Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“ **R. Kaiser**
Blatt 3
29.10.2002

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Beweisen Sie: Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele (offene oder abgeschlossene) beschränkte Quader $Q_1, ..., Q_k \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, \quad \sum_{i=1}^{k} |Q_i| < \varepsilon.$$

Hinweis: Satz von Heine-Borel.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Man zeige, daß die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Nullmengen sind:

a) das Ellipsoid $\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$,

b) der Kegel $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

Hinweis: Stellen sie die Teilmengen geeignet als Graphen Riemann-integrierbarer Funktionen dar.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
$N \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine Nullmenge. Zeigen sie:

a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge von abgeschlossenen Quadern $Q_i = [a_1^i, b_1^i] \times ... \times [a_n^i, b_n^i]$, so daß $N \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||b^i - a^i||^n < \varepsilon$ ist.

b) $f(N)$ ist eine Nullmenge, wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 \text{ falls } x \text{ rational} \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Zeigen sie,

a) f ist Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]$.

b) f ist nicht Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$.

Abgabe: In der 4. Vorlesungswoche (4.11.-8.11.02) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 1: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

Beh: K Nullmenge $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists p, \{I_k : k=1..p\}$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k, \quad \sum_{k=1}^{p} |I_k| < \varepsilon, \quad I_k: \text{ offen oder abgeschl.}$$

Bew: „$\Leftarrow$": trivial ($p \to \infty$)

„$\Rightarrow$": Sei K also Nullmenge $\Rightarrow$ (je nach Def.)

α) es existiert eine Überdeckung von K mit offenen Quadern $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon \underset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \text{Es existiert}$$

eine endliche Teilmenge $\{I_{k_\nu} : \nu = 1, \dots, p\}$ mit $K \subset \bigcup_{\nu=1}^{p} I_{k_\nu}$ und außerdem gilt natürlich

$$\sum_{\nu=1}^{p} |I_{k_\nu}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon. \checkmark$$

β) es existiert eine Überdeckung mit abgeschlossenen Quadern $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Durch „Aufblasen" und Rand-Weglassen kann man wieder zu einer offenen Überdeckung $\{\tilde{I}_k : k \in \mathbb{N}\}$ übergehen. Für

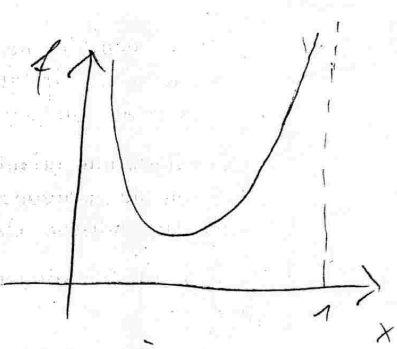
Hier gilt: $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon + \varepsilon_1$ 2

mit $\varepsilon_1 > 0$ bel. klein. [Das „Aufblasen" ist notwendig, damit die Intervalle nach Rand-Abschneiden noch überlappen!] Rest wie unter α).

Aufg. 2

a) $f: \begin{cases} (0,1) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^{\mu}(1-x)^{\lambda}} \end{cases}, \quad \mu, \lambda > 0$

Beh: f ist genau für $0 < \mu, \lambda < 1$ (L-)integrierbar



Bew: Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[0,1]$, z.B. die aus Aufg. 2, (Blatt 3

$$Z_n = (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_0^n}}, \underset{a_n}{\underset{\shortparallel}{x_1^n}}, \dots, \underset{b_n}{\underset{\shortparallel}{x_{2^n-1}^n}}, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{x_{2^n}^n}}) \qquad x_i^n := \frac{i}{2^n} \quad i = 1, \dots, 2^n$$

$$I_i^n = [x_{i-1}^n, x_i^n]$$

$\Rightarrow Z_n \subset Z_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$

$$T_n := \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf_{I_i^n} f \quad \text{für } x \in I_i^n \end{cases}$$

$$\varphi_n := T_n \cdot \underbrace{\chi_{[a_n, b_n]}}_{=:\chi_n}$$

Treppenfunktionen

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right) = -\rho(R+\rho\cos\varphi) \neq 0 \quad \text{falls } \rho \neq 0$$

$$\int_T \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{stetig}}\, d\lambda(x,y,z) \overset{\text{Subst.-regel}}{=} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R+\rho\cos\varphi)^2 \rho (R+\rho\cos\varphi)\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

