Übungen zu „Analysis III" / „Mathematik für Physiker III" **R. Kaiser**
Blatt 9
09.12.2002

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &:= x\cos y\ \sin z, \\ g(x,y,z) &:= x\sin y\ \sin z, \\ h(x,y,z) &:= x\cos z. \end{aligned}$$

Man berechne $df \wedge dg \wedge dh$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Sei M eine orientierbare zweidimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ mit Einheitsnormalenfeld ν, N sei eine orientierbare eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Einheitstangentenfeld τ. Es gelte $M = \cup_{i=1}^{k}\overline{F}i$, $N = \cup_{i=1}^{l}\overline{K}_i$ mit regulären paarweise disjunkten Flächenstücken F_i bzw. Kurvenstücken K_i.
Insbesondere verlangen wir von F_i bzw. K_i: Es gibt Parameterbereiche $B_i \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $D_i \subset \mathbb{R}$, bijektive stetig differenzierbare Abbildungen $\phi_i : B_i \to F_i$, $\psi_i : D_i \to K_i$ mit $\frac{\partial\phi_i}{\partial t_1} \times \frac{\partial\phi_i}{\partial t_2} \neq 0$ für alle $t = (t_1, t_2) \in B_i$ bzw. $\frac{\partial\psi_i}{dt} \neq 0$ für alle $t \in D_i$. Schließlich sei

$$\nu(\phi_i(t)) = \frac{(\frac{\partial\phi_i}{\partial t_1} \times \frac{\partial\phi_i}{\partial t_2})(t)}{|(\frac{\partial\phi_i}{\partial t_1} \times \frac{\partial\phi_i}{\partial t_2})(t)|} \quad \text{bzw.} \quad \tau(\psi_i(t)) = \frac{\frac{d\psi_i}{dt}(t)}{|\frac{d\psi_i}{dt}(t)|}.$$

Man kann nun auch Kurven- bzw. Flächenintegrale für skalarwertige Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ bzw. $g : N \to \mathbb{R}$ einführen:

$$\int_M f(x)dO(x) := \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} f(x)dO(x) := \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f(\phi_i(t)) \left| \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t_1} \times \frac{\partial\phi_i}{\partial t_2} \right)(t) \right| dt;$$

$$\int_N \overset{g}{\cancel{f}}(x)do(x) := \sum_{i=1}^{l} \int_{K_i} \overset{g}{\cancel{f}}(x)do(x) := \sum_{i=1}^{l} \int_{D_i} g(\psi_i(t)) \left| \frac{d\psi_i}{dt}(t) \right| dt.$$

a) Sei zunächst speziell $M = S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ die Oberfläche der Einheitskugel. Berechnen Sie:

$$\int_S 1\ dO(x); \quad \int_S (1 - x_3^2)dO(x).$$

Hinweis: Kugelkoordinaten.

b) Seien nun wieder M, N allgemein wie im einleitenden Text. Welche Bedeutung haben $\int_N 1do(x)$ bzw. $\int_M 1dO(x)$?

Musterlösung

Aufg 1: $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x \cos y \sin z$$
$$g(x,y,z) = x \sin y \sin z$$
$$h(x,y,z) = x \cos z$$

$$df = \cos y \sin z \, dx - x \sin y \sin z \, dy + x \cos y \cos z \, dz$$
$$dg = \sin y \sin z \, dx + x \cos y \sin z \, dy + x \sin y \cos z \, dz$$
$$dh = \cos z \, dx - x \sin z \, dz$$

$$\Omega^3(\mathbb{R}^3) \ni \underbrace{df \wedge dg \wedge dh}_{\text{Volumenform}} = \cos y \sin z \; x \cos y \sin z \, (-) x \sin z$$

$$dx \wedge dy \wedge dz - x \sin y \sin z \left[\sin y \sin z \, (-) x \sin z - x \sin y \cos z \cos z \right] dy \wedge dx \wedge dz + x \cos y \cos z \; x \cos y \sin z \cos z \; dz \wedge dy \wedge dx$$

$$= \left\{ -x^2 \cos^2 y \sin^3 z - x \sin y \sin z \left[x \sin y (\sin^2 z + \cos^2 z) \right] - x^2 \cos^2 y \cos^2 z \sin z \right\} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= -x^2 \left\{ \cos^2 y \sin z + \sin^2 y \sin z \right\} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= -x^2 \sin z \; dx \wedge dy \wedge dz$$

Aufg 2: ....

a) $M = S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \}$

(2)

Kugelkoordinaten:

$$\phi : \begin{cases} [0,\pi] \times [0,2\pi) \to S \\ (\theta,\varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \end{cases}$$

[Eine Abb. ϕ nicht also!]

Berechne: $\partial_\theta \phi = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$

$\partial_\varphi \phi = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$

$$\partial_\theta\phi \times \partial_\varphi\phi = (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta)$$

$$|\partial_\theta\phi \times \partial_\varphi\phi|^2 = \sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$|\partial_\theta\phi \times \partial_\varphi\phi| = \sin\theta \geq 0 \quad \text{für} \quad \theta \in [0,\pi]$$

$$\underbrace{\frac{\partial_\theta\phi \times \partial_\varphi\phi}{|\partial_\theta\phi \times \partial_\varphi\phi|}}_{\nu(\phi(\theta,\varphi))} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \phi(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_S 1 \, dO(x)}_{\text{Kugeloberfläche}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} \, d\varphi = 4\pi$$

$$\int_S (1-x_3^2)\, dO(x) = \int_S 1\, dO(x) - \int_S x_3^2\, dO(x)$$

$$= 4\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\cos^2\theta \sin\theta}_{\partial_\theta\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)}\, d\theta\, d\varphi = 4\pi + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[\cos^3\theta\right]_0^{\pi} d\varphi$$

