Übungen zu „Analysis III“ / „Mathematik für Physiker III“ **R. Kaiser**
Blatt 12
13.1.2003

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Integrieren Sie die folgenden Differentialgleichungen. Es reicht, wenn Sie die Lösungen implizit, d.h. in der Form $h(x, y) = \text{const.}$, angeben.

a) $9x^2y\,dx + 4xy^2\,dy = 0$.

b) $(2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,dx + (3y^2 + x)\,dy = 0$.
(Hinweis: Ansatz für Eulerschen Multiplikator $\mu = \mu(x)$.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem $\dot{x} = \frac{e^x \cos t}{t^2} + \frac{2}{t}$, $x(\pi) = 0$, die maximale Lösung.
Hinweis: Versuchen Sie die Gleichung als exakte Differentialgleichung zu schreiben, erforderlichenfalls unter Zuhilfenahme eines integrierenden Faktors.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $f_\nu, f \in \mathcal{H}$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

a) $f_\nu \to f$ in $\mathcal{H}$ für $\nu \to \infty$
$\iff$
$\|f_\nu\| \to \|f\|$ für $\nu \to \infty$, und für alle $g \in \mathcal{H}$ gilt:
$$\lim_{\nu\to\infty} \langle f_\nu, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

b) Für alle $g \in \mathcal{H}$ gelte $\lim_{\nu\to\infty} \langle f_\nu, g\rangle = \langle f, g\rangle$. Dann folgt:
$$\|f\| \leq \liminf_{\nu\to\infty} \|f_\nu\|.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}_0$
$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß H_n ein Polynom vom Grade n ist.

Betrachten Sie nun für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen
$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

b) Zeigen Sie: $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R})$. Die Funktionen φ_n sind paarweise orthogonal in $L^2(\mathbb{R})$.

Abgabe: In der 13. Vorlesungswoche (20.1.-24.1.03) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 1:

a) $\omega = 9x^2 y\, dx + 4xy^2\, dy$

$d\omega = (-9x^2 + 4y^2)\, dx \wedge dy \neq 0$

aber: $\tilde{\omega} := \dfrac{\omega}{xy} = 9x\, dx + 4y\, dy$

$d\tilde{\omega} = 0$

$\underset{\text{Poincaré}}{\Rightarrow} \quad \exists f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2): \tilde{\omega} = df = \partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy$

$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x f = 9x \\ \partial_y f = 4y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{9}{2}x^2 + 2y^2$

Vorlesung: $f(x,y) = \text{const.}$ ist (implizite) Lösungskurve der Dgl $\omega = 0$.

b) $\omega = (2x^2 y + 2xy^3 + y)\, dx + (3y^2 + x)\, dy$

$d\omega = (-2x^2 - 6xy^2 - 1 + 1)\, dx \wedge dy = -2x(x + 3y^2)\, dx \wedge dy \neq 0$

Ansatz: $\tilde{\omega} = \mu(x)\, \omega$

$\Rightarrow d\tilde{\omega} = \left[(-2x^2 - 6xy^2 - 1)\mu + \mu + (3y^2 + x)\mu'\right] dx \wedge dy$

$= \left[-2x(x + 3y^2)\mu + (x + 3y^2)\mu'\right] dx \wedge dy \overset{!}{=} 0$

②

$\Leftarrow\Rightarrow \quad 2x(x+3y^2)\mu = (x+3y^2)\mu'$

$\Leftarrow \quad 2x\mu = \mu'$

$\Leftarrow \quad \mu = e^{x^2}$

$\tilde{\omega} = df : \begin{cases} \partial_x f = (2x^2y + 2xy^3 + y)e^{x^2} \\ \partial_y f = (3y^2 + x)e^{x^2} \Rightarrow f = (y^3 + xy)e^{x^2} + g(x) \end{cases}$

1. Gleichung: $(y + 2x^2y)e^{x^2} + g' \overset{!}{=} (2x^2y + 2xy^3 + y)e^{x^2}$
$+ 2xy^3$

$\Rightarrow g' = 0$

Alle Lösungskurven sind gegeben durch $f(x,y) = \text{const.}$

Nachtrag zu a): Der "Eulersche Multiplikator" $\mu = \frac{2}{xy}$ enthält ~~Null~~ singuläre Stellen! Weitere Lösungen für a):

$x \equiv 0$ und $y \equiv 0$.

Aufg 2:

$\dot{x} = \frac{e^x \cos t}{t^2} + \frac{2}{t} \qquad x(\pi) = 0$

$\Leftarrow\Rightarrow \quad (e^x \cos t + 2t)\,dt - t^2\,dx = 0 \qquad | \cdot \mu(x) \neq 0$

$\Leftarrow\Rightarrow \quad \underbrace{\mu(e^x \cos t + 2t)\,dt - \mu t^2\,dx}_{\tilde{\omega}(x,t)} = 0$

$$d\tilde{\omega} = \mu'(e^x \cos t + 2t) + \mu e^x \cos t + 2t\mu)\, dx \wedge dt$$ ③

$$d\tilde{\omega} = 0: \quad (\mu' + \mu)\underbrace{(e^x \cos t + 2t)}_{\neq 0} = 0$$

erfüllt für $\mu = e^{-x}$

$$\tilde{\omega} = df: \begin{cases} \partial_x f = -t^2 e^{-x} & \Rightarrow f = t^2 e^{-x} + g(t) \\ \partial_t f = \cos t + 2t e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2t e^{-x} + \dot{g} = \cos t + 2t e^{-x}$$

$$\Rightarrow g(t) = \sin t$$

$$\Rightarrow f(x,t) = t^2 e^{-x} + \sin t$$

Lösungskurven: $f(x,t) = \text{const.}$

$x(\pi) = 0: \quad f(0,\pi) = \pi^2 = C$

$$\Rightarrow e^{-x} = (\pi^2 - \sin t)/t^2$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \ln\left(\frac{t^2}{\pi^2 - \sin t}\right), \quad I_{max} = (0, \infty)$$

