1.(a) $\log(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\cdot\frac{\pi}{4} + 2\pi i\cdot k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$

$\log((3-3i)^5) = 5\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 2 + i\cdot\frac{3\pi}{4} + 2\pi i\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

(b) $G = \mathbb{C} - [1,\infty[$, die längs der reellen Achse ab 1 aufgeschnittene komplexe Ebene.

(f nimmt dort den Wert 0 nicht an, und G ist einfach-zusammenhängend)

(c) arg stetig in einer Umgebung von $z_0\in\mathbb{C}^*$

$\Rightarrow \exists$ Zweig f des Logarithmus in dieser Umgebung $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z},\ \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$

$\arg z = \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2i}\left(f(z) - \bar f(z)\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\arg z = \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{z} - 0\right) = \frac{1}{2iz}$

$\frac{\partial}{\partial \bar z}\arg = \frac{1}{2i}\cdot\left(-\frac{1}{\bar z}\right) = -\frac{1}{2i\bar z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \overline{\frac{\partial \bar f}{\partial z}}\right)$

2.(a) Partialbruchzerlegung: $\frac{5}{(z+1)(z-3)} = -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z-3}$

$= -\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} =$

$= -\frac{5}{4}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n =$

$= -\frac{5}{4}\cdot\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^{n-1}\cdot z^{n} - \frac{5}{12}\cdot\sum_{n=0}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot z^n$

(b) Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{z(z-4)^2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z-4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(z-4)^2} =$

$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = \frac{1}{16}\cdot\sum_{\nu=-1}(-1)^{\nu+1}\cdot(z-1)^{-\nu}$

$+ \frac{1}{64}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{4^\nu}\cdot z^\nu.$

(c) $\left[\exp\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} = \exp\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{-\infty}\frac{1}{(-n)!}(-1)^n z^n.$

Ana 4-02
Blatt 6

3. Sei $L_1(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, $L_2(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$

Integration von $(z-z_0)^{-n-1} L_1(z)$ über den Kreis $\mathcal{K}(z_0, \frac{r+R}{2})$

ergibt $\displaystyle\int_{\mathcal{K}(z_0, \frac{R+r}{2})} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = 2\pi i \cdot a_n$, da $(z-z_0)^k$ für $k \neq -1$ eine Stammfunktion in $U_{r,R}(z_0)$ besitzt.

Ebenso ergibt Integration von $(z-z_0)^{-n-1} L_2(z)$ den Wert $2\pi i \cdot b_n$

Da $f(z) = L_1(z) = L_2(z)$, folgt $a_n = b_n$.

4. (a) 4 Pole 2. Ordnung

(b) Pole 2. Ordnung bei 0, $\pm k\pi$, $k \geq 2$

Pole 1. Ordnung bei $\pm\pi$

(c) Pole 1. Ordnung bei 0, $\pm k\pi i$, $k \neq 2$, $-2\pi i$

(d) $\cos\frac{1}{z}$ hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$, da die Laurentreihe unendlich viele Terme im Hauptteil hat.

Die Aussage von Casorati-Weierstraß überträgt sich auf $(\cos\frac{1}{z})^{-1}$

$\Rightarrow (\cos\frac{1}{z})^{-1}$ hat wesentliche Singularität in 0.

Polstellen 1. Ordnung in $\frac{1}{k\cdot\pi + \frac{\pi}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$

5. z_0 wesentliche Singularität von f $\rightsquigarrow$ f erfüllt die Aussage von Casorati-Weierstraß

$\rightsquigarrow e^f$ — " — " —

$\Rightarrow e^f$ hat wesentliche Singularität in z_0

z_0 Polstelle von f $\rightsquigarrow$ Setze Laurentreihe von f um z_0 in Exponentialreihe ein

$\Rightarrow$ Laurentreihe von e^f hat unendlich viele Terme im Hauptteil.