Ana4-02
Blatt 8

1. $\lim_{s\to\infty}\int_s^{s+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}\,dz =$ $\qquad \left(a=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$

Parametrisierung: $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$
$t\mapsto s+t\cdot i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$= \lim_{s\to\infty}\int_0^1 i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{e^{-(s+ti\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2}}{1+e^{-2(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}(s+ti\sqrt{\frac{\pi}{2}})}}\,dt =$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{s\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-s^2-2sti\sqrt{\frac{\pi}{2}}+t^2\cdot\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}(s+\sqrt{\frac{\pi}{2}}ti+is-t\sqrt{\frac{\pi}{2}})}}\,dt =$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{s\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-s^2+t^2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-2sti\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}{1+e^{-2s\sqrt{\frac{\pi}{2}}+2t\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-2\pi ti-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}si}}\,dt = 0,$$

da $\lim_{s\to\infty} e^{-s^2+t^2\cdot\frac{\pi}{2}}=\lim_{s\to\infty} e^{-2s\sqrt{\frac{\pi}{2}}+2t\cdot\frac{\pi}{2}}=0$ und

$$\left|e^{-2sti\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right|=\left|e^{-2\pi it-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}si}\right|=1.$$

2. $$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+\frac13)(x+\frac23)}\,dx \overset{\text{Vorlesung}}{=} \frac{2\pi i}{1-e^{\pi i}}\left(\operatorname{res}_{-\frac13}\frac{\sqrt{x}}{(x+\frac13)(x+\frac23)}+\operatorname{res}_{-\frac23}\frac{\sqrt{x}}{(x+\frac13)(x+\frac23)}\right)$$

$$= \pi i\cdot\left(\frac{(-\frac13)^{\frac12}}{-\frac13+\frac23}+\frac{(-\frac23)^{\frac12}}{-\frac23+\frac13}\right) = 3\pi i\cdot \left(e^{-\frac12(\log 3-i\pi)}-e^{\frac12(\log\frac23+i\pi)}\right)$$

Hauptzweig der Wurzel: $z^{\frac12}=e^{\frac12\log|z|+i\cdot\frac12\cdot\arg z}$

$0<\arg z<2\pi$

$$\overset{e^{\frac12 i\pi}=i}{=} -3\pi\cdot\left(e^{-\frac12\log 3}-e^{\frac12\log\frac23}\right) = -3\pi\left(\frac{1}{\sqrt3}-\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)=\underline{\underline{\sqrt3\,\pi(\sqrt2-1)}}$$

3. $$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \overset{\text{Vorlesung}}{=} 2\pi i\operatorname{res}_i\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}} = 2\pi i\cdot\operatorname{res}_i\frac{1}{(z-i)^{n+1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}}_{:=f(z)}$$

$$=2\pi i\cdot f^{(n)}(i)\cdot\frac{1}{n!} = 2\pi i\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n)!}{n!}\cdot(i+i)^{-(2n+1)}\cdot\frac{1}{n!}=$$

i Pol $(n+1)$-ter Ordnung $\Rightarrow$ Residuum erhält man durch n-maliges Ableiten von $f(z)$ an der Stelle i

$$=2\pi\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{i^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\underline{\underline{\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}}}.$$

4. Mehrmalige Anwendung des Satzes von Rouché auf den Rand des Einheitskreises und

(a) $f(z) = z^{87} + 36 z^{57} + 71 z^4 + z^3 - z + 1$

$g(z) = 36 z^{57} + 71 z^4 + z^3 - z + 1$

$|f(z) - g(z)| = |z^{87}| = 1$

$|g(z)| \geq 71 - 36 - 1 - 1 - 1 = 32$

auf $\{|z| = 1\}$.

$\Rightarrow$ f hat genau so viele Nullstellen wie g im Einheitskreis

(b) $g(z) = 36 z^{57} + 71 z^4 + z^3 - z + 1$

$h(z) = 71 z^4$

$|g(z) - h(z)| \leq 36 + 1 + 1 + 1 = 39$

$|h(z)| = 71$

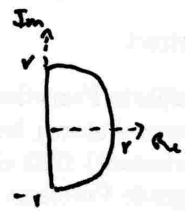
auf $\{|z| = 1\}$

$\Rightarrow$ g hat auf dem Einheitskreis 4 Nullstellen.

5. Reelle Lösung ist klar: $e^{-x} + x$ ist eine monoton wachsende Funktion

$e^{-0} + 0 = 1, \quad \lim_{x \to \infty} e^{-x} + x = \infty.$

Satz von Rouché auf



$f(z) = e^{-z_0} + z_0 - \lambda$

$g(z) = z_0 - \lambda$

$|f(z) - g(z)| \leq 1$ für $r \gg 0$

$g(z) \to \infty$ für $|z| \to \infty$.