Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“ **R. Kaiser**
Blatt 7
26.11.2002

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Man untersuche folgende Vektorfelder auf Existenz eines Potentials und gebe ggf. ein solches an.

a) $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u(x, y, z) = (2xy + z^2,\ x^2 + 2yz^3,\ 2xz + 3y^2z^2)$

b) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1, 2xy + z, 2z)$

c) $w : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3$ $w(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (-y, x, 0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $M = \{a \cos\varphi,\ b \sin\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Dabei sind $a, b > 0$ feste Zahlen. Zeigen Sie, daß M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.
Bestimmen Sie für $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und den Normalenvektorraum N_pM.

$2R\rho \cos\psi = \rho^2(1 - \cos^2\psi)$

$R^2 + 2R\rho\cos\psi + \rho^2\cos^2\psi = R^2 + \rho^2$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $0 < \rho < R$ feste Zahlen.
Zeigen Sie: $M = \{\cos\varphi(R + \rho\ \cos\psi), \sin\varphi(R + \rho\ \cos\psi), \rho \sin\psi) : \varphi \in [0, 2\pi],\ \psi \in [0, 2\pi]\}$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie M und geben Sie einen Atlas für M an.
Hinweis: Zeigen Sie, daß sich M schreiben läßt als

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - \rho^2)^2 - 4R^2(\rho^2 - z^2) = 0\}.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Ist $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

Abgabe: In der 8. Vorlesungswoche (2.12.-6.12.02) in den Übungen.

Musterlösung

Blatt 7

Aufg. 1 Gegeben: $\vec{v} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \in C^1(U)$

Notwendige (und in sternförmigen Gebieten hinreichende) Bedingung für die Existenz eines stetigen Potentials $\phi : U \to \mathbb{R}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad \hat{=} \quad \begin{aligned} \partial_y v_z &= \partial_z v_y \\ \partial_z v_x &= \partial_x v_z \\ \partial_x v_y &= \partial_y v_x \end{aligned} \qquad (*)$$

a) $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; u(x,y,z) = (2xy + z^2,\; x^2 + 2yz^3,\; 2xz + 3y^2z^2)^T$

$$(*) : \quad \begin{aligned} 6yz^2 &= 6yz^2 \\ 2z &= 2z \\ 2x &= 2x \end{aligned} \qquad \checkmark$$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \quad \vec{\nabla}\phi = \vec{u} \iff \begin{aligned} \partial_x \phi &= 2xy + z^2 \\ \partial_y \phi &= x^2 + 2yz^3 \\ \partial_z \phi &= 2xz + 3y^2z^2 \end{aligned} \qquad (**)$$

$(**)_1 : \quad \phi(x,y,z) = x^2y + xz^2 + \alpha(y,z)$

$(**)_2 : \quad x^2 + \partial_y \alpha = x^2 + 2yz^3$

$\Rightarrow \quad \partial_y \alpha = 2yz^3$

$\Rightarrow \quad \alpha = y^2z^3 + \beta(z)$

$\Rightarrow \quad \phi = x^2y + xz^2 + y^2z^3 + \beta(z)$

$(**)_3 : \quad 2xz + 3y^2z^2 + \beta' = 2xz + 3y^2z^2 \Rightarrow \beta' = 0$

Also: $\phi(x,y,z) = x^2y + xz^2 + y^2z^3 + C$

b) $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = (x^2+y^2+1,\ 2xy+z,\ 2z)^T$

$$(*):\quad \begin{aligned} 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 2y &= 2y \end{aligned} \quad ↯ \quad \text{Kein Potential!}$$

c) $\vec{w}: \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,\ x,\ 0)$

$$(*):\quad \begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \partial_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Trotzdem kein Potential [$\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$ nicht sternförmig!]

da: $$\oint_{\{\vec{x}:\ |\vec{x}|=1,\ z=0\}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} [v_x(x(t),y(t))\,\dot{x} + v_y(x(t),y(t))\,\dot{y}]\,dt \quad \Big|\ \begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t}\left(-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t\right) dt = 2\pi \neq 0;$$

Bemerkungen: 1) $\vec{w}$ wird auf der z-Achse singulär.

