliquerait que la suite $(q^\nu \alpha)_{\nu \in \mathbb{N}}$ admettrait un nombre fini de points d'accumulations, contrairement à notre hypothèse ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Soit maintenant $N = \ell_1 q^{\nu_1} + \dots + \ell_L q^{\nu_L}$, avec $\nu_1 > \dots > \nu_L$ et $\ell_i \in \{1, \dots, q-1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$.

On obtient, en procédant comme dans la fin de la démonstration du théorème 4.1

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{W}_N^\mathcal{E} \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right) \right| &\leq (2q-1) \sum_{j \leq \nu_1} \left| T_{j, q^j}^\mathcal{E} \left(e \left(\frac{j_0}{m_0} \right), \dots, e \left(\frac{j_{q-1}}{m_{q-1}} \right), e(\alpha) \right) \right| \\ &\leq (2q-1) \sum_{j \leq \nu_1} q^j \mathcal{E}_j^\mathcal{E} \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{N} \left| \mathcal{W}_N^\mathcal{E} \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right) \right| \leq \frac{2q-1}{q^{\nu_1}} \sum_{j \leq \nu_1} q^j \mathcal{E}_j^\mathcal{E} \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right),$$

ce qui entraîne d'après le théorème de Césaro

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \mathcal{W}_N^\mathcal{E} \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right) = 0,$$

et donc

$$\mathcal{W}_N^\mathcal{E} \left(\frac{j_0}{m_0}, \dots, \frac{j_{q-1}}{m_{q-1}}, \alpha \right) = o(\text{card } E(N)),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 6.3. $\square$

7. Annexe

Représentation graphique des sommes de Weyl associées aux suites $(\frac{1}{3}|n|_0^{E_0} + \frac{1}{4}|n|_1^{E_1})_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $q = 2$ pour quatre exemples de couples d'ensembles (E_0, E_1) (on désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers) :

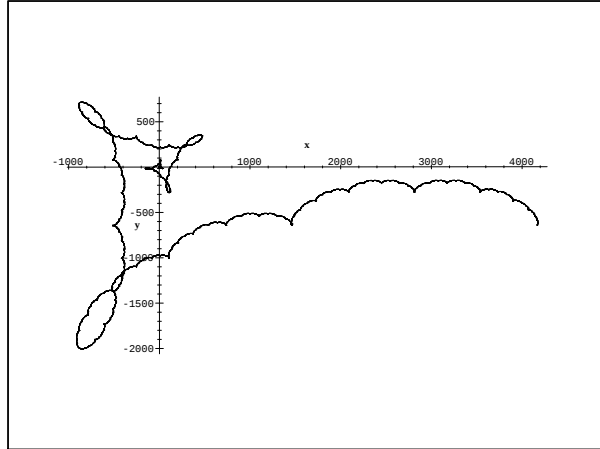


FIGURE 2. $(E_0, E_1) = (\mathbb{N}, \mathbb{N})$

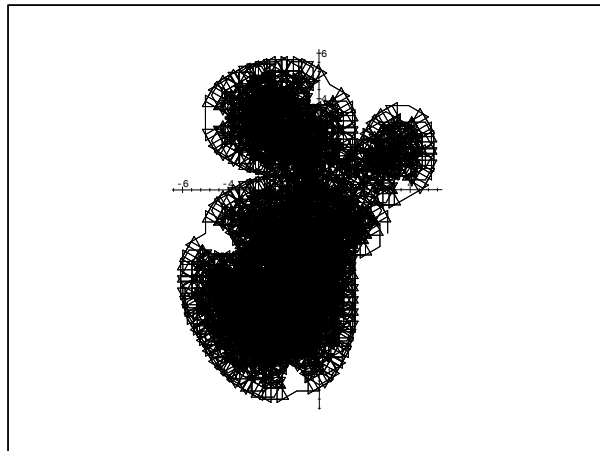


FIGURE 3. $(E_0, E_1) = (2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1)$

