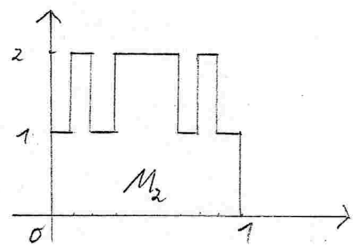
Übungen zu „Analysis III" / „Mathematik für Physiker III" **R. Kaiser**
Blatt 2
22.10.2002

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die offene, zusammenhängende Menge M wird schrittweise konstruiert, indem an das offene Quadrat $M_0 =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ „Zähne " der Höhe 1 angefügt werden, jeweils symmetrisch in die verbleibenden Lücken des Quadrats $]0,1[\times]1,2[$. Im ersten Schritt wird ein Zahn der Breite p^{-1} mit $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$ angefügt, im 2. Schritt 2 Zähne der Breite p^{-2}, usw. Im m.ten Schritt werden 2^{m-1} Zähne der Breite p^{-m} angefügt.



Zeigen Sie, daß $M = \cup_{m=0}^{\infty} M_m$ für $p = 3$ Jordan-meßbar ist, für $p > 3$ jedoch nicht.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0,0) = \frac{1}{2}$ und $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ sonst. Man berechne mittels Riemann'scher Summen das Integral

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)d(x,y).$$

Hinweis: Benutzen Sie eine äquidistante Zerlegung von $[0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $0 < r < R$. Durch Rotation des in der xz-Ebene liegenden Kreises $(x-R)^2 + z^2 \leq r^2$ um die z-Achse entsteht im $\mathbb{R}^3$ der Torus T. Man berechne das Trägheitsmoment von T um die z-Achse, d.h. man berechne

$$\int_T (x^2 + y^2)d(x,y,z).$$

Hinweis: Führen Sie geeignete Koordinaten (2 Winkel) ein.

b.w.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Ist $S \subseteq \mathbb{R}^3$ JORDAN-meßbar, so ist der Schwerpunkt z von S gegeben durch

$$z_i = |S|^{-1} \cdot \int\limits_S x_i \, dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Man berechne den Schwerpunkt

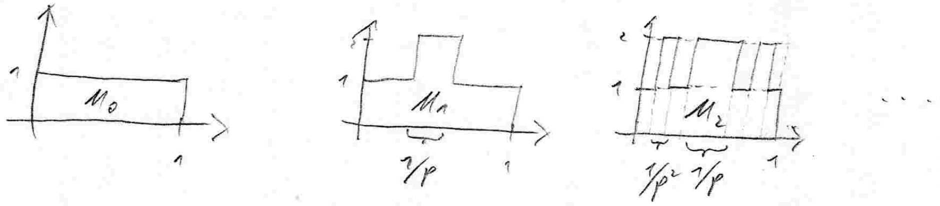
a) der Halbkugel $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0\}$,

b) des Tetraeders $\{(x, y, z) : x + y + z \leq 1, \quad x, y, z \geq 0\}$.

Abgabe: In der 3. Vorlesungswoche (28.10.-1.11.02) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 1: Sei (M_n) die Folge der Mengen:



$p \in \mathbb{N},\ p \geq 3$

Beh: $M := \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ ist für $p = 3$ Jordan-meßbar, aber für $p > 3$ nicht.

Bew: Heuristisch: Es gilt $M_{n-1} \subset M_n$, $n \in \mathbb{N}$. Jedes M_n ist als Vereinigung von Quadern meßbar:

$$\mu(M_n) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{p^n} = 1 + \frac{1}{p}\left(1 + \frac{2}{p} + \dots + \left(\frac{2}{p}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{p}\,\frac{1-(2/p)^n}{1-2/p} = 1 + \frac{1+(2/p)^n}{p-2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 + \frac{1}{p-2}$$

M läßt sich von innen durch die M_n "ausschöpfen"

$$\Rightarrow \mu_{innen}(M) = 1 + \frac{1}{p-2}$$

Für das äußere Maß gilt aber: $\mu_{außen}(M) = 2$, da sich vom umgebenden Quader $[0,1] \times [0,2]$ kein Teilquader entfernen läßt ohne auch Punkte aus M zu entfernen (die "Zähne" liegen dicht!)

$\mu_{innen}(M) = \mu_{außen}(M)$ gilt offenbar nur für $p = 3$.

Etwas genauer:

Es gilt $\mu(M) = \int_{M_0} \chi_M \, dx$, falls χ_M (charakteristische Funktion von M) R-intbar ist. Betrachte also

$$\underline{\int}_{M_0} \chi_M \, dx = \sup_Z \underline{S}_Z(\chi_M) \quad \text{bzw.} \quad \overline{\int}_{M_0} \chi_M \, dx = \inf_Z \overline{S}_Z(\chi_M).$$

Zum Oberintegral: Sei Z eine bel. Zerlegung von M_0 und $\{Q_i \mid i = 1, \dots, N\}$ die Menge der Teilquader, so ist

$$\sup_{Q_i} \chi_M = 1$$

für jedes $Q_i \subset M_0$, da Q_i Punkte aus M enthält (die Zähne liegen dicht!); also gilt:

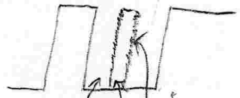
$$\overline{S}_Z(\chi_M) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{Q_i} \chi_M \cdot \mu(Q_i) = \sum_{i=1}^{N} \mu(Q_i) = \mu(M_0) = 2,$$

also $\overline{\int}_{M_0} \chi_M \, dx = 2$.

