**Prof. Dr. Th. Peternell**
**SS 2002**

# Übungen zur Analysis IV
## - Blatt 5 -

1. (a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f_n : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, $f_n \mid G \in \mathcal{O}(G)$.
   $(f_n \mid \partial G)$ konvergiere gleichmäßig.
   Dann konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, und $f \mid G$ ist holomorph.

   (b) Sei $A \subset G$ diskret, $f_n \in \mathcal{O}(G), n \in \mathbb{N}$.
   $(f_n \mid G \setminus A)$ konvergiere kompakt.
   Zeigen Sie: $(f_n)$ konvergiert kompakt.

2. Bestimmen Sie alle $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f_1^2 + f_2^2 = 1$.

3. (a) Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete.
   Ist $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend, so ist $G_1 \cup G_2$ einfach zusammenhängend.

   (b) Untersuchen Sie die Gebiete

   $$\mathbb{C}^* \setminus [0,1] \text{ und } \{z \in \mathbb{C} \mid \mid z \mid < 1\} \setminus \left( \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \right)$$

   auf einfachen Zusammenhang.

4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, so daß

   $$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mid z \mid \leq 1\} \subset U.$$

   Gibt es $f \in \mathcal{O}(U)$, so daß $f(z) = \frac{1}{z^2}$ fr alle $z \in \partial D$?

5. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall mit $I \subset G \cap \mathbb{R}$.
   Sei $z_0 \in I$.
   Sei $f \in \mathcal{O}(G)$, es gelte $f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
   Sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ die Potenzreihenentwicklung um $z_0$.
   Zeigen Sie: $a_\nu \in \mathbb{R}$ fr alle $\nu$.

**Abgabe**: Montag, den 3.6.2002, 10.13 Uhr