2) Die gewählte Kurve läßt sich im Def.-bereich D nicht auf einen Punkt kontrahieren.

3) $\vec{w}$ besitzt in jedem einfach zus. häng. Gebiet $\subset D$ ein Potential.

Aufg. 2: ~~$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \to (t, t^3)$~~

a) Beh: ~~$M := \alpha(\mathbb{R})$ ist eine 1-dim. Untermannigf. von $\mathbb{R}$~~

Aufg 2: $M = \{(a\cos\varphi, b\sin\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$, $a, b > 0$

Beh: M ist eine 1-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$
und für $p = (x, y) \in M$ ist
$$T_p M = \langle (y, -\tfrac{b^2}{a^2} x) \rangle, \quad N_p M = \langle (x, \tfrac{a^2}{b^2} y) \rangle$$

Bew: Betrachte $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1$

Es gilt: $p = (x, y) \in M \iff F(x, y) = 0$

denn:

"$\Rightarrow$": $p = (x, y) \in M \Rightarrow \exists\, \varphi \in [0, 2\pi]$: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$

$$F(a\cos\varphi, b\sin\varphi) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0$$

"$\Leftarrow$": Sei $F(x, y) = 0 \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \left|\frac{x}{a}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{y}{b}\right| \leq 1$

$\Rightarrow \exists\, \varphi_0 \in [0, 2\pi]$: $\frac{x}{a} = \cos\varphi_0 \iff x = a\cos\varphi_0$

Wegen $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 - \cos^2\varphi_0 = \sin^2\varphi_0$ folgt

$y = \pm b\sin\varphi_0$

Setze nun $\varphi = \begin{cases} \varphi_0 & \text{für "+"} \\ 2\pi - \varphi_0 & \text{für "−"} \end{cases}$ $\left(\Rightarrow \begin{array}{l} \cos\varphi_0 = \cos\varphi \\ \sin\varphi_0 = -\sin\varphi \end{array}\right)$

dann gilt in jedem Fall:

$x = a\cos\varphi \ \wedge \ y = b\sin\varphi$

also $p = (x, y) \in M$

(3a)

Also: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$

Noch zu prüfen: $Rg\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 1 \iff \vec{\nabla} F(x,y) \neq 0$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right) = 0 \iff (x,y) = (0,0) \notin M$$

Also $\vec{\nabla} F\Big|_M \neq 0$

Insgesamt: M ist 1-dim UMF von $\mathbb{R}^2$

Tangentenvektoren: Sei $\gamma : \begin{cases} [0,2\pi) \to M \\ t \mapsto (a\cos t, b\sin t) \end{cases}$ Kurve in M

$$\gamma' : t \mapsto (-a\sin t, b\cos t) = \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\underbrace{b\sin t}_{y}, \frac{b}{a}\underbrace{a\cos t}_{x}\right)}$$

Tangentenvektor im $p = (x,y) = \left(-\frac{a}{b}y, \frac{b}{a}x\right) = -\frac{a}{b}\left(y, -\frac{b^2}{a^2}x\right)$

$$\Rightarrow T_p M = \left\langle \left(y, -\frac{b^2}{a^2}x\right) \right\rangle \quad \text{(1-dim)}$$

$$\Rightarrow N_p M = \left\langle \left(y, -\frac{b^2}{a^2}x\right) \right\rangle^{\perp} = \left\langle \left(x, \frac{a^2}{b^2}y\right) \right\rangle \quad ([2-1=]\,1\text{-dim})$$

<u>Afg 3:</u>

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = (R + \rho\cos\varphi)\cos t,$

