**Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“** **R. Kaiser**
Blatt 5
12.11.2002

---

**Aufgabe 1** (5 Punkte)

a) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie für alle $R > 0$ : $\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le R\}} f(|x|)\, dx = n e_n \int\limits_0^R f(r) r^{n-1}\, dr$, wobei $e_n := \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le 1\}} dx$ das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel ist.

Hinweis: Differenzieren Sie beide Seiten der Behauptung bzgl. $R$.

b) Berechnen Sie $\int\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\}} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$ $(R > 0)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$.
Verwenden Sie dieses Resultat und den Satz von Fubini, um $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$ zu berechnen.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $p, q \ge 1$, $p \le q$, $f \in L^q(I)$. Zeigen Sie: Dann ist $f \in L^p(I)$ und es gilt

$$|I|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \le |I|^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

b) Geben Sie Beispiele an für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in L^1(\mathbb{R}) \backslash L^2(\mathbb{R})$ und $g \in L^2(\mathbb{R}) \backslash L^1(\mathbb{R})$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $r, p, q \ge 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Ferner seien $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I)$. Zeigen Sie: Dann ist $f \cdot g \in L^r$, und es gilt $\|f \cdot g\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $r, p, q \ge 1$, $p \le q \le r$. Ferner sei $f \in L^p(I) \cap L^r(I)$. Zeigen Sie: Dann ist $f \in L^q(I)$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{(1-\lambda)}{r}$, so ist $\lambda \in [0,1]$ und $\|f\|_q \le \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$.

*Hinweis*: Verwenden Sie geeignet die Hölder'sche Ungleichung.

b.w.

**Zusatzaufgabe** (5 Punkte)

Für $j \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi_j(x) = 2^j \cdot \chi_{(2^{-j},2^{-j+1}]}(x)$. Definiere $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x))\varphi_j(y)$.

Zeigen Sie: $f$ ist meßbar, für alle $x, y \in [0,1]$ existiert $G(x) = \int\limits_{[0,1]} f(x,y)\, dy$, $F(y) = \int\limits_{[0,1]} f(x,y)\, dx$, $G$ und $F$ sind auf $[0,1]$ integrierbar.

Berechnen Sie $\int\limits_{[0,1]} F(y)\, dy$ und $\int\limits_{[0,1]} G(x)\, dx$ und entscheiden Sie, ob $f$ auf $[0,1] \times [0,1]$ integrierbar ist.

Hinweis: Skizzieren Sie die Werteverteilung von $f$.

**Abgabe:** In der 6. Vorlesungswoche (18.11.-22.11.02) in den Übungen.

# Musterlösungen



## Aufg 2:

Hölder: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$f \in L_p(I)$, $g \in L_q(I) \Rightarrow f \cdot g \in L_1(I)$

$\wedge \; \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

i) $I \subset \mathbb{R}$ beschränktes Intervall, $p, q \geq 1$, $p \leq q$

$f \in L^q(I)$

Beh: $f \in L_p(I) \wedge |I|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq |I|^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q$

Bew: $p = q$: trivial

$p < q$: Setze $\tilde{p} := \frac{q}{p}$, $\tilde{q} = \frac{q}{q-p}$

dann gilt $\tilde{p}, \tilde{q} > 1$ und $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1$

$$\|f\|_p^p = \int_I 1 \cdot |f(x)|^p \, dx \underset{\text{Hölder mit } \tilde{p}, \tilde{q}}{\leq} \|1\|_{\tilde{q}} \, \| |f|^p \|_{\tilde{p}}$$

$$= \left( \int_I 1 \, dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \left( \int_I |f|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}} = |I|^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_q^p$$

$$\Rightarrow f \in L_p(I) \wedge \|f\|_p \leq |I|^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_q$$

b) Beispiel für $f \in L_1(\mathbb{R}) \setminus L_2(\mathbb{R})$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{1/2}} & |x| \leq 1, \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$, uneig. R-integrierbar auf $\mathbb{R}$ => L-integrierbar

$\Rightarrow f \in L_1(\mathbb{R})$

$|f|^2 = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \\ 0 \end{cases}$ nicht uneig. R-int.bar => nicht L-int.bar

$\Rightarrow f \notin L_2(\mathbb{R})$

Beispiel für $g \in L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$ :

$$g(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,dx = 2\ln(1+x)\Big|_0^\infty$ existiert nicht

$\Rightarrow g \notin L_1(\mathbb{R})$

$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = 2\,\frac{-1}{1+x}\Big|_0^\infty = 2$ existiert

$\Rightarrow g \in L_2(\mathbb{R})$

<u>Folgerung</u>: a) gilt nicht falls $I$ nicht beschränkt!

