Übungen zu „Analysis III" / „Mathematik für Physiker III" **R. Kaiser**
Blatt 13
20.1.2003

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der folgenden auf $(-\pi, \pi]$ erklärten und 2π-periodisch fortgesetzten Funktionen:

a) $f(x) = x,$ b) $g(x) = \begin{cases} h & \text{für } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ oder } \pi \\ -h & \text{für } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$ wobei $(h > 0)$.

Aufgabe 2

a) Seien $f_n, f, g_n, g \in L^2((a,b))$, $n \in \mathbb{N}$, es gelte $f_n \to f$ und $g_n \to g$ $(n \to \infty)$ in $L^2((a,b))$. Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle.$$

b) Seien a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$, b_n $(n \in \mathbb{N})$ wie in der Vorlesung die Fourierkoeffizienten der (reellwertigen) Funktion $f \in L^2((-\pi, \pi))$. Zeigen Sie die Parseval-Relation:
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

c) Benutzen Sie die Parseval-Relation und die Fourierreihen der 2π-periodischen Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ für $x \in (-\pi, \pi]$ um $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ zu berechnen.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \pi \\ \sin x & \text{für } -\pi \le x \le 0, \\ \cos x & \text{für } 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Für die zugehörige Distribution
$$T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \; \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \varphi \, dx$$
bestimme man die Ableitung $(T_f)'$.

b. w.

Aufgabe 4

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ bzw. $N \subset \mathbb{R}^3$ eine zwei- bzw. eindimensionale Untermannigfaltigkeit derart, daß für jedes $R > 0$ die „abgeschnittene" Mannigfaltigkeit $M \cap B_R$ bzw. $N \cap B_R$ kompakt ist. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ bzw. $g : N \to \mathbb{R}$ stetig. Für $\varphi \in C_0^\infty$ setze

$$(f\delta_M)(\varphi) := \int\limits_M \varphi(x) f(x)\, dO(x) \text{ bzw.}$$

$$(g\delta_N)(\varphi) := \int\limits_N \varphi(x) g(x)\, do(x).$$

Zeigen Sie: $f\delta_M$ bzw. $g\,\delta_N$ ist eine Distribution auf $\mathbb{R}^3$ (Vergessen Sie nicht, die Endlichkeit der Integrale zu zeigen).

b) Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A und äußerer Einheitsnormale $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) : \partial A \to \mathbb{R}^3$. Sei $1_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von A:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \neq A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß im Distributionssinne gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} 1_A = -\nu_i \delta_{\partial A}.$$

c) Sei $N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = x_2 = 0\}$. Zeigen Sie, daß für das Vektorfeld $\vec{B}(x) = (\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}, -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, 0)$ im Distributionssinne gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -2\pi\delta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Keine Abgabe mehr. Besprechung im Sommersemster 2003.

Musterlösung

Aufg 1: Fourierreihe von $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, 2π-periodisch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) $f(x) = x$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \cos nx}_{\text{ungerade}} \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[-\frac{1}{n\pi} x \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{n\pi}(-1)^n - \frac{\pi}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Für $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt gemäß Vorlesung:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{x=(2k+1)\pi} = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)\Big|_{x=(2k+1)\pi} = 0$$

b) $$g(x) = \begin{cases} h & x \in (0, \pi) \\ 0 & x = 0 \vee \pi \\ -h & x \in (-\pi, 0) \end{cases} \qquad h > 0$$

g ungerade $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\quad n \in \mathbb{N}_0$

②

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-h)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h\sin nx\,dx$$

$$= \frac{h}{n\pi}\left\{ [\cos nx]_{-\pi}^{0} - [\cos nx]_{0}^{\pi} \right\} = \frac{2h}{n\pi}\Big(1 - \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\Big)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4h}{n\pi} & \text{" } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{4h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \quad [\text{konvergiert auf } \mathbb{R} \text{ gegen } g(x)!]$$

<u>Aufg 2:</u>

a) $f_n, f, g_n, g \in L^2((a,b))$, $n \in \mathbb{N}$

$f_n \to f$, $g_n \to g$ in $L^2((a,b))$ für $n \to \infty$

<u>Beh:</u> $\lim_{n\to\infty}(f_n, g_n) = (f,g)$

<u>Bew:</u> $(f_n, g_n) - (f,g) = (f_n - f, g_n) + (f, g_n) - (f,g)$

$= (f_n - f, g_n) + (f, g_n - g)$

$\Rightarrow |(f_n, g_n) - (f,g)| \le |(f_n - f, g_n)| + |(f, g_n - g)|$

$$\underset{C.-S.}{\le} \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0}\,\underbrace{\|g_n\|}_{\le M} + \|f\|\,\underbrace{\|g_n - g\|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$n \to \infty$

