1. Nach Definition: $x \in G$ Häufungspunkt von $A \iff$

$\iff \forall \varepsilon : U_\varepsilon(x) \cap A$ enthält unendlich viele Punkte von A.

$\Rightarrow$ x kein Häufungspunkt von $A \iff \exists \varepsilon : U_\varepsilon(x) \cap A$ enthält nur endlich viele Punkte von A

$$\iff \exists \varepsilon : U_\varepsilon(x) \cap A = \begin{cases} \{x\}, & \text{falls } x \in A \\ \emptyset, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Nach Definition: $G \setminus A$ Gebiet $\iff$ $G \setminus A$ offen & $G \setminus A$ zusammenhängend.

(1) $G \setminus A$ offen: Sei $x \in G \setminus A \Rightarrow \exists \varepsilon : U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap G \subset G \setminus A$

G Gebiet $\Rightarrow G$ offen $\Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap G$ offen

Jedes $x \in G \setminus A$ hat also eine offene Umgebung in $G \setminus A$

$\Rightarrow$ $G \setminus A$ offen.

(2) $G \setminus A$ zusammenhängend folgt aus $G \setminus A$ wegzusammenhängend:

Seien $x, y \in G \setminus A$.

G offen & zusammenhängend $\overset{\text{Vorl.}}{\Rightarrow}$ G wegzusammenhängend

$\Rightarrow \exists$ Weg $\gamma : [0,1] \to G$ stetig, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Sei $A' = A \cap \gamma([0,1])$.

Beh.: A' besteht aus endlich vielen Punkten.

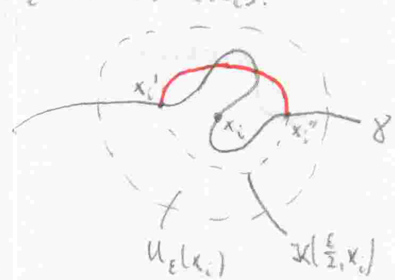
Bew.: $\gamma([0,1])$ ist kompakt als Bild einer kompakten Mengen unter einer stetigen Abbildung.

$\forall x \in \gamma([0,1])\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A$ besteht aus höchstens einem Punkt.

$\Rightarrow \exists$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n$: $U_\varepsilon(x_i) \cap A$ besteht aus höchstens einem Punkt, & $\bigcup_i U_\varepsilon(x_i) \supset \gamma([0,1])$

Seien $x_1, \ldots, x_m$ die endlich vielen Punkte mit $U_\varepsilon(x_i) \cap A = \{x_i\}$.

Seien x_i', x_i'' der erste und der letzte Schnittpunkt von $\gamma([0,1])$ mit $\mathcal{K}(\frac{\varepsilon}{2}, x_i)$. Verbinde x_i' und x_i'' auf $\mathcal{K}(\frac{\varepsilon}{2}, x_i)$ und erhalte so einen Weg γ' mit $\gamma' \cap U_\varepsilon(x_i) \cap A = \emptyset$.



1. (Fortsetzung)
Führt man diese Konstruktion sukzessive für alle i durch, erhält man einen Weg $\bar{\gamma}$ von x nach y, so daß $\bar{\gamma}([0,1]) \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow G \setminus A$ wegzusammenhängend.

2. $X = X_1 \cup X_2$, $\quad X_1 = \{ iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \le 1 \}$
$\quad X_2 = \{ z = x + iy \mid 0 < x \le \frac{1}{4}, y = \sin\frac{1}{x} \}$

X_1 ist wegzusammenhängend: $\gamma : [y_1, y_2] \to X_1$, $t \mapsto it$, verbindet iy_1, iy_2.
$\Rightarrow X_1$ ist zusammenhängend

X_2 ist wegzusammenhängend: $\gamma : [x_1, x_2] \to X_2$, $t \mapsto t + i \sin\frac{1}{t}$ verbindet $x_1 + i\sin\frac{1}{x_1}$, $x_2 + i \sin\frac{1}{x_2}$
$\Rightarrow X_2$ ist zusammenhängend

(1) <u>X ist zusammenhängend</u>:
Sei $X = U \cup V$, U, V offen (in X!), $U \cap V = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow U \cap X_1, V \cap X_1 \text{ offen in } X_1 \\ \quad X_1 \text{ zusammenhängend} \end{array}\right\} \Rightarrow U \cap X_1 = \emptyset \text{ oder } V \cap X_1 = \emptyset$$
$$\text{OE } V \cap X_1 = \emptyset$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow U \cap X_2, V \cap X_2 \text{ offen in } X_2 \\ \quad X_2 \text{ zusammenhängend} \end{array}\right\} \Rightarrow U \cap X_2 = \emptyset \text{ oder } V \cap X_2 = \emptyset$$

Fall 1: $U \cap X_2 = \emptyset \Rightarrow U = U \cap X_1$, aber $U \cap X_1$ nicht offen in X $\lightning$

Fall 2: $V \cap X_2 = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset \Rightarrow X$ zusammenhängend.

