1. Sei $P=\{a_0,a_1,\dots\}\subset U_1(0)$ eine diskrete Menge von Punkten, und h_i ein Hauptteil von a_i.

OE sei $0=|a_0|\le|a_1|\le|a_2|\le\dots$.

Falls $\lim\limits_{\nu\to\infty}|a_\nu|<1$, kann es wegen der Diskretheit von P nur endlich viele Punkte $a_0,\dots,a_n$ in P geben, und die Mittag-Lefflerverteilung wird durch

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu(z) \text{ gelöst.}$$

Sonst setze man für $\nu=1,2,\dots$ $r_\nu=(1-\frac{1}{\nu})|a_\nu|$, $D_\nu=\{z:|z|\le r_\nu\}$

Es ist $D_1\subset D_2\subset\dots$; $\bigcup D_\nu=U_1(0)$.

Weiter sei (ε_ν) eine Folge positiver Zahlen mit $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu<\infty$.

Der einzige Pol von h_ν liegt in a_ν; daher ist die Funktion h_ν in einer vollen Umgebung von $\overline{D}_\nu$ noch holomorph und kann dort somit durch ihre Taylorpolynome bezüglich 0 beliebig gut approximiert werden: Wählt man die Zahlen $K_\nu\in\mathbb{N}$ groß genug und bezeichnet man mit P_ν das Taylorpolynom von h_ν um 0 der Ordnung K_ν, so ist

$$|h_\nu(z)-P_\nu(z)|<\varepsilon_\nu \quad \forall z\in D_\nu$$

Sei D_ϱ ein Kreis um 0 mit Radius $0<\varrho<1$. Da D_ϱ in fast allen D_ν enthalten ist, gibt es ein ν_0, so daß für alle $\nu\ge\nu_0$ die h_ν holomorph in D_ϱ sind und dort der obigen Abschätzung

$$|h_\nu(z)-P_\nu(z)|\le\varepsilon_\nu \quad \forall z\in D_\varrho \text{ genügen.}$$

Daher konvergiert die unendliche Reihe $h_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(h_\nu-P_\nu)$ gleichmäßig auf D_ϱ.

ϱ war beliebig $\Rightarrow$ die Reihe konvergiert kompakt gegen eine meromorphe Grenzfunktion f.

Es bleibt zu zeigen, daß die Mittag-Leffler-Verteilung von f die gesuchte ist: Man wähle wieder zu $0<\varrho<1$ ein ν_0 wie oben, und zerlege

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{\nu=1} \big(h_\nu(z) - P_\nu(z)\big) + \sum_{\nu=\nu_0} \big(h_\nu(z) - P_\nu(z)\big)$$

Die unendliche Summe ist holomorph auf D_ϱ und leistet daher keinen Beitrag zu den Hauptteilen; die Hauptteile von f mit Entwicklungspunkten in D_ϱ sind also genau die Hauptteile der endlichen Summe, d.h. diejenigen h_ν, für die der Entwicklungspunkt a_ν zu D_ϱ gehört. Da $0<\varrho<1$ beliebig war, ist die Mittag-Leffler-Verteilung genau die gewünschte.

2. Bezeichnungen wie in Aufgabe 1.

$P = \{a_1, a_2, \dots\}$, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $h_n = \frac{1}{z-a_n}$, wähle $\varepsilon_\nu = \frac{2}{\nu^2}$

Taylorreihe von $\frac{1}{z-a_n}$ um 0: $\frac{1}{z-a_n} = -\frac{1}{a_n} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^\mu$

Dann ist nach Aufgabe 1 zu zeigen:

$$\exists k_\nu : \left| \frac{1}{z-a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} \sum_{\mu=0}^{k_\nu} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\mu \right| \le \varepsilon_\nu \text{ für } |z| \le \tfrac{1}{2}|a_\nu|$$

$$\left| -\frac{1}{a_\nu} \cdot \sum_{\mu=k_\nu+1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\mu \right| \le \frac{1}{|a_\nu|} \cdot \sum_{\mu=k_\nu+1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|a_\nu|}\right)^\mu \le 2 \cdot \sum_{\mu=k_\nu+1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\mu$$

$$\le 2 \cdot \frac{1}{1-(1-\frac{1}{\nu})} \cdot \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{k_\nu+1} = 2\nu \cdot \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{k_\nu+1}$$

wähle also $k_\nu \ge \frac{3\log\nu}{\log\nu - \log(\nu-1)}$!

3. Sei $\frac{1}{\cos z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ die Taylorentwicklung von $\frac{1}{\cos z}$ um 0

Da $0 = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos(-z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2 c_{2\nu+1} z^{2\nu+1}$, folgt $c_{2\nu+1} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu}$$

$$1 = \frac{1}{\cos z} \cdot \cos z = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{(2\nu)!} z^{2\nu} \right) =$$

$$= \sum_{v=0} F_{2v} \cdot z^{2v} \quad \text{mit} \quad F_{2v} = (-1)^v \sum_{k=0} \frac{E_{2k}}{(2k)!\,(2v-2k)!}$$

Für $v \geq 1$ ist $F_{2v} = 0$

$$\Rightarrow 0 = (2v)!\, F_{2v} = (-1)^v \sum_{k=0}^{v} \binom{2v}{2k} E_{2k} \Rightarrow E_{2v} = -(-1)^v \sum_{k=0}^{v-1} \binom{2v}{2k} E_{2k}$$

$\rightsquigarrow E_{2v} \in \mathbb{Z}$ nach Induktion.

4. Laut Vorlesung: $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{v \neq 0} \left(\frac{1}{z-v} + \frac{1}{v} \right)$ Konvergiert außerhalb der Polstellen kompakt

$$\Rightarrow g(z) = \frac{f\left(\frac{z}{2\pi i}\right)}{2\pi i} = \frac{1}{z} + \sum_{v \neq 0} \left(\frac{1}{z - 2\pi i v} + \frac{1}{2\pi i v} \right)$$ konvergiert kompakt

und hat Polstellen der Ordnung 1 und Residuum 1

$\Rightarrow g(z)$ und $\frac{1}{e^z - 1}$ unterscheiden sich nur durch eine holomorphe Funktion.

Laut Vorlesung: $f(z) = \pi \cot \pi z = \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi i \cdot \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1}$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \pi i \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{1}{2}(e^z + 1) \frac{1}{e^z - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{2}(e^z + 1) \cdot \left[\frac{1}{z} + \sum_{v \neq 0} \left(\frac{1}{z - 2\pi i v} + \frac{1}{2\pi i v} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{v \neq 0} \left(\frac{1}{z - 2\pi i v} + \frac{1}{2\pi i v} \right) + \underbrace{\frac{1}{2}(e^z - 1) \left[\frac{1}{z} + \sum_{v \neq 0} \frac{1}{z - 2\pi i v} + \frac{1}{2\pi i v} \right]}_{\text{holomorphe Funktion}}$$