## Aufgabe 3:



a) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $r, p, q \geq 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$f \in L_p(I)$, $g \in L_q(I)$

Beh: $f \cdot g \in L_r \wedge \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Bew: Setze $\tilde{p} = \frac{p}{r}$, $\tilde{q} = \frac{q}{r}$ dann gilt

$\tilde{p}, \tilde{q} \geq 1$, da $\frac{1}{p} < \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{p}{r} > 1$

$\frac{1}{q} < \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{q}{r} > 1$

und $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{r}{r} = 1$

außerdem $|f|^r \in L_{\tilde{p}}$, $|g|^r \in L_{\tilde{q}}$

$\underset{\text{Hölder}}{\Rightarrow} |f|^r \cdot |g|^r \in L_1 \Leftrightarrow f \cdot g \in L_r$

und $\|f \cdot g\|_r^r = \| |f \cdot g|^r \|_1 \leq \| |f|^r \|_{\tilde{p}} \cdot \| |g|^r \|_{\tilde{q}}$

$= \left(\int |f|^p \, dx\right)^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\int |g|^q \, dx\right)^{\frac{r}{q}}$

$= \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$

$\Rightarrow \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

b) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $p, q, r \geq 1$, $p \leq q \leq r$

$f \in L_p(I) \cap L_r(I)$

Beh: $f \in L_q(I) \wedge \|f\|_q = \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$

mit $\lambda \in [0,1]$ so daß $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$.

Bem: o.B.d.A. $p < q < r$

Vorbem: $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \Rightarrow \lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \quad 0 < \lambda = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)}_{>0} < \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} = 1$$

Setze $f_1 = |f|^{(1-\lambda)q}$, $f_2 = |f|^{\lambda q}$

$\Rightarrow f_1 \in L_{\frac{r}{(1-\lambda)q}}$, da $f \in L^r$ $\wedge$ $f_2 \in L_{\frac{p}{\lambda q}}$, da $f \in L_p$

außerdem $\frac{r}{(1-\lambda)q} \geq \frac{r}{q} > 1$, weil $\frac{\lambda}{p} q + \frac{1-\lambda}{r} q = \frac{1}{q} q = 1$

und $\frac{p}{\lambda q} > 1$

Hölder $\Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in L_1 \Leftrightarrow |f|^q \in L_1 \Leftrightarrow f \in L_q$

und

$$\|f\|_q^q = \|f_1 \cdot f_2\|_1 \leq \|f_1\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \, \|f_2\|_{\frac{p}{\lambda q}}$$

$$= \left(\int |f|^r dx\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \cdot \left(\int |f|^p dx\right)^{\frac{\lambda q}{p}}$$

$$= \left\{ \|f\|_r^{1-\lambda} \, \|f\|_r^{\lambda} \right\}^q \Rightarrow \text{Beh.}$$

Bemerkung: "Interpolationsungleichung"

$J_{n+1} \geq J_n$ da $Z_n \subset Z_{n+1}$ und das Infimum auf einer Teilmenge nur größer werden kann.

Sei $x \in (0,1) \setminus \{\tfrac{1}{2}\}$ fest: $\left.\begin{array}{l} J_n(x) \nearrow \\ J_n(x) \le f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow J_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} J(x)$ konvergent

Frage: $J(x) = f(x)$?

Sei $x \in (I^n_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$, $|I^n_{i_n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Für $n$ genügend groß ($n \geq N$) gilt: $J_n(x) = \inf\limits_{I^n_{i_n}} f = f(\xi_n)$

mit $\xi_n \in I^n_{i_n}$, da $f$ stetig auf $I^n_{i_n}$

Wenn $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ und der Stetigkeit von $f$ in $x$ folgt

$$\begin{array}{ccc} J_n(x) & = & f(\xi_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J(x) & = & f(x) \end{array}$$

insgesamt: $J_n \nearrow f$ f.ü. ✓

---

Aufg 1:

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig $\quad R \geq 0$

Beh: $$\underbrace{\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le R\}} f(|x|)\,dx}_{F(R)} = \underbrace{n\, e_n \int_0^R f(r)\, r^{n-1}\, dr}_{G(R)}$$

6

$e_n := \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le 1\}} 1\,dx$ Volumen der n-dim. Einheitskugel

Bew:

Differentiation von F und G:

$$\frac{dG}{dR} = f(R)\, R^{n-1}\, n\, e_n$$

$$\frac{dF}{dR} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(F(R+h)-F(R)\Big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\{x:\, R\le |x|\le R+h\}} f(|x|)\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\{x:\, R\le |x|\le R+h\}}\big(f(|x|)-f(R)\big)\,dx}_{I(h)} + f(R)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\{x:\, R\le |x|\le R+h\}} 1\,dx}_{J(h)}$$

$$\lim_{h\to 0} J(h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_{\{|x|\le R+h\}} 1\,dx - \int_{\{|x|\le R\}} dx\Big]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_{\{|\tilde{x}|\le 1\}} (R+h)^n\,d\tilde{x} - \int_{\{|\tilde{x}|\le 1\}} R^n\,d\tilde{x}\Big] \qquad x=(R+h)\tilde{x} \text{ bzw. } x = R\tilde{x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\underbrace{(R+h)^n - R^n}_{nR^{n-1}h + O(h^2)}\Big]\, e_n = n R^{n-1} e_n$$

Zu $I(h)$: Sei $\varepsilon > 0$ vorg.

$h$ so klein, daß gilt: $\big|f(|x|) - f(R)\big| \le \frac{\varepsilon}{nR^{n-1} e_n}$

für $|x| \in [R, R+h]$

$$\Rightarrow \quad |I(h)| \le \frac{1}{h}\,\frac{\varepsilon}{nR^{n-1}e_n}\int_{\{x:\, R\le |x|\le R+h\}} 1\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}|I(h)| \le \frac{\varepsilon}{nR^{n-1}e_n}\,\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\{x:\, R\le |x|\le R+h\}} 1\,dx \overset{(S.0)}{=} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} I(h) = 0$$

$\varepsilon$ bel.

insgesamt: $F$ ist auf $[0,\infty)$ diffb. und

$$\frac{dF}{dR} = f(R)\,nR^{n-1}e_n$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} F'(R) &= G'(R) \\ F(0) &= G(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(R) = G(R) \quad \forall\, R \ge 0.$$

b) Nach 0) gilt

$$I_R := \int_{\{|(x,y)|\le R\}} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = 2\pi\int_0^R r e^{-r^2}\,dr$$

$$= \pi\,(-)e^{-r^2}\Big|_0^R = \pi\left(1-e^{-R^2}\right) < \pi$$

Mit $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}$, $f_R(x,y) := f\,\chi_{\{x^2+y^2\le R^2\}}$ ist $f$ nach dem Satz von Levi auf $\mathbb{R}^2$ integrierbar mit

$$\pi = \lim_{R\to\infty} I_R = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right\} dy$$

$$= \left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right\}^2 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

~~Auf $(\delta, \pi-\delta)^2$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ ist aber $f$ integrierbar, da $f$ auf $[\delta, \pi-\delta]^2$ außer auf eine Nullmenge mit einer stetigen und damit R-intb. Funktion übereinstimmt.~~

~~$\Rightarrow$ $f$ L-intb. $\wedge$ L-Integral = R-Integral.~~

~~c) Beh: Auf $(0,1)$ ist $f(x) = 1/\sqrt{x}$ integrierbar aber nicht $f^2$.~~

~~Bew: Setze in a) $\mu = \frac{1}{2} \wedge \lambda = 0$ bzw.~~

~~$\mu = 1 \wedge \lambda = 0 \Rightarrow$ Beh.~~

~~Folgerung: Die Menge der L-integrierbaren Funktionen ist gegen Multiplikation nicht abgeschlossen!~~

---

Aufg 4 (Ersatzaufgabe):

Gegeben:
$$\tau_j : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2^j \chi_{(2^{-j}, 2^{-j+1}]} \end{cases} \quad j \in \mathbb{N}$$

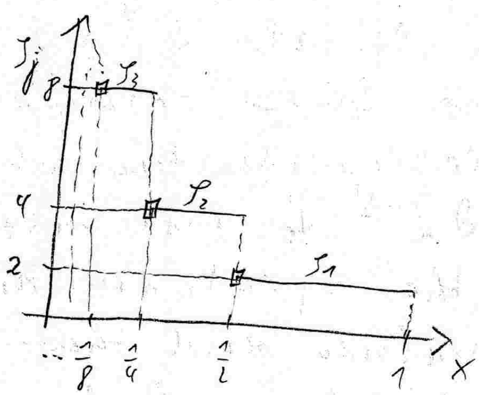
$$f : \begin{cases} [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} [\tau_j(x) - \tau_{j+1}(x)]\, \tau_j(y) \end{cases}$$

Beh: $f$ meßbar, $G(x) := \int_{[0,1]} f(x,y)\, dy$ und

$F(y) := \int_{[0,1]} f(x,y)\,dx$ existieren und sind auf $[0,1]$ integrierbar, aber $\int_{[0,1]} G(x)\,dx \neq \int_{[0,1]} F(y)\,dy$

und $f$ ist nicht integrierbar.

