Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“ **R. Kaiser**
Blatt 8
02.12.2002

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\omega : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ eine Pfaffsche Form mit

$$\begin{aligned} \omega(x)((1,1,0)) &= 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 1, \\ \omega(x)((1,0,1)) &= 4x_1 + 2x_2, \\ \omega(x)((0,1,1)) &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 \end{aligned}$$

für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Man stelle ω in der Form

$$\omega = \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \psi_3 dx_3$$

mit $\psi_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, dar.

b) Gibt es eine differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } df = \omega?$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $\{e^1, e^2, e^3\}$ die kanonische Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$,

$$\varphi := 2e^1 - 3e^2, \ \psi := e^2 + 2e^3, \ \chi := e^1 + e^3,$$
$$u := (1,0,0), \ v := (3,0,1), \ w := (0,1,2).$$

Man berechne:

a) $(\varphi \wedge \psi)(v, w)$,

b) $(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(u, v, w)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Bestimmen Sie für die angegebenen Differentialformen ω ihre (äußere) Ableitung $d\omega$. Können Sie eine Differentialform τ angeben mit $\omega = d\tau$?

a) $\omega := 2xy\,dx + x^2\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$,

b) $\omega := -z\,dx \wedge dy - y\,dx \wedge dz + dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$,

c) $\omega := (x^2 + y^2 + z^2)dx + y \arctan x\,dy + z\,dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

Abgabe: In der 9. Vorlesungswoche (9.12.-13.12.02) in den Übungen.

Musterlösung Blatt 7

Aufg 1: $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3*}$ Diff. form 1. Ordn.

$$\omega(x)((1,1,0)^T) = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 1$$
$$\omega(x)((1,0,1)^T) = 4x_1 + 2x_2 \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$
$$\omega(x)((0,1,1)^T) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 1$$

a) $\omega = \varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \varphi_3\, dx_3 \qquad \varphi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ i = 1,2,3$

Mit $dx_i(e_j) = e^i(e_j) = \delta^i_j \qquad e_j = (0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1}, 0)^T$

ergibt sich:

$$\omega(x)((1,1,0)^T) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 1$$
$$\omega(x)((1,0,1)^T) = \varphi_1(x) + \varphi_3(x) = 4x_1 + 2x_2 \qquad (*)$$
$$\omega(x)((0,1,1)^T) = \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 1$$

$(*)_2 - (*)_3$: $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 1$

mit $(*)_1$: $2\varphi_1(x) = 8x_1 + 2x_2 \iff \varphi_1(x) = 4x_1 + x_2$

$\Rightarrow \quad \varphi_3(x) = x_2$

$\Rightarrow \quad \varphi_2(x) = x_1 + 2x_3 + 1$

insgesamt: $\omega(x) = (4x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 + 2x_3 + 1)\, dx_2 + x_2\, dx_3$

b) $\omega \stackrel{?}{=} df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} 4x_1 + x_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ x_1 + 2x_3 + 1 &= \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ x_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \partial_{x_2}(4x_1 + x_2) = \partial_{x_1}(x_1 + 2x_3 + 1) \\ \partial_{x_3}(x_1 + 2x_3 + 1) = \partial_{x_2}(x_2) \\ \Leftrightarrow \quad 2 = 1 \quad ↯ \end{array}$$

Also ω nicht "exakt".

Aufg 2:

$\{e_i\}_{i=1,2,3}$: kanon. Basis des $\mathbb{R}^3$

$\{e^j\}_{j=1,2,3}$: duale Basis des $\mathbb{R}^{3*}$, d.h. $e^j(e_i) = \delta_i^j$

$\varphi = 2e^1 - 3e^2 \qquad u = (1,0,0)^T = e_1$

$\psi = e^2 + 2e^3 \qquad v = (3,0,1)^T = 3e_1 + e_3$

$\chi = e^1 + e^3 \qquad w = (0,1,2)^T = e_2 + 2e_3$

a) $(\varphi \wedge \psi)(v,w) = \det \begin{pmatrix} \varphi(v) & \varphi(w) \\ \psi(v) & \psi(w) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 36$

b) $(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} \varphi(u) & \varphi(v) & \varphi(w) \\ \psi(u) & \psi(v) & \psi(w) \\ \chi(u) & \chi(v) & \chi(w) \end{pmatrix}$

$= \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 8 + 30 + 6 - 40 = 4$

Aufg 3:

a) $\omega := 2xy\,dx + x^2\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

$$d\omega = 2\,d(xy)\wedge dx + d(x^2)\wedge dy$$
$$= (2x\,dy + 2y\,dx)\wedge dx + 2x\,dx\wedge dy$$
$$= -2x\,dx\wedge dy + 2x\,dx\wedge dy = 0$$

$$\text{Poincaré} \underset{\mathbb{R}^2 \text{ sternförmig}}{\Longrightarrow} \exists\, \tau \in \Omega^0(\mathbb{R}^2) : \omega = d\tau$$

$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d\tau = \partial_x\tau\,dx + \partial_y\tau\,dy \overset{!}{=} \omega$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \partial_x\tau = 2xy \\ \partial_y\tau = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau = x^2 y\,(+c)$$

b) $\omega := -z\,dx\wedge dy - y\,dx\wedge dz + dy\wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$$d\omega = -dz\wedge dx\wedge dy - dy\wedge dx\wedge dz + 0$$
$$= -dx\wedge dy\wedge dz + dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

$$\text{Poincaré} \Rightarrow \exists\, \tau \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) : \omega = d\tau$$

Ansatz: $\tau = f\,dx + g\,dy + h\,dz$; $\underbrace{f, g, h}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\underset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow} d\tau = \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{F}$$

$d\vec{F} = (dy\wedge dz,\ dz\wedge dx,\ dx\wedge dy)$
$\hat{=}$ Basis von $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y h - \partial_z g = 1 \\ \partial_z f - \partial_x h = y \\ \partial_x g - \partial_y f = -z \end{cases}$$

Ansatz: $f = 0$ (4)

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y h - \partial_z g = 1 \\ -\partial_x h = y \Rightarrow h = -xy + p(y,z) \\ \partial_x g = -z \Rightarrow g = -xz + q(y,z) \end{cases}$$

1. Zeile: $-x + \partial_y p + x - \partial_z q = 1$

erfüllt für $p = y$, $q \equiv 0$

insgesamt: $\tau = -xz \, dy + y(1-x) \, dz$

c) $\omega := (x^2+y^2+z^2)\,dx + y \arctan x \, dy + z \, dz \in \Omega^1(\mathbb{R}$

$$d\omega = (2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz) \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{y}{1+x^2} dx + \arctan x \, dy\right) \wedge dy + dz \wedge dz$$

$$= -2y\,dx \wedge dy + 2z\,dz \wedge dx + \frac{y}{1+x^2} dx \wedge dy$$

$$= y\left(\frac{1}{1+x^2} - 2\right) dx \wedge dy + 2z\,dz \wedge dx \neq 0$$

Wegen $d^2\tau = 0$ existiert kein $\tau \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ mit $d\tau = \omega$