Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“ **R. Kaiser**
Blatt 4
05.11.2002

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \begin{cases} (0,1) & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x^{\mu}(1-x)^{\lambda}}, \quad \mu, \lambda > 0. \end{cases}$$

Für welche $\mu, \lambda > 0$ ist f integrierbar?

b) Auf $\mathbb{R}^2$ sei f gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x \sin y} & x \neq k\pi,\ y \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ & x \text{ oder } y \text{ irrational}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f auf $(0,\pi) \times (0,\pi)$ integrierbar?
Ist f auf $(\delta, \pi-\delta) \times (\delta, \pi-\delta)$ mit $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ integrierbar?

c) Zeigen Sie, daß $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0,1)$ integrierbar ist, nicht aber f^2 auf $(0,1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ auf $(0,1]$

a) uneigentlich Riemann-integrierbar, aber

b) nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Hinweis zu a): partielle Integration, zu b): betrachten sie $|f|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für $A \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A(t) := \{x = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} | (x,t) \in A\}.$$

a) Beweisen sie das Prinzip von Cavalieri: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, dann ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$ auch $A(t)$ integrierbar und es gilt:

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A(t))\, dt.$$

b.w.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ integrierbar, dann ist die Pyramide $P \subset \mathbb{R}^3$ mit Grundfläche A und Höhe h

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < h, \quad \frac{h}{h-z}(x, y) \in A\}$$

ebenfalls integrierbar und es gilt:

$$\mu(P) = \frac{1}{3} h \; \mu(A).$$

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Sei $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz stetig. Für fast alle $x \in [a, b]$ existiert dann $f'(x)$ im üblichen Sinne (Diese Behauptung sollen sie nicht beweisen). Setze

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}, \; g(x) := \begin{cases} f'(x) & \text{falls } f \text{ in } x \text{ differenzierbar} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen sie: Für jedes $c \in [a, b]$ ist g auf $[a, c]$ integrierbar, und es gilt $\int\limits_{[a,c]} g(x)\, dx = f(c) - f(a)$.

Hinweis: Approximieren sie g durch eine geeignete Funktionenfolge (f_n). Bestimmen sie $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{[a,c]} f_n(x)\, dx$ sowohl durch Verwendung des Satzes von Lebesgue als auch elementar. Vergleich beider Resultate ergibt die Behauptung.

Abgabe: In der 5. Vorlesungswoche (11.11.-15.11.02) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg. 2:

$$f : \begin{cases} (0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \end{cases}$$

a) Beh: f ist auf $(0,1]$ uneig. R-integrierbar

Bew:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx = \int_\varepsilon^1 x \underbrace{\left(\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\right)}_{\left(\cos \frac{1}{x}\right)'} dx$$

$$\underset{\text{P.I.}}{=} x \cos \frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \cos \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \cos 1 - \underbrace{\varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon}}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0} - \underbrace{\int_\varepsilon^1 \cos \frac{1}{x}\, dx}_{a_\varepsilon}$$

a_ε konv. für $\varepsilon \to 0$?

Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bel. pos. Nullfolge: $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

a_{ε_n} ist Cauchy-Folge, da $|a_{\varepsilon_n} - a_{\varepsilon_m}| = \left| \int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_m} \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{|\cdot\cdot| \le 1} dx \right|$

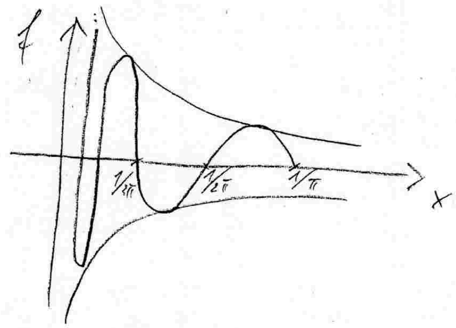
$\le |\varepsilon_m - \varepsilon_n| \le 2 \max\{\varepsilon_n, \varepsilon_m\} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 \implies a_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} a_0$

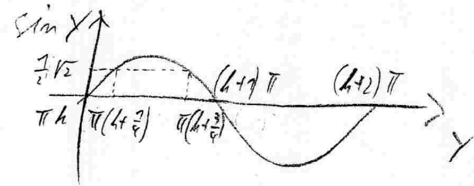
insgesamt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx = \cos 1 - a_0 \text{ existiert!}$$

b) **Beh**: f ist auf $(0,1]$ nicht L-integrierbar.

