Ana4-02
Blatt 7

1

1. a) Singularitäten von $f(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}$ bei $z=0$, $z = \pm i$

$\underline{z=0}$: Pol 1. Ordnung

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2} = \frac{1}{z} \cdot g_0(z), \quad g_0(0) = 5, \; g_0 \text{ holomorph um } 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f = 5$$

$\underline{z=i}$: Pol 2. Ordnung

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{z^2+z+5}{z(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot g_i(z),$$

g_i holomorph um $i \Rightarrow g_i(z) = g_i(i) + g_i'(i) \cdot (z-i) + \ldots$

$\Rightarrow \operatorname{res}_i f = g_i'(i)$

$$g_i'(z) = \frac{z(z+i)^2 \cdot (2z+1) - (z^2+z+5)\left[(z+i)^2 + z(z+i) \cdot 2\right]}{z^2(z+i)^4}$$

$\underline{z=-i}$: Wie $z=i$.

b) $\sin \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = (z-1)^{-1} + \ldots \Rightarrow$ ~~...~~ $\operatorname{res}_1 \sin\frac{1}{z-1} = 1$

c) $z e^{\frac{1}{1-z}} = (1-(1-z)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^k}{k!} = \cdots + (1-z)^{-1} - (1-z) \cdot (1-z)^{-2} \cdot \frac{1}{2!} - \ldots$

$= \ldots - \frac{1}{2}(z-1)^{-1} - \ldots \Rightarrow \operatorname{res}_1 z e^{\frac{1}{1-z}} = -\frac{1}{2}$

d) Singularitäten von $f(z)$ bei $z = \pm 2i$

$\underline{z=2i}$: Pol 2. Ordnung

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2} \cdot \frac{\cos z}{(z+2i)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2} \cdot g_{2i}(z), \quad g_{2i}(2i) = \frac{\cos 2i}{-16}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (e^{-2} + e^{2}) \cdot -\frac{1}{16} + 0$$

g_{2i} holomorph in $z = 2i$

$\Rightarrow g_{2i}(z) = g_{2i}(2i) + g_{2i}'(2i) \cdot (z-2i) + \ldots \Rightarrow \operatorname{res}_{2i} f = g_{2i}'(2i) = \ldots$

$\underline{z=-2i}$: Analog zu $z = 2i$

2. (a) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}\cdot \int_{\mathcal{K}(1,0)} \frac{dz}{z}\,\frac{1}{1+\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2} =$$

$$= -\frac{i}{4} \int_{\mathcal{K}(1,0)} \frac{dz}{z - \frac{1}{4}\frac{(z^2-1)^2}{z}} = -i \int_{\mathcal{K}(1,0)} \frac{z\,dz}{-z^4+6z^2-1} = i \int_{\mathcal{K}(1,0)} \overbrace{\frac{z\,dz}{z^4-6z^2+1}}^{f(z)}$$

NR: $x^2 - 6x + 1 = x^2 - 6x + 9 - 8 = 0$

$$(x-3)^2 = 8$$

$$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Seien ζ_1, ζ_2 die beiden Wurzeln von $3 - 2\sqrt{2}$:

$$= i \cdot 2\pi i \left(\mathrm{res}_{\zeta_1} f + \mathrm{res}_{\zeta_2} f\right)$$

Residuen werden wie oben ausgerechnet: $\mathrm{res}_{\zeta_1} f = \frac{f(\zeta_1)}{z-\zeta_1}$

$\mathrm{res}_{\zeta_2} f = \frac{f(\zeta_2)}{z-\zeta_2}$ usw.

(b) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}\,dx = \frac{1}{i}\int_{\mathcal{K}(1,0)} \frac{dz}{z}\cdot\frac{\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2}{\left[1-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^2} = -\frac{1}{4i}\int_{\mathcal{K}(1,0)} \frac{dz}{z}\cdot\frac{(z^2-1)^2}{z^2}\cdot\frac{4z^2}{(z^2-2z+1)^2}$$

$$= i \int_{\mathcal{K}(1,0)} \underbrace{\frac{(z+1)^2}{z(z-1)^2}}_{f(z)}\,dz = i\cdot 2\pi i\left(\underbrace{\mathrm{res}_0 f}_{1} + \mathrm{res}_1 f\right) = 2\pi$$

NR: $\mathrm{res}_1(f) = \left(\frac{(z+1)^2}{z}\right)'(1) = \frac{2z(z+1)-(z+1)^2}{z^2} = \frac{4-4}{1} = 0$

3. NR: $x^2 + 10x + 9 = (x+1)(x+9)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}}_{\substack{\shortparallel \\ f(z)}} \, dx = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res}_i f + \operatorname{res}_{3i} f \right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{i^2 - i + 2}{2i \cdot (-2i)(4i)} + \frac{9i^2 - 3i + 2}{2i \cdot 4i \cdot 6i} \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{-i+1}{16} + \frac{-3i-7}{-48} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{16} + \frac{7}{48} \right) = \pi \cdot \frac{5}{12}.$$

4. f meromorph $\Rightarrow \exists$ offene Mengen $U_1, U_2 \subset G$: $f|U_1$ holomorph, nicht konstant
$\frac{1}{f}|U_2$ holomorph, nicht konstant

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(U_1) \subset \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}} \text{ offen} \\ \frac{1}{f}(U_2) \subset \mathbb{C} \text{ offen} \Rightarrow f(U_2) \subset \hat{\mathbb{C}} \text{ offen} \end{array}\right\} \Rightarrow f(G) = U_1 \cup U_2 \subset \hat{\mathbb{C}} \text{ offen.}$$

5. f hat Stammfunktion auf $G \setminus D \Leftrightarrow$ Alle Wegintegrale $\int_\gamma f\,dz$ über geschlossene Wege γ in $G \setminus D$ sind 0

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Residuensatz}}}{\Leftrightarrow} 0 = \int_\gamma f\,dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{z_i \in D} u(\gamma, z_i) \operatorname{res}_{z_i} f = 0 \text{ für alle Wege } \gamma$$

$\Leftrightarrow \operatorname{res}_z f = 0 \;\; \forall z \in D$, da man zu jedem $z \in D$ diskret einen Weg γ findet, so daß $u(\gamma, z) = 1$, aber
$u(\gamma, z') = 0 \;\; \forall z' \in D, z' \neq z$.