$y = (R + \rho\cos\varphi)\sin t,\ z = \rho\sin\varphi$ für $t \in [0,2\pi]$,

$\varphi \in [0,2\pi]\}$ $\quad 0 < \rho < R$ fest

<u>Beh:</u> M ist eine 2-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$

<u>Bew</u>: Sei $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-R^2-\varrho^2)^2 - 4R^2(\varrho^2-z^2)$$

Zeige: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$

"$\subset$": Sei $(x,y,z) \in M \Rightarrow F(x,y,z) = 0$

d.h. $F(x(\vartheta,\varphi), y(\vartheta,\varphi), z(\vartheta,\varphi))$

$$= ((R+\varrho\cos\varphi)^2 + \varrho^2\sin^2\varphi - R^2-\varrho^2)^2 - 4R^2\varrho^2(1-\sin^2\varphi)$$

$$= (R^2 + 2\varrho R\cos\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi - R^2-\varrho^2)^2 - 4R^2\varrho^2\cos^2$$

$$= 4\varrho^2 R^2\cos^2\varphi - 4R^2\varrho^2\cos^2\varphi = 0 \quad \checkmark$$

"$\supset$": Sei (x,y,z) so, daß $F(x,y,z) = 0$

Zeige, $\exists\, \varphi, \vartheta \in [0,2\pi)^2 : x = x(\vartheta,\varphi),\ y = y(\vartheta,\varphi)$
$z = z(\vartheta,\varphi)$

Es gilt: $(x^2+y^2+z^2-R^2-\varrho^2)^2 = 4R^2(\varrho^2-z^2)$

$$\Rightarrow |z| \le \varrho \quad \text{d.h. } \exists\, \varphi_0 \in [0,2\pi) : z = \varrho\sin\varphi_0$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2+\varrho^2-\varrho^2\cos^2\varphi_0 - R^2-\varrho^2)^2 = 4R^2\varrho^2\cos^2\varphi_0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\varrho^2\cos^2\varphi_0 - R^2 = \pm 2R\varrho\cos\varphi_0$$

Setze $\varphi = \begin{cases} \varphi_0 & \text{für "+"} \\ \pi-\varphi_0 & \text{für "−"} \end{cases}$ $\quad [\sin\varphi = \sin\varphi_0,\ \cos\varphi = -\cos\varphi_0]$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = R^2 + 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi = (R+\varrho\cos\varphi)^2$$

⑤

$\Rightarrow \exists\, \varphi \in [0, 2\pi)$: $x = (R + \rho\cos\psi)\cos\varphi$

$y = (R + \rho\cos\psi)\sin\varphi$

außerdem gilt: $z = \rho\sin\psi$

Noch zu zeigen: $\vec{\nabla} F \neq 0$ auf $M \cap U$, $U \subset \mathbb{R}^3$

$$\vec{\nabla} F = \left(4x(x^2+y^2+z^2-R^2-\rho^2),\ 4y(\ldots),\ 4z(\ldots)+8R^2z\right)$$

Ann.: $\exists\, \vec{x} \in M$: $\vec{\nabla} F(\vec{x}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16x^2 \cdot 4R^2(\rho^2-z^2) = 0 \\ 16y^2 \cdot 4R^2(\rho^2-z^2) = 0 \\ 16z^2 \cdot 4R^2(\rho^2-z^2) = 64R^4z^2 \Leftrightarrow 64z^2(R^2-\rho^2+z^2) = 0 \end{cases}$$

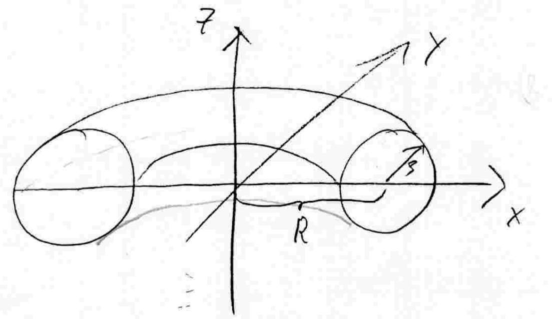
$\alpha)$ $z = 0 \Rightarrow x = y = 0$ ↯ $0 \notin M$ $(\rho < R!)$

