Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“ **R. Kaiser**
Blatt 6
19.11.2002

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektorfelder $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Potential besitzen und geben Sie es ggf. an:

$$\text{i)}\ v(x,y) := (x^2y, xy^2), \quad ii)\ v(x,y) := (2xy, x^2+1).$$

b) Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$. Berechnen Sie für die in a), b) definierten Vektorfelder $\int_\alpha v\, ds$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Die dreimal stetig differenzierbaren Funktionen $u, v, p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien Lösungen der Gleichungen von Navier-Stokes:

$$(1) \quad \begin{cases} \binom{-\Delta u}{-\Delta v} + u\binom{u_x}{v_x} + v\binom{u_y}{v_y} + \binom{p_x}{p_y} &= 0, \\ u_x + v_y &= 0 \end{cases}$$

Dabei ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace-Operator.
Zeigen Sie: Es gibt eine „Stromfunktion“ ϕ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\phi_x = -v, \quad \phi_y = u,$$

$$(2) \quad -\Delta(\Delta\phi) + \phi_y(\Delta\phi)_x - \phi_x(\Delta\phi)_y = 0.$$

Läßt sich allein aus der Kenntnis von (2) auf die Gültigkeit von (1) zurückschließen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man berechne $\int_\gamma v \cdot ds$ für

a) $v(x,y) = (x^2 + xy, x^2y - y^2)$; γ beschreibe das positiv orientierte Dreieck in der Ebene mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

b) $v(x,y) = (xy, -x^2)$; γ sei die „Lemniskate“ $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ ((r,φ): Polarkoordinaten).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$ und $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int_A F(x,y)\, d(x,y)$$

a) direkt

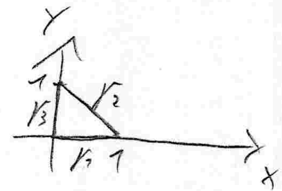
b) in dem Sie den 2-dim. Satz von Stokes auf ein geeignetes Vektorfeld anwenden und Randintegrale auswerten.

Abgabe: In der 7. Vorlesungswoche (25.11.-29.11.02) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 3:

Zu berechnen $\int_\gamma v \, ds$ für



a) $v(x,y) = (x^2 + xy, \, x^2 y - y^2)$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$\gamma_1 : (x,y) \mapsto (t,0) \quad 0 \le t \le 1$

$\gamma_2 : (x,y) \mapsto (1-t,t) \quad 0 \le t \le 1$

$\gamma_3 : (x,y) \mapsto (0,1-t) \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_1} v \cdot ds = \int_0^1 t^2 \, dt = 1/3, \quad \int_{\gamma_3} v \cdot ds = \int_0^1 -(1-t)^2(-1) \, dt = 1/3$$

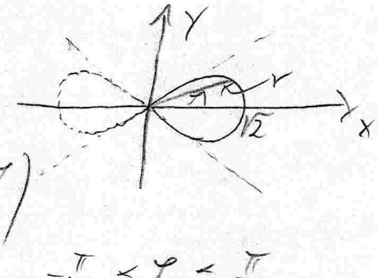
$$\int_{\gamma_2} v \cdot ds = \int_0^1 \left[\left((1-t)^2 + t(1-t)\right)(-1) + (1-t)^2 t - t^2 \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[t^3 - 3t^2 + 2t - 1 \right] dt = -3/4$$

$$\Rightarrow \int_\gamma v \, ds = \int_{\gamma_1} \ldots + \int_{\gamma_2} \ldots + \int_{\gamma_3} \ldots = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{12}}}$$

b) $v(x,y) = (xy, \, -x^2)$

$\gamma : (r, \varphi) \mapsto (\sqrt{2\cos 2\varphi}, \varphi), \; -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ Lemniskate