<u>Aufg 3</u>:

$\mathcal{H}$ Hilbertraum, $f_\nu, f \in \mathcal{H}$ $(\nu \in \mathbb{N})$

a) <u>Beh</u>: $f_\nu \to f$ in $\mathcal{H} \Leftrightarrow$

$\|f_\nu\| \to \|f\|$ für $\nu \to \infty$ $\wedge$ $\lim (f_\nu, g) = (f, g)$ (für $\forall g \in \mathcal{H}$

Bew: "$\Rightarrow$": Sei $f_\nu \to f$ in $\mathcal{H}$

d.h. $\|f_\nu - f\| \to 0$ für $\nu \to \infty$

$$0 \le \big|\|f_\nu\| - \|f\|\big| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-UG}}}{\le} \|f_\nu - f\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \|f_\nu\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \|f\|$$

$$0 \le |(f_\nu, g) - (f, g)| = |(f_\nu - f, g)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CSU}}}{\le} \|f_\nu - f\| \|g\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

$$\Leftarrow\!\Rightarrow (f_\nu, g) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} (f, g) \quad \checkmark$$

"$\Leftarrow$": $0 \le \|f_\nu - f\|^2 = (f_\nu - f, f_\nu - f) =$

$$= \|f_\nu\|^2 \underbrace{- (f_\nu, f) - \underbrace{(f, f_\nu)}_{\overline{(f_\nu, f)}}}_{-2\operatorname{Re}\{(f_\nu, f)\}} + \|f\|^2$$

$\nu \to \infty$ $\quad\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$$\|f\|^2 - 2\operatorname{Re}\{\|f\|^2\} + \|f\|^2 = 0 \quad \checkmark$$

b) Beh: $(f_\nu, g) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} (f, g)$ $\forall g \in \mathcal{H} \Rightarrow$

$$\|f\| \le \liminf_{\nu\to\infty} \|f_\nu\|$$

Bew: nach a) gilt:

$$0 \le \|f_\nu - f\|^2 = \|f_\nu\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\{(f_\nu, f)\} + \|f\|^2$$

$\nu \to \infty$: $\quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$$? \qquad -2\|f\|^2 \quad + \|f\|^2$$

aber: $\{\|f_\nu\|^2 : \nu \in \mathbb{N}\}$ ist nach unten beschränkt

$$\Rightarrow \exists (\nu_k)_{k\in\mathbb{N}} : \quad \liminf_{\nu\to\infty} \|f_\nu\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{\nu_k}\|^2$$

$$\ge \|f\|^2 \quad ✓$$

Aufg. 4:

$$H_n(x) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

a) Beh: H_n ist Polynom vom Grade n (Hermite-Polynome)

Bew: vollst. Ind.

$n = 0$: $\quad H_0 = e^{x^2} e^{-x^2} = 1 \quad$ ✓

$n \to n+1$: $\quad H_{n+1} = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)} = e^{x^2}\left(e^{-x^2} e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}\right)'$

$$= e^{x^2}\left(e^{-x^2} H_n(x)\right)' = e^{x^2}\left(-2x\, e^{-x^2} H_n + e^{-x^2} H_n'\right)$$

$$= -2x \underbrace{H_n(x)}_{\text{Grad } n} + \underbrace{H_n'(x)}_{\text{Grad } n-1} = -2x P_n(x) + \tilde{P}_{n-1}(x)$$

$\Rightarrow$ H_{n+1} Polynom $\wedge$ $\mathrm{Grad}(H_{n+1}) = n+1$

1) $\Psi_n(x) := e^{-x^2/2} H_n(x)$

Beh: $\Psi_n \in L^2(\mathbb{R}) \wedge (\Psi_n, \Psi_m)_{L^2} = 0$ für $n \neq m$

Bew: Sei P_m Polynom vom Grade m, dann gilt mit geeignetem $C > 0$:

$$(1+x^2)\, P_m(x) \leq C e^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \underbrace{H_n^2(x)}_{=: P_{2n}(x)} dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\, dx$$

m̈

$$= C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx < \infty$$

$\Leftrightarrow \Psi_n \in L^2(\mathbb{R})$

(Mit dem selben Argument sind alle folgenden Integrale endlich)

$$(\Psi_n, \Psi_m)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \Psi_n(x)\, \Psi_m(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx$$

$\underline{n < m}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \underbrace{\left(e^{-x^2}\right)^{(m)}}_{\sim x^{n+m-1} \cdot e^{-x^2}} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} H_n(x) \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} dx$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty} \left\{ \left[H_n(x) \left(e^{-x^2}\right)^{(m-1)} \right]_{-R}^{R}\right.}_{=0} \left. - \int_{-R}^{R} H_n'(x) \left(e^{-x^2}\right)^{(m-1)} dx \right\}$$

$$= \ldots = (-1)^m \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \underbrace{H_n^{(m)}(x)}_{\equiv 0 \text{ da } m > n} e^{-x^2}\, dx = 0$$