1. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: $f = u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v(x,y) = -e^x \cos y + \bar{v}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^x \cos y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v(x,y) = -e^x \cos y + \bar{\bar{v}}(y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{v}(x) = \bar{\bar{v}}(y) = c \in \mathbb{R},$$

$$f = e^x \sin y - i e^x \cos y + ic \quad , c \in \mathbb{R}.$$

2. $W_1 : [1,2] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto t + i(1+5t)$ $\Rightarrow \int_{W_1} \mathrm{Re}\, z \, dz = \int_1^2 t \cdot (1+5i)\, dt =$

$$= (1+5i) \cdot \tfrac{1}{2} t^2 \Big|_1^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2} i$$

$$\int_{W_2} \mathrm{Re}\, z \, dz = \int_1^2 t \cdot (1 + 3it^2)\, dt = \tfrac{1}{2} t^2 \Big|_1^2 + 3i \cdot \tfrac{1}{4} t^4 \Big|_1^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{45}{4} i$$

3. (a) $\frac{1}{3} i z^3 + z + 2iz^{-1}$ ist Stammfunktion von $iz^2 + 1 - 2iz^{-2}$

$$\Rightarrow \int_W iz^2 + 1 - 2iz^{-2} = \tfrac{1}{3} i (2i)^3 + 2i + 1 - \left(\tfrac{1}{3} i (1+i)^3 + (1+i) + \tfrac{2i}{1+i}\right) =$$

$$= \dots = 9 + \tfrac{14}{3} i$$

(b) $z \mapsto \mathrm{Im}\, z$ hat Stammfunktion in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Wegintegral über geschlossene Wege $= 0$.

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ ein geschlossener Weg.

$$\int_\gamma \mathrm{Im}\, z \, dz = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot i e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})\, i e^{it}\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} e^{2it}\, dt}_{\substack{\parallel \\ 0, \text{ da } \frac{1}{4i} e^{2it} \text{ Stammfunktion zu } \frac{1}{2} e^{2it}}} - \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\, dt = -\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ $z \mapsto \mathrm{Im}\, z$ hat keine Stammfunktion.

4. $|z|>1$: $\left|\frac{z^\nu}{1-z^\nu}\right| = \left|\frac{z^\nu-1}{1-z^\nu} + \frac{1}{1-z^\nu}\right| \geq 1 - \frac{1}{1-z^\nu} > \frac{1}{2}$ für $\nu \gg 0$

$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1-z^\nu}$ kann nicht konvergieren.

$|z| = 1$: $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$

$z^\nu = e^{i\nu t}$

$e^{i\nu t}$ periodisch mit Periode 2π $\Rightarrow$ Für beliebig große ν liegt z^ν nahe bei 1, etwa $|1-z^\nu| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{z^\nu}{1-z^\nu}\right| > 2 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1-z^\nu}$ kann nicht konvergieren

$|z| < 1$: $|1-z^\nu| \geq 1-|z|^\nu \geq 1-|z|$

$\Rightarrow$ Für $|z| < \varrho$ ist $\sum \frac{\varrho^\nu}{1-\varrho}$ absolut konvergente Majorante

$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1-z^\nu}$ konvergiert gleichmäßig für $|z|<1$.

5. Nach Cauchy-Hadamard ist $R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

1. Fall: $r = \lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| > 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $\nu \gg 0$ gilt $r - \varepsilon \leq \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|} \leq r+\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{|a_\nu|}{r+\varepsilon} \leq |a_{\nu+1}| \leq \frac{|a_\nu|}{r-\varepsilon} \underset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \frac{|a_\nu|}{(r+\varepsilon)^k} \leq |a_{\nu+k}| \leq \frac{|a_\nu|}{(r-\varepsilon)^k}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[\nu+k]{(r-\varepsilon)^k}}{\sqrt[\nu+k]{|a_\nu|}} \leq \frac{1}{\sqrt[\nu+k]{|a_{\nu+k}|}} \leq \frac{\sqrt[\nu+k]{(r+\varepsilon)^k}}{\sqrt[\nu+k]{|a_\nu|}}$$

$$\downarrow k\to\infty \qquad \liminf \downarrow k\to\infty$$

$$r-\varepsilon \leq R \leq r+\varepsilon \Rightarrow r = R$$

2. Fall: $r = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist Minorante für beliebig großes q $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ konvergiert nicht $\Rightarrow R = 0$.