Bew:



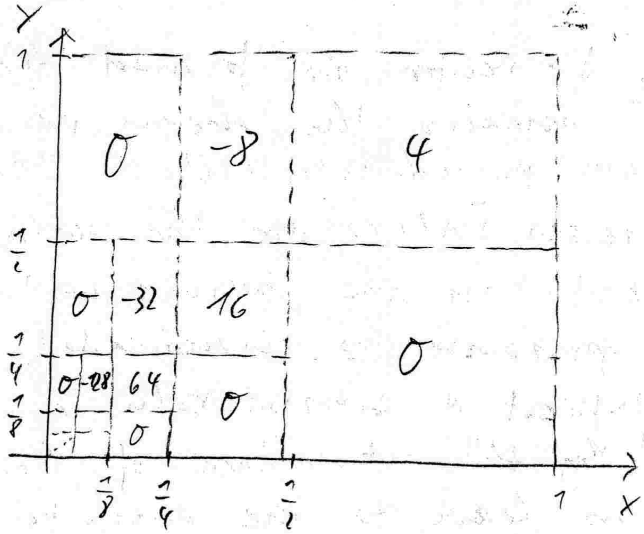

$$\begin{aligned} f(x,y) = & (\delta_1 - \delta_2)(x)\,\delta_1(y) \\ & + (\delta_2 - \delta_3)(x)\,\delta_2(y) \\ & + (\delta_3 - \delta_4)(x)\,\delta_3(y) \\ & + \dots \end{aligned} \qquad (*)$$

Die Partialsummen von $f(x,y)$ sind (nicht monoton wachsende) Treppenfunktionen und für festes $(x,y) \in (0,1]^2$ gibt es genau ein $l$ und $k \in \mathbb{N}$, so daß gilt: $x \in (2^{-l}, 2^{-l+1}]$, $y \in (2^{-k}, 2^{-k+1}]$. Nur für $l = k$ oder $l = k+1$ ist genau ein Summand in $(*)$ [der $k$-te] $\neq 0$. $\Rightarrow$ Für festes $(x,y)$ ist $(*)$ eine endliche Summe, also konvergent $\Rightarrow$ meßbar

Es gilt: $\int_{[0,1]} \delta_j(\xi)\,d\xi = 2^j\left(2^{-j+1} - 2^{-j}\right) = 2 - 1 = 1$

Für $x \in [0,1]$ gilt:

a) $x = 0$: $f(0,y) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$




$= 1$

i) $x \in (0, \frac{1}{2}]$ : Es gibt genau ein $j_0 \geq 1$ mit $\gamma_{j_0}(x) \neq 0$

$\Rightarrow f(x,y) = \gamma_{j_0}(x)\,\gamma_{j_0}(y) - \gamma_{j_0}(x)\,\gamma_{j_0-1}(y)$ Treppenfunktion in y!

$$G(x) = \gamma_{j_0}(x) \int_{[0,1]} \gamma_{j_0}(y)\,dy - \gamma_{j_0}(x) \int_{[0,1]} \gamma_{j_0-1}(y)\,dy$$

$$= \gamma_{j_0}(x) - \gamma_{j_0}(x) = 0$$

ii) $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ : $\gamma_1(x) = 2 \neq 0$ $\gamma_j(x) = 0$ $\forall j \geq 2$

$\Rightarrow f(x,y) = 2\,\gamma_1(y)$ , $G(x) = 2$

insgesamt:
$$G(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$ Treppenfunktion

$$\int_{[0,1]} G(x)\,dx = 1$$

11

Für $y \in [0,1]$ gilt:

1) $y = 0$ $\quad f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow F(0) = 0$

2) $y \in (0,1]$: Es gibt genau ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\tau_{j_0}(y) \neq 0$

$$\Rightarrow f(x,y) = \left(\tau_{j_0}(x) - \tau_{j_0+1}(x)\right) \tau_{j_0}(y) \quad \text{Treppenf. in } x$$

$$F(y) = \tau_{j_0}(y) \int_{[0,1]} \left(\tau_{j_0}(x) - \tau_{j_0+1}(x)\right) dx = \tau_{j_0}(y)\left(1-1\right) = 0$$

$\Rightarrow F(y)$ integrierbar und $\int_{[0,1]} F(y)\,dy = 0$.

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} F(y)\,dy \neq \int_{[0,1]} G(x)\,dx \overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} f \text{ nicht integrierbar}$$

<u>Folgerung</u>: Die Bedingung der Positivität bei Tonelli ist unverzichtbar!