(iteriertes Integral,

$$= 2\pi \int_0^r \rho \left\{ \int_0^{2\pi} \underbrace{(R+\rho\cos\varphi)^3}_{R^3+3R^2\rho\cancel{\cos\varphi}+3R\rho^2\cos^2\varphi+\rho^3\cancel{\cos^3\varphi}}\, d\varphi \right\} d\rho = 2\pi \int_0^r \rho \int_0^{2\pi} \left(R^3 + 3R\rho^2\cos^2\varphi\right) d\varphi\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^r \left(2\pi\rho R^3 + 3\pi R\rho^3\right) d\rho = 4\pi^2 R^3 \, r^2/2 + 6\pi^2 R \, r^4/4$$

$$= \underbrace{2\pi^2 R r^2}_{\mathrm{Vol}(T)} \left(R^2 + \tfrac{3}{4} r^2\right)$$

Bemerkung: Die Voraussetzungen der Subst.-regel (Injektivität von S, det.-Bedingung) können durchaus auf einer Nullmenge verletzt sein.

Aufg 2:

a) Beh: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Nullmenge

Bew: $M = M_+ \cup M_-$, $\quad M_\pm = \{(x,y,z) \in M : z \gtrless 0\}$

Betrachte $f_\pm : \begin{cases} I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \pm c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}, & \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

f_+ ist stetig und damit integr. auf $I = [-a,a]\times[-b,b]$, d.h. es existiert eine Zerlegung $Z = \{ I_\nu : \nu = 1,\dots,p \}$ mit $I = \bigcup_{\nu=1}^{p} I_\nu$ mit $S_{f_+}(Z) - s_{f_+}(Z) < \varepsilon$. Z induziert dann die Überdeckung $\{ K_\nu : \nu = 1,\dots,p\}$ mit

$K_\nu := I_\nu \times [\inf_{I_\nu} f_+ , \sup_{I_\nu} f_+]$ von M_+, d.h. $M_+ \subset \bigcup_{\nu=1}^{p} K_\nu$

und es gilt: $\sum_{\nu=1}^{p} |K_\nu| = \sum_{\nu=1}^{p} |I_\nu| \cdot \left(\sup_{I_\nu} f_+ - \inf_{I_\nu} f_+\right)$

$= S_{f_+}(Z) - s_{f_+}(Z) < \varepsilon$

d.h. M_+ ist Nullmenge
analog: M_- ist Nullmenge $\Big\} \Rightarrow M$ ist Nullmenge

b) <u>Beh</u>: $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2+y^2-z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Nullmenge

<u>Bew</u>: $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} (N_k \cup N_{-k})$, $N_{\pm k} = \{(x,y,z) \in N : \begin{smallmatrix} 0<z<k \\ 0>z>-k \end{smallmatrix}\}$ $k \in \mathbb{N}$

Betrachte $f_{\pm k} : \begin{cases} I_k \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \pm\sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x^2+y^2 < k^2 \\ \pm k & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

$I_k = [-k,k]^2 \subset \mathbb{R}^2$

Analog zu a) folgt dann: alle $N_{\pm k}$ sind Nullmengen. N ist dann als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge.

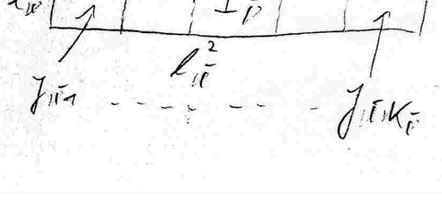
Aufg 3: $N \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Nullmenge

a) Beh: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (I_i)_{i \in \mathbb{N}}, \ I_i = [\vec{a}_i, \vec{b}_i]$ so daß gilt: $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \wedge \sum_{i=1}^{\infty} \|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|^n < \varepsilon$.

eukl. Abstand

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ und $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von N mit Quadern, d.h. $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, und mit $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \frac{\varepsilon}{(2n)^n}$. Konstruktion einer neuen Überdeckung $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ (die "Hyperkubus-ähnlich" ist): Seien $l_i^1, \dots, l_i^n$ die Kantenlängen von I_i und o.B.d.A. l_i^1 die kleinste. Jedes I_i läßt sich dann so in k_i Teilintervalle J_{ij} zerlegen, daß gilt:

$$l_i^1 \le l_{ij}^{\nu} \le 2 l_i^1 \qquad \nu = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, k_i$$



