Ana4-02
Blatt 10

1

1. Seien $V_0, V_\infty \subset \hat{\mathbb{C}}$ offene Teilmengen, so daß

(i) $V_0 \cup V_\infty = \hat{\mathbb{C}}$

(ii) $\infty \notin V_0,\ \infty \in V_\infty$

(iii) $\exists$ biholomorphe Abbildung $\psi_\infty : V_\infty \to \mathbb{C},\ \infty \mapsto 0$

Sei $U' \subset f^{-1}(V_\infty)$ offen, und es gebe eine biholomorphe Abbildung $\psi : U' \to \mathbb{C}$

$F = \psi_\infty \circ f_{|U'} \circ \psi^{-1} : \underbrace{\psi(U')}_{\hat{\mathbb{C}}} \to \underbrace{\psi_\infty(U')}_{\hat{\mathbb{C}}}$ holomorph auf $\psi(U') - F^{-1}(0)$

stetig auf $\psi(U')$

$\xRightarrow[\text{Hebbarkeitsatz}]{\text{Riemannscher}}$ F holomorph auf $\psi(U')$

$\Rightarrow \psi_\infty^{-1} \circ F \circ \psi = f_{|U'}$ holomorph, da ψ_∞, ψ biholomorph

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f_{|f^{-1}(V_\infty)} \text{ holomorph, da } U' \subset f^{-1}(V_\infty) \text{ beliebig} \\ f_{|f^{-1}(V_0)} \text{ holomorph} \end{array}\right\}$ f holomorph

2. Spezialfall $a = 0$:

$$\operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} : \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\frac{\alpha \cdot 0 + \beta}{\gamma \cdot 0 + \delta} = 0 \iff \beta = 0, \text{ also } G_0 = \left\{ \frac{\alpha z}{\gamma z + \delta} : \alpha\delta \neq 0 \right\} \subset \operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}}.$$

a beliebig: $\varphi = z + a \in \operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}}$ bildet 0 auf a ab

$$\Rightarrow G_a = \varphi \circ G_0 \circ \varphi^{-1}.$$

<u>Allgemeines Lemma für die Aufgaben 3 & 4:</u>

$\rho_1, \dots, \rho_n$ bzw $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ seien n bzw. m paarweise verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$.

$\varphi : \hat{\mathbb{C}} - \{\rho_1, \dots, \rho_n\} \to \hat{\mathbb{C}} - \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ sei biholomorph.

Dann gibt es ein $\Phi \in \operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}}$: $\Phi_{|\hat{\mathbb{C}} - \{\rho_1, \dots, \rho_n\}} = \varphi$,

also insbesondere $\Phi(\{\rho_1, \dots, \rho_n\}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ und $n = m$.

Beweis: Sei U_i eine Umgebung von s_i mit $U_i \cap \{s_1, \dots, s_n\} = \{s_i\}$.

Fall 1: $s_i \neq \infty$: Wähle auch U_i so, daß $\infty \notin U_i$ und $\infty \notin \varphi(U_i - \{s_i\})$

$\Rightarrow \varphi|U_i - \{s_i\}: U_i - \{s_i\} \to \mathbb{C}$ holomorph

Es gibt also 3 Fälle:

Fall 1.1.: φ hat hebbare Singularität in s_i

Annahme: $\varphi(s_i) \in \hat{\mathbb{C}} - \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$

φ biholomorph $\Rightarrow \exists s' \in \hat{\mathbb{C}} - \{s_1, \dots, s_n\}$ mit $\varphi(s') = \varphi(s_i)$

$\exists$ Umgebungen U', U von s' und s_i mit $U' \cap U = \emptyset$

Satz vom offenen Gebiet $\Rightarrow \varphi(U'), \varphi(U)$ offene Umgebungen von $\varphi(s') = \varphi(s_i)$

$\Rightarrow \varphi(U') \cap \varphi(U)$ enthält Punkte aus $\hat{\mathbb{C}} - \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$

$\lightning$ zur Biholomorphie von φ.