$$= 4\pi - \frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{8}{3}\pi$$

4) (i) Betrachte o.B.d.A. einen einzigen Parameterbereich B:

$$\vec{v}(\phi(t)) \cdot \nu(\phi(t)) = \vec{v}(\phi(t)) \cdot \frac{\partial_{t_1}\phi \times \partial_{t_2}\phi}{|\partial_{t_1}\phi \times \partial_{t_2}\phi|}$$

$$= \frac{1}{|\partial_{t_1}\phi \times \partial_{t_2}\phi|} \det\left(\vec{v}(\phi(t)), \partial_{t_1}\phi(t), \partial_{t_2}\phi(t)\right)$$

also: $$\int_M \vec{v}(x)\cdot \nu(x)\, dO(x) = \int_B \det\left(\vec{v}(\phi(t)), \partial_{t_1}\phi(t), \partial_{t_2}\phi(t)\right) dt$$

Andererseits:

$$\int_M \vec{v}\cdot d\vec{F} = \int_B \vec{v}(\phi(t)) \cdot \left(d\phi_2 \wedge d\phi_3,\ d\phi_3 \wedge d\phi_1,\ d\phi_1 \wedge d\phi_2\right)$$

$$= \int_B \vec{v}(\phi(t)) \cdot \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t_1}\frac{\partial \phi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial t_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial t_1},\ \frac{\partial \phi_3}{\partial t_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \phi_3}{\partial t_2}\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1},\right.$$

$$\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial t_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t_1}\right) \underbrace{dt_1 \wedge dt_2}_{dt}$$

$$= \int_B \vec{v}(\phi(t)) \cdot (\partial_{t_1}\phi \times \partial_{t_2}\phi)\, dt$$

$$= \int_B \det\left(\vec{v}(\phi(t)), \partial_{t_1}\phi(t), \partial_{t_2}\phi(t)\right) dt \quad \checkmark$$

ii) Wieder o.B.d.A. nur ein D:

$$\int_N \vec{w}(x) \cdot \tau(x)\, do(x) = \int_D \vec{w}(\varphi(x)) \cdot \tau(\varphi(t)) |\partial_t \varphi(t)|\, dt$$

$$= \int_D \vec{w}(\varphi(t)) \cdot \partial_t \varphi(t)\, dt$$

Andererseits:

$$\int_N \vec{w}(x) \cdot ds(x) = \int_D \vec{w}(\varphi(t)) \cdot (d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3)$$

$$= \int_D \vec{w}(\varphi(t)) \cdot \partial_t \varphi(t)\, dt \quad \checkmark$$

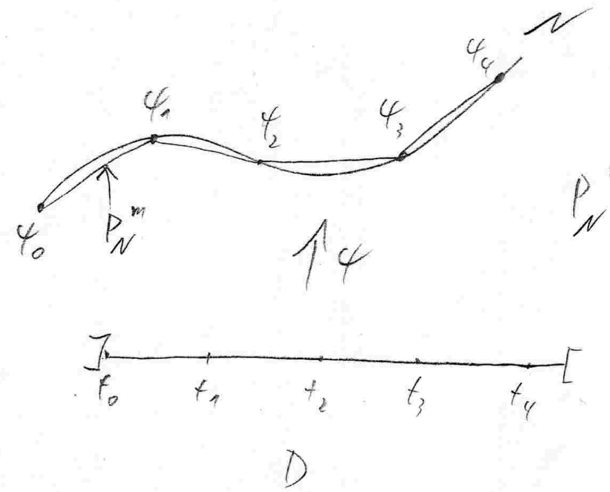
<u>Bemerkung</u>: Orientierungsumkehr, $\nu \to -\nu$ bzw. $\tau \to -\tau$, dreht das Vorzeichen des Flächen- bzw. Kurvenintegrals um!
dO bzw. do sind nicht nur gegenüber orientierungserhaltender Parametertransf. invariant!

b) (i) $\int_N 1 \, do(x) = \sum_{i=1}^{l} \int_{D_i} \left| \frac{d\varphi_i}{dt}(t) \right| dt$

mißt die Länge L der Kurve N mit Parametrisierung

$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$.

$l = 1$:



P_N^m: Polygonzug der N mit m Stützstellen

$$\int_D \left| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right| dt = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left| \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| (t_i - t_{i-1})$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi_i - \varphi_{i-1}| \right) = \lim_{m\to\infty} L(P_N^m)$$

(ii) $\int_M 1 \, dO(x) \underset{k=1}{\overset{\uparrow}{=}} \int_B \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)(s,t) \right| d(s,t)$

mißt die Fläche von M mit Parametr. $\phi : B \to \mathbb{R}^3$

analog zu (i) wird B in Rechtecke $R = [s_0, s_0 + h] \times [t_0, t_0 + k]$ zerlegt. $\phi(R)$ ist dann nach Taylor ($0 \le \lambda, \mu \le 1$)

$$\phi(s_0 + \lambda h, t_0 + \mu k) \approx \phi(s_0, t_0) + \lambda h \, \phi_s(s_0, t_0) + \mu k \, \phi_t(s_0, t_0)$$

also das von $h\phi_s$ und $k\phi_t$ aufgespannte, um $\phi(s_0, t_0)$ verschobene Parallelogramm mit Fläche $hk|\phi_s \times \phi_t|$. Die entsprechende Riemann-Summe summiert über die Flächen aller dieser Parallelogramme, approximiert also $\phi(B)$.