Kartesische Koordinaten:

$$\gamma : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2\cos 2\varphi} \cdot \cos\varphi \\ \sqrt{2\cos 2\varphi} \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sin 2\tau}{\sqrt{2\cos 2\tau}} \cos\tau - \sqrt{2\cos 2\tau}\, \sin\tau \\ -\frac{2\sin 2\tau}{\sqrt{2\cos 2\tau}} \sin\tau + \sqrt{2\cos 2\tau}\, \cos\tau \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma v \cdot ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(x(\tau)\, y(\tau)\, \dot{x}(\tau) - x^2(\tau)\, \dot{y}(\tau) \right) d\tau$$

$$= -\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\cos 2\tau)^{3/2} \cos\tau \, (\sin^2\tau + \cos^2\tau)\, d\tau$$

$$= -2\sqrt{8} \int_0^{\pi/4} (\underbrace{\cos 2\tau}_{1-2\sin^2\tau})^{3/2} \cos\tau \, d\tau \underset{\sin\tau =: x}{=} -2\sqrt{8} \int_0^{\sqrt{2}/2} (1-2x^2)^{3/2}\, dx$$

$$\underset{\sqrt{2}x =: y}{=} -4 \int_0^1 (1-y^2)^{3/2}\, dy \underset{y =: \sin\varphi}{=} -4 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \, d\varphi}_{= \frac{3}{16}\pi \ (\text{p.I.})} = -\frac{3}{4}\pi .$$

~~Anm + Monot. des Integrals [illegible]~~

$$\infty > \int_{[0,1]} |f(x)|\,dx \geq \int_{[0,1]} \phi_n(x)\,dx \geq \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

~~$\Rightarrow$ Konv. der harm. Reihe~~ ↯

Aufg. 1: $\quad \vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Vektorfeld

a) i) $\vec{v}(x,y) := (x^2 y, x y^2)$

ii) $\vec{v}(x,y) := (2xy, x^2+1)$

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials:
Verschwinden der "Rotation": $\quad \partial_y v_1 = \partial_x v_2$

i): $\quad x^2 = y^2$ ↯ Kein Potential

ii): $\quad 2x = 2x$ ✓

Im $\mathbb{R}^2$ (sternförmig!) ist die Bedingung gleichzeitig hinreichend. Bestimmung des Potentials für ii):

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \partial_x P &= v_1 \\ \partial_y P &= v_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

$(*)_1 : \partial_x P = 2xy \Rightarrow P(x,y) = x^2 y + \alpha(y)$

Einsetzen in $(*)_2$: $\partial_y P = x^2 + \alpha'(y) = x^2 + 1 \Rightarrow \alpha'(y) = 1$

$\Rightarrow \alpha(y) = y + c$

$\Rightarrow P(x,y) = y(x^2+1) + c$

b) $\vec{\alpha}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t)$, $\dot{\vec{\alpha}}(t) = (-\sin t, \cos t)$

Berechne: $\int_{\vec{\alpha}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\alpha(t)) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(t)\, dt$

$$i): \int_0^{2\pi} \Big[\underbrace{\cos^2 t \sin t}_{x^2 y} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} + \underbrace{\cos t \sin^2 t}_{x y^2} \underbrace{\cos t}_{\dot{y}}\Big]\, dt = 0$$

$$ii): \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{v}(\alpha(t))}_{\vec{\nabla} P} \cdot \dot{\vec{\alpha}}(t)\, dt \underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} P(\vec{\alpha}(t)) = P(\vec{\alpha}(2\pi)) - P(\vec{\alpha}(0)) = 0$$

Bemerkung zu i): gilt nicht allgemein! Betrachte z.B. den verschobenen Kreis: $\vec{\alpha}(t) = (1 + \cos t, \sin t)$

$$\int_{\vec{\alpha}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \Big[(1+\cos t)^2 \sin t (-\sin t) + (1 + \cos t) \sin^2 t \cos t\Big]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)\Big[-\sin^2 t - \cancel{\cos t \sin^2 t} + \cancel{\sin^2 t \cos t}\Big]\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -\pi \neq 0\ !$$

Aufg. 2:

$u, v, p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ 3× stet. diffb.

$$(1) \begin{cases} -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + u\, \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + v\, \partial_y \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} p = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \end{cases}$$

$$\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$$

Beh: Es existiert $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ "Stromfunktion"

mit $\phi \in C^4(\mathbb{R}^2)$

$$(2) \quad -\Delta^2 \phi + \partial_y \phi \, \partial_x (\Delta \phi) - \partial_x \phi \, \partial_y (\Delta \phi) = 0$$

Bew: Betrachte das Vektorfeld $\vec{V} = (-v, u)^T$.

