Prof. Dr. Th. Peternell
SS 2002

Übungen zur Analysis IV
- Blatt 6 -

1. (a) Berechnen Sie $\log(1+i)$ und $\log((3-3i)^5)$.
   (b) Geben Sie ein möglichst großes Gebiet an, auf dem sich $\log((1-z)^2)$ definieren läßt.
   (c) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial z}\arg$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\arg$.

2. Berechnen Sie die Laurentreihen von
   (a) $f(z) = \frac{5}{(z+1)(z-3)}$ auf $U_{1,3}(0)$,
   (b) $g(z) = \frac{1}{z(z-4)^2}$ auf $U_{1,2}(1)$,
   (c) $h(z) = \left(\exp(\frac{1}{z})\right)^{-1}$ auf $U_{0,\infty}(0)$.

3. Sei $f \in \mathcal{O}(U_{r,R}(z_0))$.
   Es gelte

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu \text{ fr alle } z \in U_{r,R}(z_0).$$

   Zeigen Sie: $a_\nu = b_\nu$ für alle ν.

4. Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten folgender Funktionen, und geben Sie im Fall von Polen die Ordnung an:
   (a) $\frac{z^4}{(z^4+16)^2}$,
   (b) $\frac{z^2-\pi^2}{\sin^2 z}$,
   (c) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z-2\pi i}$,
   (d) $(\cos\frac{1}{z})^{-1}$.

5. Sei z_0 eine nicht-hebbare Singularität von f.
   Zeigen Sie: e^f hat eine wesentliche Singularität in z_0.

Abgabe: Montag, den 10.6.2002, 10.13 Uhr