$\beta)$ $z \neq 0 \Rightarrow z^2 = \rho^2 - R^2 < 0$ ↯

$\Rightarrow \vec{\nabla} F \neq 0$ auf M,

da $\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} F(\vec{x})$ stetig folgt $\vec{\nabla} F \neq 0$ auf $M \cap U$

mit $U \subset \mathbb{R}^3$ „genügend nahe an M".

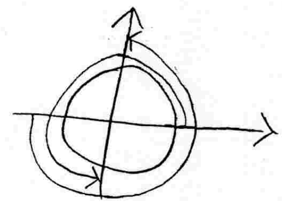


Ein Atlas für M besteht (z.B.) aus folgenden 4 Karten:

$$\phi_i : \mathbb{R}^2 \supset D_i \to \mathbb{R}^3 \qquad i = 1,..,4$$

$$\phi_i = \phi(\varphi,\psi) = (x(\varphi,\psi),\ y(\varphi,\psi),\ z(\varphi,\psi))$$

$$D_1 = \left(0, \tfrac{3\pi}{2}\right) \times \left(0, \tfrac{3\pi}{2}\right)$$
$$D_2 = \left(0, \tfrac{3\pi}{2}\right) \times \left(\pi, \tfrac{5\pi}{2}\right)$$
$$D_3 = \left(\pi, \tfrac{5\pi}{2}\right) \times \left(0, \tfrac{3\pi}{2}\right)$$
$$D_4 = \left(\pi, \tfrac{5\pi}{2}\right) \times \left(\pi, \tfrac{5\pi}{2}\right)$$



D_i offen, $M \subset \bigcup_{i=1}^{4} \phi(D_i)$, $\phi : D_i \to \phi(D_i)$ topologisch

$\mathrm{Rang}(D_\phi)$ maximal $(=2)$?

Dazu:
$$D_\phi = \left(\underbrace{\begin{matrix} -(R+\rho\cos\psi)\sin\varphi \\ (R+\rho\cos\psi)\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}}_{\vec v_1} \quad \underbrace{\begin{matrix} -\rho\sin\psi\cos\varphi \\ -\rho\sin\psi\sin\varphi \\ \rho\cos\psi \end{matrix}}_{\vec v_2} \right)$$

<u>Ann</u>: $\vec v_1 = \lambda \vec v_2$

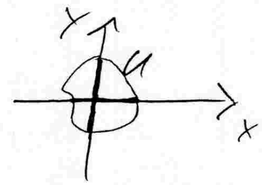
$$\Rightarrow \quad \cos\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\psi = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -R\sin\varphi = \mp \rho\lambda\cos\varphi \\ R\cos\varphi = \mp \rho\lambda\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R^2 = \rho^2\lambda^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = \pm\cos\varphi \\ \cos\varphi = \mp\sin\varphi \end{cases} \quad \lightning$$

Aufg 4:

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$



Ist M eine 1-d UMF des $\mathbb{R}^2$?

Nein, denn dann wäre M in einer Umgebung U des Ursprungs Graph einer Funktion f bzw. g, d.h.

$$M \cap U = \{(x, f(x)) : x \in U' \subset \mathbb{R}\} \quad (a)$$

$\vee$

$$M \cap U = \{(g(y), y) : y \in U'' \subset \mathbb{R}\} \quad (b)$$

$f : U' \to \mathbb{R}$, $g : U'' \to \mathbb{R}$ diffb.

Im Fall (a) gilt für $x \in U' \setminus \{0\}$: $f(x) = 0$

$\underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f(0) = 0$, d.h. $\{y\text{-Achse}\} \cap U \not\subset M$ ↯

Analog im Fall (b).