(2) <u>X nicht wegzusammenhängend</u>
<u>Annahme</u>: $\exists$ stetigen Weg $\varphi : [0,1] \to X$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{4} + \sin 4$
$\Rightarrow f \circ \varphi : [0,1] \to [0, \frac{1}{4}]$ mit $f : X \to [0, \frac{1}{4}]$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$
stetig und surjektiv (nach Zwischenwertsatz)
$\Rightarrow$ Man kann eine Folge (t_n) wie folgt konstruieren:
Sei $t_1 \in [0,1]$ mit $(f \circ \varphi)(t_1) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

2. (Fortsetzung)

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists\, 0 < t_2 < t_1 : (f \circ \varphi)(t_2) = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{2}}$

Iterativ erhält man so eine monoton fallende Folge (t_n) mit $(f \circ \varphi)(t_n) = \frac{1}{n \cdot \frac{\pi}{2}}$

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$

φ stetig $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n) = t_0$.

ABER: $$\left.\begin{aligned} \varphi(t_{2n}) &= \frac{2}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \varphi(t_{4n+1}) &= \frac{2}{(4n+1)\pi} + i \xrightarrow[n\to\infty]{} i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) \text{ kann nicht existieren}$$

$\Rightarrow$ $\lightning$ zur Annahme.

3. (a) $\frac{d}{d\bar z}(z^k \bar z) = z^k \cdot 1 \quad \Rightarrow$ f ist genau in $z = 0$ komplex differenzierbar.

Hier wendet man die Produktregel und $\frac{d}{d\bar z} z = 0$, $\frac{d}{d\bar z}\bar z = 1$ an.

(b) $g(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z$ überall komplex differenzierbar.

4.

$$f = u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \xrightarrow[\text{DGL}]{\text{Cauchy-Riemann}} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2axy + 2x \Rightarrow v(x,y) = axy^2 + 2xy + \bar v(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ax^2 - 3y^2 + 2by \Rightarrow v(x,y) = -\frac{1}{3}ax^3 + 3xy^2 - 2bxy + \bar{\bar v}(y)$$

$$\Rightarrow a = 3,\ 2 = -2b \Leftrightarrow b = -1.\ \bar{\bar v} = c \in \mathbb{C},\ \bar v = -x^3 + c.$$

$$\Rightarrow v = -x^3 + 3xy^2 + 2xy + c$$

5. (a)

$$f = u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \xRightarrow[\text{DGL}]{\text{CR}} \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Entsprechend für v.

Ana 4-02
Blatt 1

(4)

5. (b) u harmonisch $\iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{(j,k)\neq(0,0)}} \left[a_{j,k+2} (k+2)(k+1) + a_{j+2,k}(j+2)(j+1) \right] x^j y^k$$

$$(*) \iff \forall_{j,k}: \ (k+2)(k+1)\, a_{j,k+2} = -(j+2)(j+1)\, a_{j+2,k}$$

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0,0) = 2 \cdot \sum_{j,k} a_{jk} z^{j+k} \cdot \frac{1}{2^{j+k} i^k} - a_{0,0} =$$

$$= a_{0,0} + 2 \cdot \sum_{(j,k)\neq(0,0)} a_{jk} \left[\sum_{\ell=0}^{j+k} \binom{j+k}{\ell} x^\ell (iy)^{j+k-\ell} \right] \cdot \frac{1}{2^{j+k} i^k} =$$

$$= a_{00} + 2 \cdot \sum_{(j,k)\neq(0,0)} \sum_{\ell=0}^{j+k} \binom{j+k}{\ell} a_{jk} x^\ell y^{j+k-\ell} i^{j-\ell} \cdot \frac{1}{2^{j+k}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} f(z) = a_{00} + 2 \sum_{(j,k)\neq(0,0)} \sum_{\substack{\ell=0 \\ j-\ell \text{ gerade}}}^{j+k} \binom{j+k}{\ell} a_{jk} x^\ell y^{j+k-\ell} \cdot (-1)^{\frac{j-\ell}{2}} \cdot \frac{1}{2^{j+k}}$$

Koeffizient von $x^\ell y^m$ in $\operatorname{Re} f(z)$ für $(\ell, m) \neq (0,0)$:

$$2 \sum_{\substack{(j,k)\neq(0,0) \\ j+k=m+\ell \\ j-\ell \text{ gerade}}} \binom{m+\ell}{\ell} \cdot (-1)^{\frac{j-\ell}{2}} a_{jk} / 2^{j+k} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+\ell-1}} \sum_{\substack{(j,k)\neq(0,0) \\ j+k=m+\ell \\ j-\ell \text{ gerade}}} \binom{m+\ell}{\ell} (-1)^{\frac{j-\ell}{2}} a_{jk} \underset{\uparrow\,(*)}{=} \frac{1}{2^{m+\ell-1}} \sum_{\substack{j \\ j-\ell \text{ gerade} \\ j \le m+\ell}} \binom{m+\ell}{j} a_{\ell m}$$

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\qquad\qquad$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2^{m+\ell-1}} \left(\sum_{j=0}^{m+\ell-1} \binom{m+\ell-1}{j} \right) \cdot a_{\ell m} \overset{\downarrow}{=} a_{\ell m} \text{ wie gewünscht.}$$