Bew: Annahme: f ist L-int.bar $\Rightarrow |f|$ ist L-int.bar





Definiere: $\varphi_k : (0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{8}(4k+1) & \text{falls } x \in I_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$I_k := \left[\frac{1}{\pi(k+\frac{3}{4})}, \frac{1}{\pi(k+\frac{1}{4})}\right] \qquad k \in \mathbb{N}$$

Es gilt: $I_k \cap I_l = \emptyset$ falls $k \neq l$ $\wedge$ $\varphi_k(x) \leq |f(x)|$

denn: sei $x \in I_k$ (sonst trivial)

$\Rightarrow \pi(k+\frac{1}{4}) \leq \frac{1}{x} \leq \pi(k+\frac{3}{4})$

$\Rightarrow |\sin \frac{1}{x}| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{x} \geq \pi(k+\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}(4k+1)$

$\Rightarrow |f(x)| \geq \frac{\pi}{8}(4k+1)$

Setze: $\phi_n : (0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$ Treppenfunktionen

$\Rightarrow 0 \leq \phi_n(x) \leq |f(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge$

$$\int_{[0,1]} \phi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{8}(4k+1)\left(\frac{1}{\pi(k+\frac{1}{4})} - \frac{1}{\pi(k+\frac{3}{4})}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(4k+1)\frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+3} \geq \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$\to$ p. 5 unten

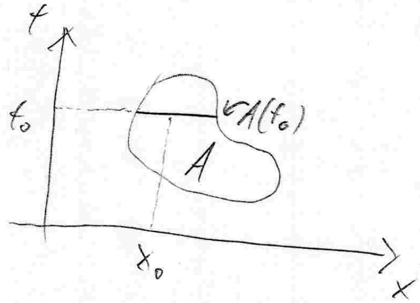
Aufg 3: a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar

$$A(t) := \{ x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, t) \in A \}$$

Beh: Für fast alle t ist $A(t)$ intbar und es gilt:

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A(t))\, dt$$

Bew:



Für $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\chi_{A(t)}(x) = \chi_A(x, t)$$

Nach Vor. ist A intbar, d.h. $\chi_A \in L(\mathbb{R}^n)$. Mit Fubini ist dann für fast alle $t \in \mathbb{R}$ die Abb.

$$x \mapsto \chi_A(x, t)$$

$\in L(\mathbb{R}^{n-1})$, also $\chi_{A(t)} \in L(\mathbb{R}^{n-1})$ und es gilt:

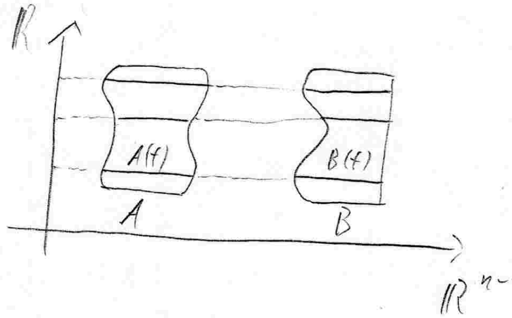
$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, d(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_A(x,t)\, dx \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A(t)}(x)\, dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \mu(A(t))\, dt$$

✓

Bemerkung: Cavalieri'sches Prinzip (im engeren Sinne):

Seien A und $B \subset \mathbb{R}^n$ intbar, für fast alle $t \in \mathbb{R}$ sei $\mu(A(t)) = \mu(B(t))$. Dann gilt: $\mu(A) = \mu(B)$

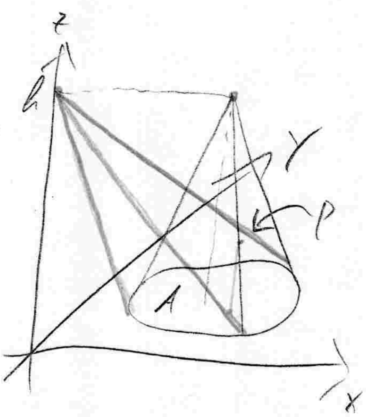


b) $A \subset \mathbb{R}^2$ intbar, $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z < h, \frac{h}{h-z}(x, y) \in A\}$

Beh: P ist intbar und es gilt: $\mu(P) = \frac{1}{3} h \, \mu(A)$

Bew: Sei $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in P\}$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{h}{h-z}(x, y) \in A\}$$



Betrachte die Streckung S_z:

$$S_z : \begin{cases} A \to P(z) \\ (\xi, \eta) \mapsto \left(x = \frac{h-z}{h}\xi, \; y = \frac{h-z}{h}\eta\right) \end{cases}$$

$$|D S_z| = \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2$$

Es gilt dann für $0 \le z < h$:

$$\mu(P(z)) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{P(z)} \, d(x, y) = \int_{P(z)} d(x, y)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Subst.-}\\ \text{Regel}}}{=} \int_A \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right| \, d(\xi,\eta) = \left(\frac{h-t}{h}\right)^2 \underbrace{\int_A d(\xi,\eta)}_{=\mu(A)}$$