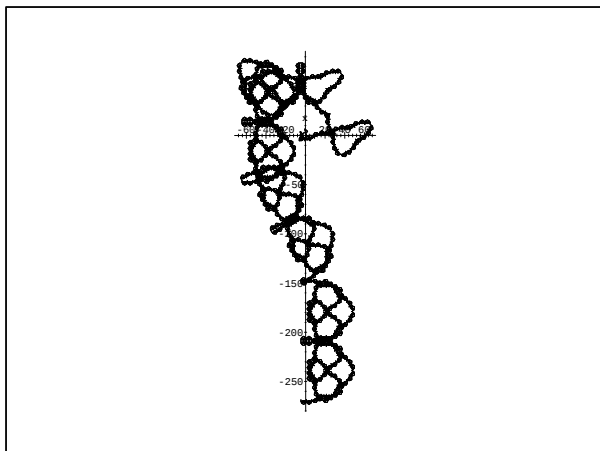


FIGURE 4. $(E_0, E_1) = (2\mathbb{N}, 3\mathbb{N})$

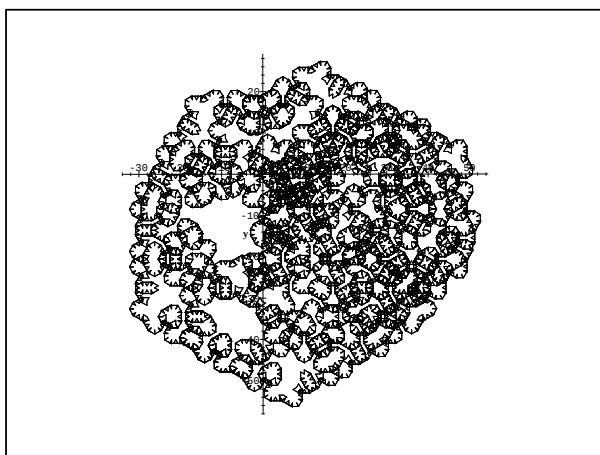


FIGURE 5. $(E_0, E_1) = (\mathbb{N}, \mathbb{P})$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLOUCHE, J.P. – SHALLIT, J.: *The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence*, In: Sequences and their applications, Proceedings of SETA'98, C. Ding, T. Helleseth and H. Niederreiter, ed. (1999), Springer-Verlag, pp. 1-16.
- [2] ALLOUCHE, J.P. – SHALLIT, J.: *Automatic sequences*, Cambridge University Press (2003).
- [3] BELLMAN, R. – SHAPIRO, H.N.: *A problem in additive number theory*, Ann. of Math. **49** (1948), 333-340.
- [4] BERTHÉ, V. – FERENCZI, S. – MAUDUIT, C. – SIEGEL, A.: *Introduction to Finite Automata and Substitution Dynamical Systems*, Lectures Notes in Mathematics **1794** (2002), Springer, Berlin.
- [5] COQUET, J.: *Sur certain suites uniformément équiréparties modulo un*, Acta Arithmetica **36** (1980), 157-162.
- [6] COQUET, J.: *Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition*, J. Number Theory **16** (1983), 363-375.
- [7] DEKKING, F.M. – MENDÈS FRANCE, M.: *Uniform distribution modulo one: a geometrical viewpoint*, J. Reine Angew. Math. **329** (1981), 143-153.
- [8] DRMOTA, M. – MAUDUIT, C.: *Weyl sums over integers with linear digit restrictions*, J. Number Theory **130** (2010), no. 11, 2404-2427.
- [9] FOUVRY, E. – MAUDUIT, C.: *Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne*, J. Number Theory **114** (2005), 135-152.
- [10] GELFOND, A.O.: *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arith. **13** (1968), 259-265.
- [11] KEANE, M.: *Generalized Morse sequences*, Z. Wahr. Verw. Geb. **10** (1968), 335-353.
- [12] KUIPERS, L. – NIEDERREITER, H.: *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 1974. Reprint edition Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2006.
- [13] MARTIN, J.C.: *Generalized Morse sequences on n symbols*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 379-383.
- [14] MARTIN, J.C.: *The structure of generalized Morse minimal sets on n symbols*, Trans. Amer. Math. Soc. **232** (1977), 343-355.
- [15] MAUDUIT, C.: *Automates finis et ensembles normaux*, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 1-25.
- [16] MAUDUIT, C.: *Morphisme unispectraux*, Theor. Comp. Sc. **46** (1986), 1-11.
- [17] MAUDUIT, C.: *Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque*, J. Number Theory **29** (1988), 235-250.
- [18] MAUDUIT, C.: *Caractérisation des ensembles normaux substitutifs*, Invent. Math. **95** (1989), 133-147.
- [19] MAUDUIT, C.: *Multiplicative properties of the Thue-Morse sequence*, Period. Math. Hungar. **43** (2001), no. 1-2, 137-153.
- [20] MAUDUIT, C.: *Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), no. 7, 2525-2549.
- [21] MAUDUIT, C. – MOSSÉ, B.: *Suites de G_p -orbite finie*, Acta Arith. **57** (1991), 69-82.
- [22] MAUDUIT, C. – POMERANCE, C. – SÁRKÖZY, A.: *On the distribution in residue classes of integers with fixed sum of digits*, The Ramanujan Journal **81** (2005), 45-62.
- [23] MAUDUIT, C. – SÁRKÖZY, A.: *On the arithmetic structure of sets characterized by sum of digits properties*, J. Number Theory **61** (1996), no. 1, 25-38.

- [24] MAUDUIT, C. – SÁRKÖZY, A.: *On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed*, Acta Arithmetica **81** (1997), no. 2, 145-137.
- [25] NEWMAN, D.J.: *On the number of binary digits in a multiple of three*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 719-721.
- [26] RAUZY, G.: *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, Presses Universitaires de France, Le Mathématicien, No. 15, Collection SUP, Paris, 1976.

Received June 8, 2011
Accepted July 13, 2011

Christian Mauduit
Zaid Shawket
Université Aix-Marseille
Institut de Mathématique de Luminy
UMR 6206 CNRS
Campus de Luminy, case 907
13288 Marseille cedex 9
FRANCE
E-mail: mauduit@iml.univ-mrs.fr
shawket@iml.univ-mrs.fr