Integrabilitätsbed.: $\partial_y (-v) = \partial_x u \iff \partial_x u + \partial_y v = 0$ ✓

$\mathbb{R}^2$ sternförmig $\Longrightarrow \exists\, \phi \in C^4(\mathbb{R}) : \partial_x \phi = -v, \ \partial_y \phi = u$

Einsetzen in (1):

$$\begin{cases} -\Delta \partial_y \phi + \partial_y \phi \, \partial_x \partial_y \phi - \partial_x \phi \, \partial_y^2 \phi + \partial_x p = 0 & | \cdot \partial_y \\ \Delta \partial_x \phi - \partial_y \phi \, \partial_x^2 \phi + \partial_x \phi \, \partial_x \partial_y \phi + \partial_y p = 0 & | \cdot (-) \partial_x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\Delta \partial_y^2 \phi + \partial_y \phi \, \partial_x \partial_y^2 \phi - \partial_x \phi \, \partial_y^3 \phi + \partial_x \partial_y p = 0 \\ -\Delta \partial_x^2 \phi + \partial_y \phi \, \partial_x^3 \phi - \partial_x \phi \, \partial_x^2 \partial_y \phi - \partial_y \partial_x p = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow -\Delta (\partial_x^2 + \partial_y^2) \phi + \partial_y \phi \, \partial_x (\partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi) - \partial_x \phi \, \partial_y (\partial_y^2 \phi + \partial_x^2 \phi) = 0$$

$$\iff -\Delta^2 \phi + \partial_y \phi \, \partial_x (\Delta \phi) - \partial_x \phi \, \partial_y (\Delta \phi) = 0$$ ✓

Gegenrichtung: Sei $\phi \in C^4(\mathbb{R}^2)$ löst (2)

Setze $u := \partial_y \phi$, $v := -\partial_x \phi$

$$(2) \Longrightarrow \partial_y \underbrace{(-\Delta u + u \partial_x u + v \partial_y u)}_{U_1} - \partial_x \underbrace{(-\Delta v + u \partial_x v + v \partial_y v)}_{U_2} = 0$$

Int. gr. bed. für $\vec{U}$ erfüllt $\Longrightarrow \exists\, p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \underbrace{-\partial_x p = U_1, \ -\partial_y p = U_2}_{\hat{=}\, (1)_1}$

außerdem gilt: $\partial_x u + \partial_y v = \partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi = 0$
$\hat{=}\, (1)_2$ ✓

4)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2/y^2 \end{cases}$$

a) A ist gemäß Vorlesung (Jordan-) meßbar,
f ist beschränkt und stetig $\Rightarrow$ (Riemann-) integrierbar

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_1^2 \int_x^{x^2} x^2/y^2 \, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(\int_x^{x^2} \frac{1}{y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_x^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 (x-1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

b) $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diffb.

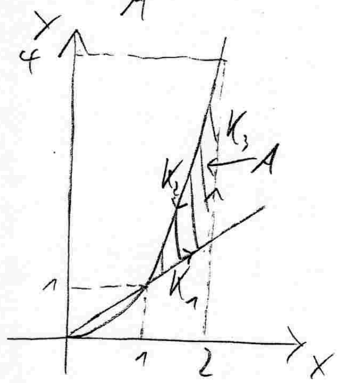
Satz von Stokes in der Ebene:

$$\int_A (\partial_x g - \partial_y f)\, d(x,y) = \int_{\partial A} (f\, dx + g\, dy)$$

Wähle z. B.: $f = x^2/y \quad g \equiv 0$

$$\Rightarrow -\partial_y f = x^2/y^2$$

$$\Rightarrow \int_A x^2/y^2 \, d(x,y) = \int_{\partial A} \frac{x^2}{y} \, dx$$



$$= \int_{K_1 \cup K_2} x^2/y \, dx$$

$$= \int_1^2 t^2/t \, dt - \int_1^2 t^2/t^2 \, dt$$

$$= \left[t^2/2\right]_1^2 - \left[t\right]_1^2 = 1/2$$

K_1 : $x = t, \; y = t \quad 1 \le t \le 2$

K_2 : $x = t, \; y = t^2 \quad 1 \le t \le 2$

K_3 : $x = 2, \; y = t \quad 2 \le t \le 4$