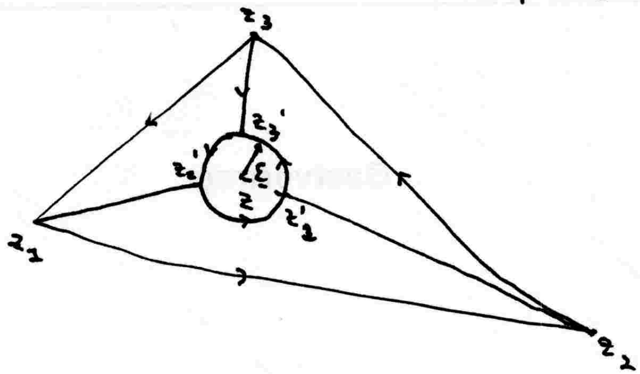
1. Ein (offenes) Dreieck $\Delta \subset \mathbb{C}$ wird beschrieben durch drei verschiedene komplexe Zahlen, die nicht kollinear sind, d.h. es gibt keine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$, so daß $z_1 - z_2 = r \cdot (z_1 - z_3)$.



Sei $z \in \Delta$. Dann gibt es einen Kreis mit Radius ε, der vollständig in Δ enthalten ist. Die Strecke $\overline{z_i z}$ schneide diesen Kreis in z_i', $i = 1,2,3$. Seien die γ_i die (positiv orientierten) Kreisbögen von z_i' nach z_{i+1}'. ~~Der Halbstrahl~~ $\mathbb{C}$ ohne den Halbstrahl $[z z_i$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_i. Also besitzt die auf G_i holomorphe Funktion $\frac{1}{\zeta - z}$ eine Stammfunktion auf G_i, und das Wegintegral über den geschlossenen Weg

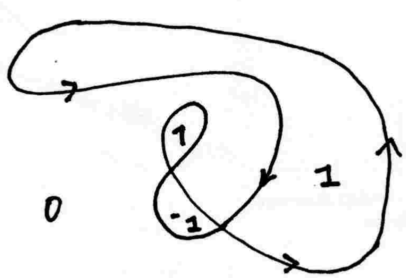
$$\overline{z_i z_{i+1}} + \overline{z_{i+1} z_{i+1}'} - \gamma_{i+1} + \overline{z_i' z_i} \quad \text{ist } 0.$$

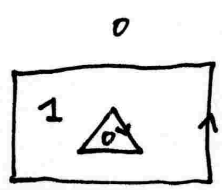
Zählt man die drei Wege für $i = 1,2,3$ zusammen, so erhält man die Kette

$$\underbrace{\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1}}_{K} - \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}_{\varkappa(z,\varepsilon)},$$

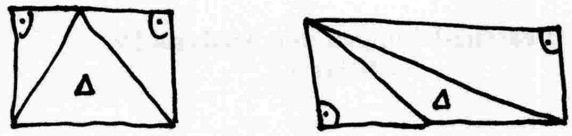
also ist $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa(z,\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1.$

2.

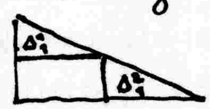




3. Jedes Dreieck kann durch 2 rechtwinklige Dreiecke zu einem Rechteck ergänzt werden. Da nach dem Satz von Goursat das Wegintegral über den Rand des Rechtecks 0 ist, genügt es, die Behauptung für rechtwinklige Dreiecke zu zeigen:



Dazu beschreibe man dem rechtwinkligen Dreieck ein Rechteck ein, das die beiden Seiten halbiert:

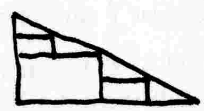


Man erhält zwei rechtwinklige Dreiecke Δ_1^1, Δ_1^2. Nach dem Satz von Goursat ist

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial\Delta_1^1} f\,dz + \int_{\partial\Delta_1^2} f\,dz.$$

Man wähle das $\Delta_1 = \Delta_1^i$ mit maximalem Betrag des Randintegrals.

Diese Konstruktion setzt man fort



und erhält rechtwinklige Dreiecke Δ_n mit

(a) Länge von $\partial\Delta_n = 2^{-n} L(\partial\Delta)$

(b) $\left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| \leq 2^n \cdot \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|$

(c) $\Delta \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_{n-1} \supset \Delta_n \supset \ldots$

Alle Δ_i kompakt $\Rightarrow \exists\, z_0 \in \Delta$ mit $\bigcap_{n\geq 0} \Delta_n = \{z_0\}$.

f holomorph in $z_0 \Rightarrow f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\big(f'(z_0) + A(z)\big)$

$A(z)$ stetig, $A(z_0) = 0$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| \leq \underbrace{\left|\underbrace{\int_{\partial\Delta_n}\big(f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)\big)}_{\text{hat Stammfunktion}}dz\right|}_{=0} + \left|\int_{\partial\Delta_n}(z-z_0)A(z)\,dz\right|$$

$$\left|\int_{\partial\Delta_n}(z-z_0)A(z)\,dz\right| \leq L(\partial\Delta_n)\cdot \underbrace{\max_{z\in\partial\Delta_n}\big(|z-z_0||A(z)|\big)}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}$$

$\overset{(b)}{\Rightarrow} \left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| = 0$

4. (a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$

geometrische Reihe!

Konvergenzradius 1

(b) f holomorph um $0 \Rightarrow f$ läßt sich um 0 als Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ darstellen

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$.

5. (a) $\frac{z}{e^z-1} = \frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \frac{1}{1+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}}}$ $\Rightarrow$ ist beschränkt um 0

↳ konvergiert überall $\Rightarrow \xrightarrow[z\to 0]{} 0$

Nach Riemannschen Hebbarkeitssatz: holomorph fortsetzbar

(b) $(it)^3 \sin \frac{1}{it} = -it^3 \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{i\cdot\frac{1}{it}} - e^{-i\cdot\frac{1}{it}}\right) =$

$= -\frac{1}{2} t^3 \cdot \left(e^{\frac{1}{t}} - e^{-\frac{1}{t}}\right)$

$\lim_{t\to 0} -\frac{1}{2} t^3 \cdot \left(e^{\frac{1}{t}} - e^{-\frac{1}{t}}\right) = \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^s}{s^3} = -\infty$

$\Rightarrow z^3 \cdot \sin \frac{1}{z}$ nicht beschränkt um $0 \Rightarrow$ nicht holomorph fortsetzbar!