✓

b) $f \in L^2((-\pi,\pi))$, a_n, b_n wie in Aufg. 1, $n \in \mathbb{N}$

<u>Beh</u>: $$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

Parseval-Relation

<u>Bew</u>: Mit a) und

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ergibt sich:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = (f, f)$$

$$= \left(\frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2}\right) + 2\left(\frac{a_0}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\right) + 2\left(\frac{a_0}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\right)$$

$$+ 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx\right)$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx\right)$$

$$+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx\right)$$

$$= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right] \checkmark$$

Benutzt wurde dabei:

$$\left.\begin{aligned} (\cos nx, \cos mx) &= \pi \delta_{n,m} \\ (\sin nx, \sin mx) &= \pi \delta_{n,m} \\ (\cos nx, \sin mx) &= 0 \\ (\cos nx, 1) = (\sin nx, 1) &= 0 \end{aligned}\right\} n, \geq 1$$

c) $f(x) = x^2$, 2π-periodisch

Vorlesung: $f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx$

Parseval: $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \pi\left[2\frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\right]$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.082$$

$g(x) = x^3$, 2π periodisch

$a_n = 0$ da $g(x)$ ungerade

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx\,dx \underset{\text{p.I.}}{=} \dots = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{3x^2}{n^2} - \frac{6}{n^4}\right)\sin nx - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x^3}{n} - \frac{6x}{n^3}\right)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{6\pi}{n^3} - \frac{\pi^3}{n}\right)(-1)^n = (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Parseval: $\int_{-\pi}^{\pi} x^6\,dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{7}\pi^7 = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{144}{n^6} - 48\pi^2\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\sum .. = \frac{\pi^4}{90}} + 4\pi^4\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\sum .. = \frac{\pi^2}{6}}\right)$$

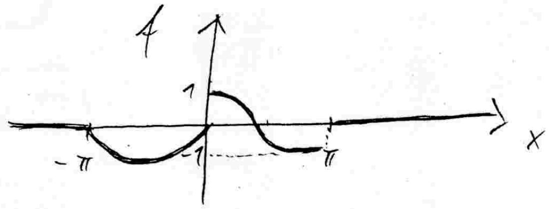
Vorlesung

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{7} + \frac{48}{90} - \frac{4}{6}\right)\pi^6 = 144\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Aufg 3:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \pi \\ \sin x & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & \text{für } 0 < x \le \pi \end{cases}$$



f lokal integrierbar, $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \varphi \, dx \quad \text{(reguläre Distribution)}$$

$$(T_f)'(\varphi) := -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \varphi' \, dx$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} \varphi'(x) \sin x \, dx - \int_{0}^{\pi} \varphi'(x) \cos x \, dx$$

$$= -\varphi(x) \sin x \Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \varphi(x) \cos x \, dx - \varphi(x) \cos x \Big|_{0}^{\pi}$$

$$+ \int_{0}^{\pi} \varphi(x) (-\sin x) \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \varphi(x) \cos x \, dx - \int_{0}^{\pi} \varphi(x) \sin x \, dx + \varphi(\pi) + \varphi(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \, dx + \varphi(0) + \varphi(\pi) = T_{f'}$$

$$\text{mit } f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \pi \\ \cos x & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ -\sin x & \text{für } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow (T_f)' = T_{f'} + \delta_0 + \delta_\pi \quad \text{(singuläre Distribution)}$$

Aufg 4:

a) $M \subset \mathbb{R}^3$ 2-dim. Mannigfaltigkeit
$N \subset \mathbb{R}^3$ 1-dim. "

$\forall R > 0$: $\left.\begin{matrix} M \cap B_R \\ N \cap B_R \end{matrix}\right\}$ kompakt

$f: M \to \mathbb{R}$, $g: N \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi \in C_0^\infty$

$$(f\delta_M)(\varphi) := \int_M \varphi(x)\, f(x)\, dO(x)$$

$$(g\delta_N)(\varphi) := \int_N \varphi(x)\, g(x)\, dO(x)$$

Beh: $f\delta_M$ bzw. $g\delta_N$ sind Distributionen auf $\mathbb{R}^3$

Bew: (für $f\delta_M$, der Fall $g\delta_N$ geht dann völlig analog)

$\forall x \in M$ existiert $U \subset \mathbb{R}^3$ und $P \subset \mathbb{R}^2$, beschränkt, sowie eine Karte $\phi: P \to U$, sodaß $|\partial_{t_1}\phi \times \partial_{t_2}\phi|$ beschränkt auf P.

Für festes $\varphi \in C_0^\infty$ sei $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$. Da $B_R \cap M$ kompakt gibt es endlich viele (U_i, P_i, ϕ_i) $i = 1, \dots, K$, sodaß $B_R \cap M \subset \bigcup_{i=1}^{K} U_i \cap M$.