(Für $t \in \mathbb{R} \setminus [0,h]$ gilt: $\mu(P(t)) = 0$)

Also mit a): $\mu(P) = \int_{\mathbb{R}} \mu(P(t))\, dt = \int_0^h \left(\frac{h-t}{h}\right)^2 \mu(A)\, dt$

$$= \frac{1}{h^2}\mu(A)\,(-)\frac{(h-t)^3}{3}\Big|_0^h = \frac{h}{3}\cdot\mu(A)$$

Ende des Beweises von Aufg 2.b:

Mon + Monot. des Integrals $\Rightarrow$

$$\infty > \int_{[0,1]} |f(x)|\, dx \geq \int_{[0,1]} \phi_n(x)\, dx \geq \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Konv. der harm. Reihe ↯

~~diese gilt: $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon + \varepsilon_1$~~ 6

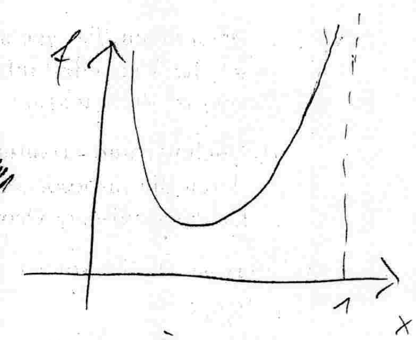
~~mit $\varepsilon_1 > 0$ bel. klein. [Das "Aufblasen" ist notwendig, damit die Intervalle nach Rand-Abschneiden noch überlappen!] Rest wie unter α).~~

Aufg. 1

a) $f : \begin{cases} (0,1) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{\mu}(1-x)^{\lambda}} \end{cases}, \quad \mu, \lambda > 0$

Beh: f ist für genau $0 < \mu, \lambda < 1$ (L-)integrierbar

Bew: Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[0,1]$, z.B.



$$Z_n = (\underbrace{x_0^n}_{=0}, \underbrace{x_1^n}_{=a_n}, \dots, \underbrace{x_{2^n-1}^n}_{=b_n}, \underbrace{x_{2^n}^n}_{=1}) \qquad x_i^n := \frac{i}{2^n} \qquad i = 1, \dots, 2^n$$

$$I_i^n = [x_{i-1}^n, x_i^n]$$

$\Rightarrow Z_n \subset Z_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$

$$T_n := \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf_{I_i^n} f \quad \text{für } x \in I_i^n \end{cases}$$

$$\varphi_n := T_n \cdot \underbrace{\chi_{[a_n, b_n]}}_{=: \chi_n}$$

Treppenfunktionen

Es gilt dann $\varphi_n \nearrow f$

Frage: $\int_{[0,1]} \varphi_n \, dx < K$?

$f \cdot \chi_n$ R-integrierbar, z. B. da stetig

Dann: $$\int_{[0,1]} \varphi_n \, dx = \underbrace{\int_{[a_n,b_n]} \tau_n \, dx}_{S_{f\cdot\chi_n}(Z_n)} \le \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f \, dx}_{\text{Riemann-Integral}}$$

$$= \int_{a_n}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\mu}(1-x)^{\lambda}} + \int_{\frac{1}{2}}^{b_n} \frac{dx}{x^{\mu}(1-x)^{\lambda}} \le 2^{\lambda} \underbrace{\int_{a_n}^{1/2} \frac{dx}{x^{\mu}}}_{\frac{x^{-\mu+1}}{-\mu+1}\Big|_{a_n}^{1/2}} - 2^{\mu} \int_{1/2}^{1-b_n} \frac{dy}{y^{\lambda}} \qquad y := 1-x$$

$$= \frac{2^{\lambda}}{1-\mu}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\mu} - a_n^{1-\mu}\right] + \frac{2^{\mu}}{1-\lambda}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda} - (1-b_n)^{1-\lambda}\right]$$

α) Falls $\lambda, \mu < 1$: $\le \left(\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{1-\lambda}\right) 2^{\lambda+\mu-1}$

unabhängig von n! ✓

β) Falls λ oder $\mu > 1$: $\xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Anm: f integrierbar. Wegen der Unabhängigkeit von $\int f = \lim_{n\to\infty} \int \tau_n$ von der approximierenden Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muß gelten

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{\varphi}_n \overset{\downarrow}{=} \infty \quad ↯$$

$\Longrightarrow f$ nicht integrierbar

γ) Falls λ oder $\mu = 1$: $\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

da $$\int_{a_n}^{1/2} \frac{dx}{x} = \ln 1/2 - \ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\Longrightarrow f$ nicht integrierbar.

