1. Man betrachte die Potenzreihenentwicklung von f um den Nullpunkt:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

Cauchy-Ungleichungen $\Rightarrow$ $|a_m| \leq r^{-m} \max_{|z|=r} |f(z)| \underset{\text{für } r>R}{\overset{\uparrow}{\leq}} r^{-m} \cdot M \cdot r^n$

$$\Rightarrow \quad a_m = 0 \quad \text{für } m > n$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m \text{, ein Polynom vom Grad} \leq n.$$

2. (a) Man entwickelt zuerst $f(z) = \cos(z-1)$ um 0:

$f'(z) = -\sin(z-1)$, $f''(z) = -\cos(z-1)$, $f'''(z) = \sin(z-1)$,

$f^{(4)}(z) = \cos(z-1)$ usw.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu = \begin{cases} \cos(-1) & \text{für } \nu = 4k \\ -\sin(-1) & \text{für } \nu = 4k+1 \\ -\cos(-1) & \text{für } \nu = 4k+2 \\ \sin(-1) & \text{für } \nu = 4k+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(z^2 - 1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu}$$

(b) $$\frac{1}{1+z+z^2} = (1-z)\frac{1}{1-z^3} = (1-z)\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{3\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{3\nu} - z^{3\nu+1}.$$

(c) $$f(z) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot (n+1)!\, z^{-(n+2)}$$

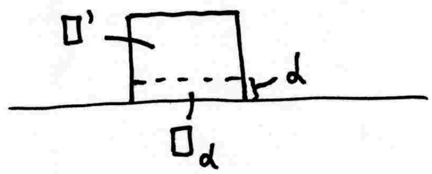
$$\Rightarrow f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot i^{-(n+2)} \cdot z^n.$$

3. Sei $\Theta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i\varphi} z$ eine Drehung, die L auf eine waagerechte Gerade $\tilde{L}$ abbildet. f ist genau dann holomorph auf G, wenn $\tilde{f} = f \circ \Theta$ holomorph auf $\tilde{G} = \Theta(G)$ ist.

Zum Beweis der Holomorphie von $\tilde{f}$ wendet man den Satz von Morera an:

(a) Sei $\square$ ein Rechteck in $\tilde{G}$ mit $\tilde{G} \cap \tilde{L} = \emptyset$. Da $\tilde{f}$ auf $\tilde{G} \setminus \tilde{L}$ holomorph ist, folgt $\int_{\partial\square} \tilde{f}\, dz = 0$ nach dem Satz von Goursat.

(b) Sei $\square$ ein Rechteck in $\bar{G}$, so daß $\square \cap I$ = untere (obere) Seite von $\square$



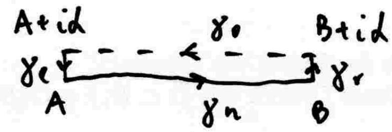
Dann zerlege man $\square$ in $\square'$ und $\square_\alpha$, wie oben gezeigt.

Natürlich ist $\int_{\partial\square} f\,dz = \int_{\partial\square'} f\,dz + \int_{\partial\square_\alpha} f\,dz$. Wie in (a) folgt $\int_{\partial\square'} f\,dz = 0$.

Die 4 Eckpunkte von $\square_\alpha$ seien $A, B, B+i\alpha, A+i\alpha$.

$\partial\square_\alpha$ zerlege man in die vier Wege $\gamma_e, \gamma_u, \gamma_r, \gamma_o$ mit den Parametrisierungen

$$\gamma_u : [0,1] \to \bar{G}, \quad t \mapsto A + t(B-A)$$
$$\gamma_o : [0,1] \to \bar{G}, \quad t \mapsto B + i\alpha + t(A-B)$$
$$\gamma_r : [0,1] \to \bar{G}, \quad t \mapsto B + t \cdot i\alpha$$
$$\gamma_e : [0,1] \to \bar{G}, \quad t \mapsto A + i\alpha - t \cdot i\alpha$$



Dann gilt: $\left| \int_{\partial\square_\alpha} f\,dz \right| = \left| \int_{\gamma_u} f\,dz + \int_{\gamma_r} f\,dz + \int_{\gamma_o} f\,dz + \int_{\gamma_e} f\,dz \right| =$

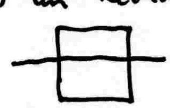
$$\leq \left| \int_0^1 f(A + t(B-A)) \cdot (B-A)\,dt - \int_0^1 f(A + i\alpha + t(B-A))(B-A)\,dt \right|$$

$$+ \alpha \cdot \max_{t\in[0,1]} |f(A + t\cdot i\alpha)| + \alpha \cdot \max_{t\in[0,1]} |f(B + t \cdot i\alpha)|$$

Da $\bar{f}$ stetig auf $\bar{G}$ ist, also gleichmäßig stetig auf $\square_\alpha$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein α, so daß $|f(A + t(B-A)) - f(A + i\alpha + t(B-A))| < \varepsilon$ ist.

Die anderen beiden Summanden werden für α klein genug ebenfalls beliebig klein, und insgesamt folgt: $\left| \int_{\partial\square_\alpha} f\,dz \right| = 0$.

(c) Sei $\square$ ein Rechteck in $\bar{G}$, so daß $\square \cap I$ das Rechteck in zwei Teile zerlegt



. Dann folgt $\int_{\partial\square} f\,dz = 0$ aus (b).

4. Die Cauchy-Integralformel für holomorphe Funktionen f besagt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial(r,z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta .$$

(a) $$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \left(e^z\right)^{(n-1)}\Big|_0 = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

(b) $n \neq -1,\ n+m \neq -1$: $z^n(1-z^m)$ besitzt Stammfunktion auf $\mathbb{C}-\{0\}$

$$\rightsquigarrow \int_{|z|=2} z^n(1-z^m)\, dz = 0$$

$n = -1,\ n+m \neq -1$: z^{-1+m} besitzt Stammfunktion auf $\mathbb{C}-\{0\}$

$$\rightsquigarrow \int_{|z|=2} \left(z^{-1} - z^{-1+m}\right) dz = \int_{|z|=2} z^{-1}\, dz = 2\pi i$$

$n \neq -1,\ n+m = -1$: z^n besitzt Stammfunktion auf $\mathbb{C}-\{0\}$

$$\rightsquigarrow \int_{|z|=2} \left(z^n - z^{-1}\right) dz = \int_{|z|=2} \left(-z^{-1}\right) dz = -2\pi i$$

$n = -1,\ m = 0$: $$\int_{|z|=2} z^n \cdot 0\, dz = 0.$$

5. (a) Man betrachte die Potenzreihenentwicklung von f, g um z_0:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu, \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$$

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}, \quad b_\nu = \frac{g^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

$$\Rightarrow a_\nu = b_\nu \text{ für } \nu \geq n_0$$

$$\Rightarrow f(z) - g(z) = \sum_{\nu=0}^{n_0-1} (a_\nu - b_\nu)(z-z_0)^\nu = p(z)$$

ein Polynom.

5. (b) Satz von der Gebietstreue $\Rightarrow f(U)$ offen,

$\Rightarrow \operatorname{Re} f(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : x + iy \in f(U)\}$ offen,

wobei U eine Umgebung von z_0 sei, in der $\operatorname{Re} f$ in z_0 (global) minimal ist.

$\operatorname{Re} f(U)$ enthält also sein Infimum $\operatorname{Re} f(z_0)$, kann dann aber nicht offen sein: Widerspruch.