Es gilt dann:

⑦

$$\left| \int_M \varphi(x)\, f(x)\, dO(x) \right| \le \int_{M\cap B_R} |\varphi(x)|\cdot|f(x)|\, dO(x)$$

$$\le C \int_{M\cap B_R} dO(x) = C \sum_{i=1}^{K} \int_{P_i} |\partial_{t_1}\phi \times \partial_{t_2}\phi| \, d(t_1,t_2) < \infty$$

Linearität: $(f S_M)(\alpha\varphi + \beta\chi) = \alpha (f S_M)(\varphi) + \beta (f S_M)(\chi)$ ✓

Stetigkeit: $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi$ in $\mathcal{D}$, d. h. insbesondere

$\exists R>0: \operatorname{supp} \varphi_k \subset B_R$, $\varphi_k \xrightarrow[\text{glm.}]{} \varphi$ $k\to\infty$

$$\Rightarrow |f S_M(\varphi_k) - f S_M(\varphi)| = \left| \int_M f(x)\,(\varphi_k(x) - \varphi(x))\, dO(x) \right|$$

$$\le \underbrace{\mathrm{vol}_2(M\cap B_R)}_{\le C_1} \cdot \underbrace{\sup_{M\cap B_R} |f|}_{\le C_2} \cdot \underbrace{\sup_{B_R} |\varphi_k - \varphi|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$ ✓

N) $A \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, ∂A glatt, $\nu: \partial A \to \mathbb{R}^3$ äußere Einheitsnormale, $1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{"} \ x \notin A \end{cases}$

charakt. Funktion von A

Beh: $\partial_{x_i} 1_A = -\nu_i S_{\partial A}$

Bew: $(\partial_{x_i} 1_A)(\varphi) \underset{\text{def.}}{=} -1_A(\partial_{x_i}\varphi)$

$$\underset{\text{reg. Distr.}}{=} - \int_A \partial_{x_i} \varphi \, d^3x \underset{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial A} \varphi \, \nu_i \, dO(x)$$

$$\underset{a)}{=} \left(-\nu_i \, \delta_{\partial A}\right)(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \text{Beh.}$$

c) $N = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : x_1 = x_2 = 0\}$, $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \setminus N \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_1}{x_1^2+x_2^2}, 0\right)^T$$

Beh.:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -2\pi \, \delta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bew.:

mit $\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} B_3 - \partial_{x_3} B_2 \\ \partial_{x_3} B_1 - \partial_{x_1} B_3 \\ \partial_{x_1} B_2 - \partial_{x_2} B_1 \end{pmatrix}$ gilt im

Distributionssinne: $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{B}\right)(\varphi) \underset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} B_2(\partial_{x_3} \varphi) - B_3(\partial_{x_2} \varphi) \\ B_3(\partial_{x_1} \varphi) - B_1(\partial_{x_3} \varphi) \\ B_1(\partial_{x_2} \varphi) - B_2(\partial_{x_1} \varphi) \end{pmatrix}$$

$\vec{B}$ ist auch um die z-Achse lokal int.bar:

$$\int_{\substack{x_1^2+x_2^2 \le 1 \\ |x_3| \le M}} |\vec{B}(x)| \, d^3x = \int \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \, d^3x = 2M \int_{x_1^2+x_2^2 \le 1} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \, d(x_1, x_2)$$

$$\underset{\uparrow}{=} 2M \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r} \, r \, dr \, d\varphi = 4\pi M < \infty$$

$$\Rightarrow (\operatorname{rot} \vec{B})(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\, \partial_{x_3} \varphi \\ -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\, \partial_{x_3} \varphi \\ \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\, \partial_{x_2} \varphi + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\, \partial_{x_1} \varphi \end{pmatrix} d^3x$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\left\{ \substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1^2+x_2^2 \geq \varepsilon^2} \right\}} \begin{pmatrix} -\partial_{x_3}\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\, \varphi\right) \\ -\partial_{x_3}\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\, \varphi\right) \\ \partial_{x_2}\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\, \varphi\right) + \partial_{x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\, \varphi\right) \end{pmatrix} d^3x$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{supp}\, \varphi \text{ kompakt,} \\ \text{Satz von Gauß}}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{x_1^2+x_2^2 = \varepsilon^2\}} \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\, \varphi\, \nu_3 \\ -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\, \varphi\, \nu_3 \\ \left(\frac{x_2 \nu_2}{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_1 \nu_1}{x_1^2+x_2^2}\right) \varphi \end{pmatrix} dO(x)$$

Mit $\vec{\nu} = -\frac{(x_1, x_2, 0)^T}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ ergibt sich : $\ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{x_1^2+x_2^2=\varepsilon^2\}} (-)\frac{1}{\varepsilon}\, \varphi \, dO(x) \end{pmatrix}$

Die 3. Komponente ergibt mit Zylinderkoordinaten $(\varepsilon, \varphi, z)$:

$$-\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon}\, \varphi(\varepsilon \cos\varphi, \varepsilon \sin\varphi, z)\, \varepsilon \, d\varphi \, dz \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ glm. stetig} \\ \text{Satz von Lebesgue}}}{=} -\int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \varphi(0,0,z)\, d\varphi \, dz$$

$$= -2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,0,z)\, dz = -2\pi \int_N \varphi(x)\, dO(x) \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{=} -2\pi\, \delta_N(\varphi)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = -2\pi\, \delta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$