Zum Unterintegral: Betrachte zunächst die Folge (Z_m) von Zerlegungen Z_m, die M_m "exakt ausmessen". Für deren Teilquader Q_i^m, $i = 1, \dots, N_m$ gilt:

$$Q_i^m \subset M_m \quad \vee \quad Q_i^m \subset M_0 \setminus M_m$$

Für die $Q_i^m \subset M_0 \setminus M_m$ gilt $\inf_{Q_i^m} \chi_M = 0$, da sie Punkte enthalten, die nicht zu M gehören, z.B. die Seiten der Zähne aus $M_{m+1} \setminus M_m$.



Damit folgt $\underline{S}_{Z_m}(\chi_M) = \sum_{i=1}^{N_m} \inf_{Q_i^m} \chi_M \cdot \mu(Q_i^m) = \mu(M_m)$

$$= 1 + \frac{1 - (2/p)^m}{p-2}$$

Also gilt: $\underbrace{\int_{M_0}}_{\chi_M dx} = \sup_Z \underline{S}_Z(\chi_M) \geq \sup_{Z_m} \underline{S}_{Z_m}(\chi_M) \geq 1 + \frac{1}{p-2}$

Sei jetzt Z eine beliebige Zerlegung in Teilquader Q_i, $i = 1, \ldots, N$.
Dann gilt für jeden Teilquader Q_i:

$$\exists m_i \in \mathbb{N} : Q_i \subset M_{m_i} \quad \vee \quad \forall m \in \mathbb{N} : Q_i \not\subset M_m$$

Im letzteren Fall folgt $Q_i \not\subset M$ (Beweis!) und $\inf_{Q_i} \chi_M = 0$.

Für die ersteren Q_i gilt: $Q_i \subset M_{m_0}$ mit $m_0 = \max_{1 \leq i \leq N} m_i$.

Also: $\underline{S}_Z(\chi_M) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{Q_i} \chi_M \cdot \mu(Q_i) \leq \mu(M_{m_0}) \leq 1 + \frac{1}{p-2}$

Insgesamt folgt: $\int_{M_0} \chi_M dx = 1 + \frac{1}{p-2}$,

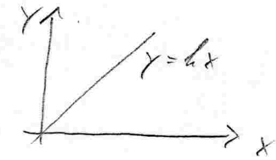
und damit die Beh.

Aufg 2

Sei $f: \begin{cases} [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } (x,y)=(0,0) \\ \frac{x}{x+y} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

$f(x,kx) = \frac{1}{1+k} = \text{const.}$ für $0 \le k < \infty$

$f(0,y) = 0$



Beh: $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y) = \frac{1}{2}$

Bew: f ist auf $[0,1]\times[0,1] \setminus \{(0,0)\}$ stetig und beschränkt

$\Rightarrow$ f ist R-int.bar

Für R-intbare Funktionen kann das Integral analog zum 1-dim. Fall durch Riemann'sche Zwischensummen bestimmt werden: Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} \underbrace{|Z_n|}_{\text{"Feinheit" der Zerlegung}} = 0$, so gilt: $\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{Z_n}(f)$,

wobei: $\displaystyle\sigma_{Z_n}(f) := \sum_{i=1}^{N_n} f(x_i^n)\cdot \mu(Q_i^n)$ mit $x_i^n \in Q_i^n$.

Sei im Folgenden Z_n die äquidistante Zerlegung:

$$Z_n = \left\{\left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{k}{n}\right) \;\middle|\; i = 0,\dots,n;\ k = 0,\dots,n\right\}$$

$$\sigma_{Z_n}(f) = \sum_{i,k=1}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{k}{n}\right)\cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{i}{i+k}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie in } i \text{ und } k}}{=} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{n}\frac{i}{i+k} + \sum_{i,k=1}^{n}\frac{k}{i+k}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,k=1}^{n} 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{Z_n}(f) = 1/2 \quad ✓$$

Subst.-regel

$$\Rightarrow \int_{P_z} 1 \, d(x,y) = \int_U 1 \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right| d(\xi,\eta)$$

$$= \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 \int_U 1 \, d(\xi,\eta) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 vol_2(U)$$

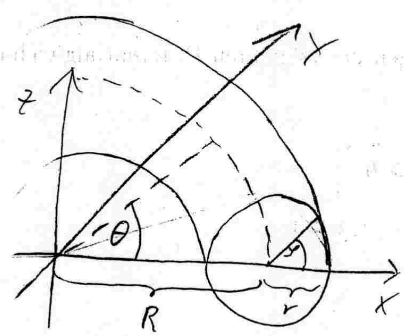
$$\Rightarrow vol_3(P) = \int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 vol_2(U) \, dz = \frac{1}{h^2} vol_2(U) (-)\frac{(h-z)^3}{3}\Big|_0^h$$

$$= h/3 \cdot vol_2(U) \checkmark$$

Aufg. 3:

