Prof. Dr. Th. Peternell
SS 2002

Übungen zur Analysis IV
- Blatt 1 -

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $A \subset G$ eine Menge ohne Häufungspunkt in G. Dann ist $G \setminus A$ ein Gebiet.

2. Sei $X := \{iy \mid y \in \mathbb{R},\ \mid y \mid \leq 1\} \cup \{z = x + iy \mid 0 < x \leq \frac{1}{4},\ y = \sin \frac{1}{x}\} \subset \mathbb{C}$, versehen mit der Euklidischen Metrik.
   Zeigen Sie: X ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.
   Skizze!

3. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit:
   (a) $f(z) = z^k \overline{z},\ k \in \mathbb{N}$
   (b) $g(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$

4. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $u(x + iy) := ax^2y - y^3 + x^2 + by^2$.
   Fr welche $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so daß$f = u + iv \in \mathcal{O}\ (\mathbb{C})$?
   Bestimmen Sie alle solche v !

5. Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen. $f : B \to \mathbb{R}$ heit harmonisch, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist und wenn gilt:
   $$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
   (a) Sei $f \in \mathcal{O}\ (B)$. Zeigen Sie: $Re\ f,\ Im\ f$ sind harmonisch.
   (b) Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ein reelles Polynom, d.h. $u(x, y) = \sum_{j,k=0}^{m} a_{jk} x^j y^k$.
   Sei u harmonisch.
   Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0, 0)$.
   Zeigen Sie: $f \in \mathbb{C}[z]$ mit $Re\ f = u$.

Abgabe:
Montag, den 29.04.2002, 10.15 Uhr