Etwa durch fortgesetzte Intervallhalbierung von I_i in jede Richtung. Durch Umnummerierung ($J_{ij} \to K_i$) erhalten wir dann wieder eine Überdeckung $\{K_i = [\vec{a}_i, \vec{b}_i] : i \in \mathbb{N}\}$ von N (mit dem selben Maß) und der Eigenschaft:

$$\|\vec{b}_i - \vec{a}_i\| \le \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{|b_i^\nu - a_i^\nu|}_{l_i^\nu} \le \sum_{\nu=1}^{n} 2 l_i^1 = 2n\, l_i^1$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|^n \le (2n)^n \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{(l_i^1)^n}_{\le |K_i|} \le (2n)^n \sum_{i=1}^{\infty} |K_i| = (2n)^n \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

$$< (2n)^n \cdot \frac{\varepsilon}{(2n)^n} = \varepsilon \quad ✓$$

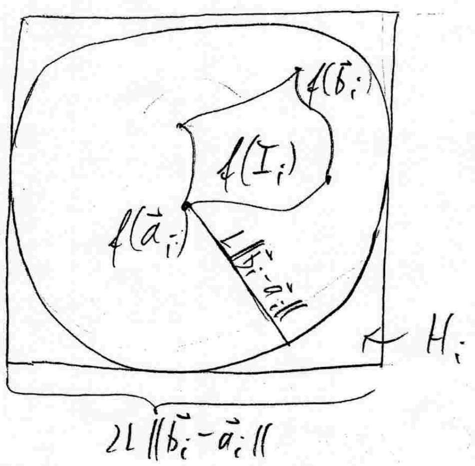
b) Beh: Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ L-stetig ist $f(N)$ eine Nullmenge.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ und $\{I_i = [\vec{a}_i, \vec{b}_i] : i \in \mathbb{N}\}$ gemäß a) eine Überdeckung von N mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|^n < \frac{\varepsilon}{(2L)^n}$, dann wird $f(N)$ durch $\bigcup_{i=1}^{\infty} f(I_i)$ überdeckt, die $f(I_i)$ sind jedoch keine Quader! Konstruktion einer Überdeckung für $f(N)$:

Sei $i \in \mathbb{N}$ bel.: Es gilt dann für alle $\vec{x} \in I_i$:

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{a}_i)\| \le L\|x - \vec{a}_i\| \le L\|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|,$$

d.h. $f(I_i)$ wird durch eine Kugel um $f(\vec{a}_i)$ mit Radius $L \cdot \|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|$ eingefangen. Diese liegt wieder in einem Hyperkubus H_i mit Mittelpunkt $f(\vec{a}_i)$ und Seitenlänge $2L\,\|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|$ und dem Inhalt $|H_i| = \left(2L\,\|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|\right)^n$.



$\{H_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist dann eine Überdeckung von $f(N)$, da

$$f(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(I_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$$

und es gilt:

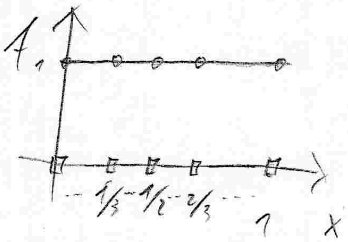
$$\sum_{i=1}^{\infty} |H_i| = (2L)^n \sum_{i=1}^{\infty} \|\vec{b}_i - \vec{a}_i\|^n < (2L)^n \cdot \frac{\varepsilon}{(2L)^n} = \varepsilon$$

Aufg 4:

Gegeben: $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

Beh: f ist L-int.bar, aber nicht R-int.bar.

Bew:



Im Sinne der Lebesgue-Theorie ist $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge, es gilt also:

$$\int_{L,\,[0,1]} f(x)\,dx = \int_{L,\,[0,1]} 1\,dx = 1$$

f ist gemäß dem Riemann'schen Kriterium nicht R-int.bar:
Ist etwa $Z = \{x_i \mid i = 0, \dots, N\}$ eine bel. Zerlegung von $[0,1]$,

so gilt: $$\overline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1,$$

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0,$$

da in jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl liegen ($\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$!).

Also gilt für alle Z: $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = 1$