Zu β): Beachte: $\tilde{\varphi}_n$ entsteht aus φ_n, indem "inf" durch "sup" ersetzt wird. Ersetze weiter im Bew. von α) $\sum \tau_n$ durch $\sum_{\tilde{\tau}_n}$ und benutze, daß $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ für $\alpha > 1$ divergent ist!

b)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x \sin y} & (x \neq k\pi,\ y \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \\ & x \text{ oder } y \text{ irrational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beh</u>: f ist auf $(0,\pi)^2$ nicht integrierbar

<u>Bew</u> ~~Ann~~: f integrierbar $\overset{\text{Fu-bini}}{\Longrightarrow}$ $g(x) := \frac{1}{\sin x}$

ist auf $(0,\pi)$ integrierbar, da $g \geq 0$ auf $(0,\pi)$

müßte analog zu a) wieder das uneigentliche

Riemann-Integral $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{1}{\sin x}\, dx$ beschränkt

bleiben.

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{1}{\sin x}\, dx = 2\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \geq 2\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{dx}{x} = 2\left[\ln\frac{\pi}{2} - \ln \varepsilon\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty \quad ↯$$

Auf $(\delta, \pi-\delta)^2$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ist aber f integrierbar,

da f auf $[\delta, \pi-\delta]^2$ außer auf einer Nullmenge mit einer stetigen und damit R-intb. Funktion übereinstimmt.

$\Rightarrow$ f L-intb. $\wedge$ L-Integral = R-Integral.

c) <u>Beh</u>: Auf $(0,1)$ ist $f(x) = 1/\sqrt{x}$ integrierbar aber nicht f^2.

<u>Bew</u>: Setze in a) $\mu = \frac{1}{2} \wedge \lambda = 0$ bzw.

$\mu = 1 \wedge \lambda = 0 \Rightarrow$ Beh.

<u>Folgerung</u>: Die Menge der L-integrierbaren Funktionen ist gegen Multiplikation nicht abgeschlossen!

~~Aufg 3:~~

~~Gegeben:~~

$$\tau_j : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2^j \chi_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]} \end{cases} \quad j \in \mathbb{N}$$

$$f : \begin{cases} [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} [\tau_j(x) - \tau_{j+1}(x)]\, \tau_j(y) \end{cases}$$

~~Beh: f meßbar, $G(x) := \int_{[0,1]} f(x,y)\, dy$ und~~

Aufg 4: (Zusatzaufgabe)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ L-stetig $\Rightarrow$ f diffb. f.ü.

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{falls } f \text{ in } x \text{ diffb.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beh: $g : [a,c] \to \mathbb{R}$ ist int.bar $\wedge$ $\int_{[a,c]} g \, dx = f(c) - f(a)$

$c \in [a,b]$

Bew: Setze f stetig auf $[a,\infty)$ fort

Definiere: $f_n : [a,c] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$ stetig $\Rightarrow$ meßb.

Da wo f' existiert gilt: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)$

d.h. $f_n \to g$ f.ü. auf $[a,c]$

außerdem: $|f_n(x)| \leq n \left| f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \right| \leq n L \frac{1}{n} = L$

L ist auf $[a,c]$ eine integrierb. Majorante für f_n

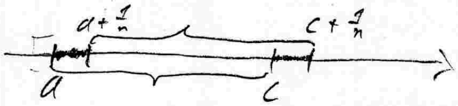
Lebesgue $\Rightarrow$ $\int_{[a,c]} g(x) \, dx$ exist. $\wedge$ $\lim_{n\to\infty} \int_{[a,c]} f_n(x) \, dx$

$= \int_{[a,c]} g(x) \, dx$

Berechnung von $\int_{[a,c]} f_n(x) \, dx$:

$$\int_{[0,c]} f_n(x)\,dx = n\overbrace{\int_a^c \left(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right)dx}^{\text{R-Integral}}$$

$\uparrow$ f_n stetig



$$= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right] = n\left[\int_c^{c+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\right]$$

$$= f(c) + n\int_c^{c+\frac{1}{n}} (f(x) - f(c))\,dx - f(a) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} (f(x) - f(a))\,dx$$

Wegen $\left| n\int_c^{c+\frac{1}{n}} (f(x) - f(c))\,dx \right| \le n\int_c^{c+\frac{1}{n}} L|x-c|\,dx$

$$= nL\int_0^{1/n} x\,dx = nL\cdot\frac{1}{2n^2} = \frac{L}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

folgt also:

$$\int_{[0,c]} f_n(x)\,dx$$

$$n \to \infty$$

$$\int_{[a,c]} g(x)\,dx \qquad\qquad f(c) - f(a)$$

Bemerkung: Der Hauptsatz der Diff.- und Int.-Rechnung gilt sogar noch für "absolut-stetige" (schwächer als L-stetig, stärker als stetig) Funktionen.