Torus: $r < R$

($\mathcal{J}$-meßbar)



geeignete Koordinaten:

$$x = (R + \rho\cos\varphi)\cos\theta$$
$$y = (R + \rho\cos\varphi)\sin\theta$$
$$z = \rho\sin\varphi$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{(x,z)\text{-Ebene}}$$

$$S: \begin{cases} (0,r)\times[0,2\pi)^2 \to T \\ (\rho,\varphi,\theta) \mapsto (x,y,z) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta & -(R+\rho\cos\varphi)\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & (\quad " \quad)\cos\theta \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right) = -\rho(R+\rho\cos\varphi) \neq 0 \quad \text{falls } \rho \neq 0$$

$$\int_T \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{stetig}}\, d(x,y,z) \overset{\text{Subst.-regel}}{=} \int_0^r \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R+\rho\cos\varphi)^2 \rho(R+\rho\cos\varphi)\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

(iteriertes Integral)

$$= 2\pi \int_0^r \rho \left\{ \int_0^{2\pi} \underbrace{(R+\rho\cos\varphi)^3}_{R^3+3R^2\rho\cancel{\cos\varphi}+3R\rho^2\cos^2\varphi+\rho^3\cancel{\cos^3\varphi}} d\varphi \right\} d\rho = 2\pi \int_0^r \rho \int_0^{2\pi} (R^3 + 3R\rho^2\cos^2\varphi)\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^r (2\pi\rho R^3 + 3\pi R\rho^3)\, d\rho = 4\pi^2 R^3 \frac{r^2}{2} + 6\pi^2 R \frac{r^4}{4}$$

$$= \underbrace{2\pi^2 R r^2}_{\mathrm{Vol}(T)}\left(R^2 + \frac{3}{4} r^2\right)$$

Bemerkung: Die Voraussetzungen der Subst.-regel (Injektivität von S, det.-Bedingung) können durchaus auf einer Nullmenge verletzt sein.

~~Aufg 3:~~

~~a) Beh: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Nullmenge~~

~~Bew: $M = M_+ \cup M_-$, $M_\pm = \{(x,y,z) \in M : z \gtrless 0\}$~~

Musterlösung

Aufg 4: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-meßbar

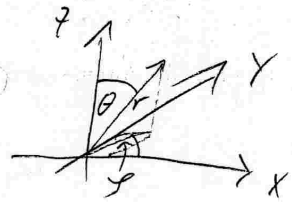
$$Z_i := |S|^{-1} \int_S x_i \, dx \,, \quad i = 1,2,3 \quad \text{„Schwerpunkt"}$$

a) Schwerpunkt der Halbkugel $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$ $\qquad \left| \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \right| = r^2 \sin\theta$

$z = r \cos\theta$



$$|S| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Rightarrow Z_x = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \underbrace{r \sin\theta \cos\varphi}_{=x} \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi\text{-Integr.}}}{=} 0$$

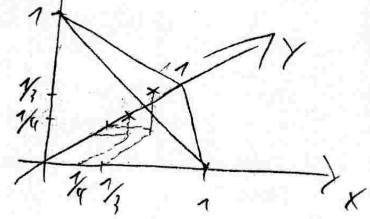
$$Z_y = \text{.........} \sin\varphi \text{.....} = 0$$

$$Z_z = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \underbrace{r\cos\theta}_{=z} \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \frac{3}{2\pi} \cdot 2\pi \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \cos\theta \, d\theta$$

$$= 3 \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2} = 3/8$$

b) Schwerpunkt des Tetraeders $\{(x,y,z) : x+y+z \le 1,\ \underbrace{x,y,z \ge 0}\}$:

$\hat{=}\ 0 \le x \le 1-y-z,\ 0 \le y \le 1-z,\ 0 \le z \le 1$



8

$S = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

~~Aufg 1, Blatt 2~~ Elementargeometrie

$$t_x = 6 \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} x \, dx \, dy \, dz = 6 \int_0^1 \int_0^{1-z} \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y-z} \right]}_{\frac{1}{2}(1-y-z)^2} dy \, dz$$

$$= \frac{6}{2} \int_0^1 \underbrace{\left[\frac{1}{3}(1-y-z)^3 \cdot (-1) \Big|_{y=0}^{y=1-z} \right]}_{\frac{1}{3}(1-z)^3} dz = \frac{6}{2 \cdot 3} (-) \frac{(1-z)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

aus der Symmetrie von S folgt: $t_x = t_y = t_z$.

Rest ~~Aufg. 2~~:

~~Ann. + Monotonie des Integrals $\Rightarrow$~~

~~$\infty > \int_{[0,1]} |f(x)| \, dx \geq \int_{[0,1]} \phi_n(x) \, dx \geq \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$~~

~~d.h. die harm. Reihe ist konv. $\lightning$~~