Fall 1.2.: φ hat Pol in s_i

$\Rightarrow \frac{1}{z} \circ \varphi$ hat Nullstelle in s_i

Argumentation wie in Fall 1.1. mit Funktion $\frac{1}{z} \circ \varphi$

$\Rightarrow \varphi(s_i) = \infty$ setzt φ holomorph in s_i fort, da $\frac{1}{z} \in \mathrm{Aut}\,\hat{\mathbb{C}}$.

$\infty \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$

Fall 1.3.: φ hat wesentliche Singularität in s_i

$\Rightarrow$ jede Umgebung U von s_i wird von φ dicht in $\hat{\mathbb{C}}$ abgebildet.

Wähle U klein genug, wähle $U' \in \hat{\mathbb{C}} - \{s_1, \dots, s_n\}$ mit $U \cap U' = \emptyset \Rightarrow \varphi(U) \cap \varphi(U') \neq \emptyset$, da $\varphi(U')$ offen.

$\lightning$ zur Biholomorphie von φ.

Fall 2: $s_i = \infty$. Wie Fall 1 mit Funktion $\varphi \circ \frac{1}{z}$.

Insgesamt ergibt sich: φ läßt sich über die ζ_i holomorph zu

$\Phi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

Φ muß wie φ biholomorph sein,

$\Phi(\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$. ∎

3. Nach obigem Lemma:

(a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} - \{0,\infty\}) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,\hat{\mathbb{C}} : \varphi(\{0,\infty\}) = \{0,\infty\}\}$

$$= \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : b = c = 0 \text{ oder } a = d = 0 \right\}$$

(b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} - \{0,1\}) = \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} - \{0,1,\infty\}) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,\hat{\mathbb{C}} : \varphi(\{0,1,\infty\}) = \{0,1,\infty\}\}$

Laut Vorlesung legen die Bilder von $0, 1, \infty$ genau einen Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ fest

$= \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$

$$\varphi_1 = z, \quad \varphi_2 = \frac{z}{z-1}, \quad \varphi_3 = -z+1, \quad \varphi_4 = \frac{1}{-z+1}, \quad \varphi_5 = \frac{z-1}{z}, \quad \varphi_6 = \frac{1}{z}$$

4. (a) $\mathrm{Aut}(G') = \varphi^{-1} \circ \mathrm{Aut}(G) \circ \varphi$

Die Umkehrung gilt nicht:

Für alle bis auf endlich viele z ist $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} - \{z, 0, 1, \infty\}) = \{1\}$

<u>Bew.:</u> Nach dem Lemma permutiert jeder Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}} - \{z, 0, 1, \infty\}$ die Punkte $z, 0, 1, \infty$. Wie in 3.(b) argumentiert man, daß die Permutation den Automorphismus festlegt. Laut Vorlesung muß aber auch das Doppelverhältnis der Punkte erhalten bleiben. Das gilt nur für endlich viele z.

Ebenso zeigt man, daß $\hat{\mathbb{C}} - \{z, 0, 1, \infty\} \not\cong \hat{\mathbb{C}} - \{z', 0, 1, \infty\}$ für alle bis auf endlich viele z'.

Ana2-04
Blatt 10

4

4.(b) $\mathrm{Aut}(G) = \{1\}$: s. 4.(a)

$\mathrm{Aut}(G) = \mathbb{Z}_2$: Man rechnet leicht nach, daß die einzige Permutation von $\{0, \infty, \frac{1}{2}, 2\}$ mit demselben Doppelverhältnis $DV(0, \infty, \frac{1}{2}, 2) = \frac{\frac{1}{2}-2}{-2} = \frac{3}{4}$ $(\infty, 0, 2, \frac{1}{2})$ ist.

$$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}} - \{0, \infty, \tfrac{1}{2}, 2\}) = \{1, \tfrac{1}{z}\} \cong \mathbb{Z}_2$$

5. $\mathrm{Aut}\, H = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : ad-bc > 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

$$\frac{a\cdot i+b}{c\cdot i+d} = i \iff a\cdot i + b = -c + d\cdot i \iff a = d,\ b = -c$$