1.(a) $f_n|\partial G$ konvergiert gleichmäßig $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n,m \geq N:$
$\|f_n - f_m\|_{\partial G} < \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} f_n - f_m \in \mathcal{O}(G) \\ f_n - f_m : \bar{G} \to \mathbb{C} \text{ stetig} \end{array}\right\} \underset{\text{Maximumprinzip}}{\Longrightarrow} |f_n - f_m| \text{ nimmt Maximum auf dem Rand } \partial G \text{ an}$$

$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\bar{G}} < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n$ konvergiert gleichmäßig auf $\bar{G}$ $\Rightarrow$ konvergiert gleichmäßig gegen stetiges $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$

$\overset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow} f|G \in \mathcal{O}(G)$ stetig

(b) $A \subset G$ diskret $\Rightarrow$ Für jedes $p \in A$ gibt es eine ε-Umgebung $U(p,\varepsilon)$, so daß $\overline{U(p,\varepsilon)} \cap A = \{p\}$.

$f_n|G \setminus A$ konvergiert kompakt $\Rightarrow f_n|\partial U(p,\varepsilon)$ konvergiert gleichmäßig

$\underset{(a)}{\Longrightarrow} f_n|\overline{U(p,\varepsilon)}$ konvergiert gleichmäßig.

Da $\overline{U(p,\varepsilon)}$ kompakt ist und $f_n|G\setminus A$ kompakt konvergiert, konvergiert auch (f_n) kompakt.

2. Sei $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$: $\sin^2 h(z) + \cos^2 h(z) =$

$$= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{ih(z)} - e^{-ih(z)}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{ih(z)} + e^{-ih(z)}\right)\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{i2h(z)} + e^{-i2h(z)} - 2\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2ih(z)} + 2 + e^{-2ih(z)}\right) = 1$$

$\Rightarrow f_1 = \cos \circ h,\ f_2 = \sin \circ h$ ist eine Lösung.

Umgekehrt: Lokal existieren zu jeder holomorphen Funktion f die Funktionen $\arccos f$ und $\arcsin f$.

Setzt man also lokal $h_1 = \arccos f_1$, $h_2 = \arcsin f_2$, so gilt

2. (Fortsetzung) $\cos^2 h_1 + \sin^2 h_2 = f_1^2 + f_2^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2 h_1 = 1 - \sin^2 h_2 = \cos^2 h_1$

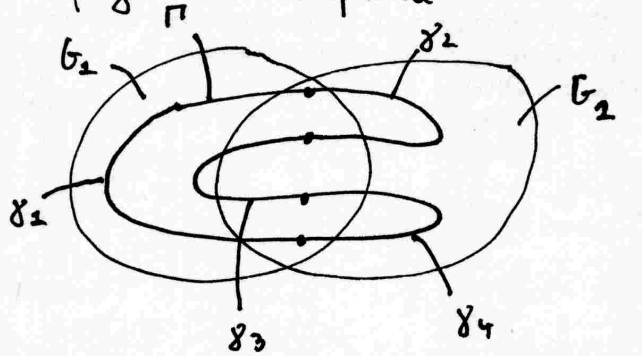
Ableiten: $-2\cos h_1 \sin h_1 = -2\cos h_2 \sin h_2$

Additionstheorem: $\sin 2h_1 = \sin 2h_2$

sin ist lokal injektiv $\Rightarrow$ $h_1 = h_2 = h$

$\Rightarrow$ lokal ist jede Lösung von der Gestalt $f_1 = \cos \circ h$, $f_2 = \sin \circ h$ und damit auch global (nach Identitätssatz).

3. (a) Sei Γ irgendein Weg in $G_1 \cup G_2$, der weder in G_1 noch in G_2 liege. Man beschreibe Γ als Hintereinanderausführung von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$, so daß jedes γ_i vollständig in G_1 oder in G_2 liegt, und die Anfangs- und Endpunkte immer in $G_1 \cap G_2$ liegen.



Da $G_1 \cap G_2$ wegzusammenhängend ist, kann man den Anfangs- und Endpunkt von γ_{2k} ~~volls~~ durch einen Weg $\bar{\gamma}_{2k}$ verbinden, der vollständig in $G_1 \cap G_2$ liegt.

$\Gamma_1 = \gamma_1 + \bar{\gamma}_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2n-1} + \bar{\gamma}_{2n}$ ist dann ein geschlossener Weg in $G_1 \Rightarrow$ das Innere von Γ_1 liegt in G_1.

Ebenso sind $\Gamma_{2k} = \gamma_{2k} - \overline{\gamma_{2k}}$ geschlossene Wege in G_2

$\Rightarrow$ Das Innere von Γ_{2k} liegt in G_2.

Nun ist $u(\Gamma, z) = u(\Gamma_1, z) + \sum_k u(\Gamma_{2k}, z)$.

Wenn nun z ein innerer Punkt von Γ ist, also $u(\Gamma, z) \neq 0$

$\Rightarrow u(\Gamma_1, z) \neq 0$ oder $u(\Gamma_{2k}, z) \neq 0$

$\Rightarrow z \in G_1$ oder $z \in G_2$ $\Rightarrow z \in G_1 \cup G_2$ ~~einfach zus~~ $\Rightarrow$ Beh.

(b) $\mathbb{C}^* \setminus [0,1]$ nicht einfach zshgd., da das Innere von $\mathcal{K}(0,2)$ auch 0 enthält

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \setminus \left(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\right)$ nicht einfach zusammenhgd, da das Innere von $\mathcal{K}(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ auch 0 enthält.

4. <u>Annahme</u>: $\exists f \in \mathcal{O}(U)$; $f(z) = \frac{1}{z^2}$ auf ∂D

$U \supset D$ offen $\Rightarrow \exists$ Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < z < r_2\} \subset U$

Identitätssatz $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2}$ auf Kreisring

$r_1 \to 0 \Rightarrow |f(z)| \xrightarrow[z \to 0]{} \infty$: Widerspruch.

5. $f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow f(z) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in I$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{a_\nu} (z - z_0)^\nu = g(z) \quad \forall z \in I$$

Identitätssatz $\Rightarrow f(z) = g(z) \Rightarrow a_\nu = \overline{a_\nu} \Rightarrow a_\nu \in \mathbb{R}$.