Übungen zu „Analysis III" / „Mathematik für Physiker III" **R. Kaiser**
Blatt 11
07.1.2003

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine $n \times n$-Matrix, x_i sei die i-te Koordinatenfunktion in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, dx_i) \wedge \ldots \wedge (\sum_{i=1}^{n} a_{in}\, dx_i) = (\det A)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$d(\omega \circ \varphi) = (d\omega) \circ \varphi$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, glatt berandete Menge mit äußerem Einheitsnormalenfeld $\nu : \partial G \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $G \subset U$.
Es seien $v, w : U \to \mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbare Vektorfelder, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Man zeige:

a) $\operatorname{div}(v \times w) = \operatorname{rot} v \cdot w - v \cdot \operatorname{rot} w$

b) $\int_G \operatorname{rot} v\, dx = -\int_{\partial G} v \times \nu\, dO$

c) $\int_{\partial G} \operatorname{rot} v \cdot \nu\, dO = 0$

d) $\int_G \operatorname{grad} f\, dx = \int_{\partial G} f\nu\, dO$

e) Ist $w \times \nu|_{\partial G} = 0$, so gilt: $\int_G \operatorname{rot} v \cdot w\, dx = \int_G v \cdot \operatorname{rot} w\, dx$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig.
Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $\operatorname{div} E(x) = \rho(x)$ genau dann, wenn für jedes Kompaktum K mit glattem Rand ∂K und äußerer Einheitsnormale ν gilt:

$$\int_{\partial K} E(x) \cdot \nu(x)\, dO = \int_K \rho(x)\, dx.$$

Hinweis: Aufg. 1a), Blatt 5.

Abgabe: In der 12. Vorlesungswoche (13.1.-18.1.03) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 1 a):

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$: $n\times n$-Matrix

$dx_1, \dots, dx_n$: kanonische Basis des $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$

Beh: $\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}\, dx_i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n a_{in}\, dx_i\right) = \det A \; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Bew: $\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}\, dx_i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n a_{in}\, dx_i\right)$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n=1 \\ \text{p.w. verschieden}}}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

Eine Auswahl von n paarweise verschiedenen Elementen aus $\{1, \dots, n\}$ ist eine Permutation $\sigma \in S_n$ ("symmetrische Gruppe")

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\, dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(n)}$$

$$= \left[\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\, \operatorname{sign} \sigma\right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$= \det A \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

Dabei wurde $\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{k}$, k = Anzahl der Transpositionen von σ, verwendet.

Aufg 2:

$G \subset \mathbb{R}^3$, ∂G glatt mit äußerem Einheitsnormalenfeld

$\nu : \partial G \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\bar{G} \subset U$

$v, w : U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffb. Vektorfelder

$f : U \to \mathbb{R}$ " " Funktion

a) Beh: $\operatorname{div}(v \times w) = \operatorname{rot} v \cdot w - v \cdot \operatorname{rot} w$

Bew: Komponentenschreibweise mit ε-Symbol:

$$(v \times w)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} v_j w_k \qquad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine ger. Perm. von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{--''-- ung. Perm.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(v \times w) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_i (v_j w_k)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_i v_j w_k + \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} v_j \partial_i w_k$$

$$\operatorname{rot} v \cdot w = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k w_i \overset{\substack{\text{zykl. Perm: } j \to i \to k \\ \downarrow}}{=} \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_i v_j w_k$$

$$- v \cdot \operatorname{rot} w = - \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} v_i \partial_j w_k \overset{\substack{\text{Transp. } i \leftrightarrow j \\ \downarrow}}{=} \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} v_j \partial_i w_k$$

③

b) <u>Beh</u>: $\int_G \operatorname{rot} v \, dx = -\int_{\partial G} v \times \nu \, dO$

<u>Bew</u>: Gauß: $\int_G \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_i \, dx = \int_{\partial G} \sum_{i=1}^{3} u_i \nu_i \, dO$

$\vec{u} := f \vec{e}_i \Rightarrow \int_G \partial_i f \, dx = \int_{\partial G} f \nu_i \, dO$

$f := v_j \Rightarrow \int_G \partial_i v_j \, dx = \int_{\partial G} v_j \nu_i \, dO$

insbesondere also: $\int_G (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \, dx = \int_{\partial G} (v_3 \nu_2 - v_2 \nu_3) \, dO$

" $(2,3) \to (3,1)$

" $(3,1) \to (1,2)$

$\hat{=}$ Beh. ✓

c) $\int_{\partial G} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dO \overset{\text{Gauß}}{=} \int \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} v}_{=0} \, dx = 0$

Achtung: $v \in C^2(U)$ notwendig!

d) $\int_G \operatorname{grad} f \, dx = \int_{\partial G} f \nu \, dO$

$\Leftrightarrow \int_G \partial_i f \, dx = \int_{\partial G} f \nu_i \, dO \quad i = 1, 2, 3$ ✓ (siehe b))

④

e) $\int_G \operatorname{rot} v \cdot w \, dx - \int_G v \cdot \operatorname{rot} w \, dx \underset{a)}{\overset{\uparrow}{=}} \int_G \operatorname{div}(v \times w) \, dx$

$\underset{\text{Gauß}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\partial G} (v \times w) \cdot \nu \, dO \ldots = \int_{\partial G} \underbrace{w \times \nu}_{=0} \cdot v \, dO = 0$

Bemerkung: $w \times \nu \big|_{\partial G} = 0 \overset{\wedge}{=} w = (w \cdot \nu) \nu$

(w hat keine Tangentialkomponente auf ∂G)

Aufg 3:

$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig diffb., $\varsigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig

Bed: $\operatorname{div} E(x) = \varsigma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \iff \forall K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt:

$\int_{\partial K} E(x) \cdot \nu(x) \, dO = \int_K \varsigma(x) \, dx$, ∂K glatt mit äußerer EN

Bew: "$\Rightarrow$": Gauß ✓

"$\Leftarrow$": Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ bel, $\varepsilon > 0$ bel

Sei $K := B_\varepsilon(x_0)$, dann gilt:

$\int_{B_\varepsilon(x_0)} \varsigma(x) \, dx = \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} E(x) \cdot \nu(x) \, dO \underset{\text{Gauß}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \operatorname{div} E(x) \, dx \quad (+)$

Für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x_0)} f(x) \, dx = \qquad e_n := \int_{B_1(0)} 1 \, dx$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x_0)} f(x_0)\, dx + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \big(f(x) - f(x_0)\big)\, dx}_{= 0}$$

$$= f(x_0) \qquad (++)$$

denn: $0 \leq \int_{B_\varepsilon(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\, dx \leq e_n \varepsilon^n \sup_{B_\varepsilon(x_0)} |f(x) - f(x_0)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Anwendung von (++) auf (+) ergibt:

$$\rho(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \rho(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x_0)} (\operatorname{div} E)\, dx$$

$$= \operatorname{div} E(x_0)$$

Aufg 1 b): $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig differbar,

$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

Geh: $d(\omega \circ \varphi) = (d\omega) \circ \varphi$

Bew: Koordinaten in $\mathbb{R}^n$: $x_1, \dots, x_n$ $\qquad x_i = \varphi_i(t) \quad i = 1, \dots, n$

" in $\mathbb{R}^m$: $\underbrace{t_1, \dots, t_m}_{=:t}$

$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ hat die Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} f_{i_1 \dots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}.$$

O.B.d.A. reicht es ein Monom $\tilde{f} \, dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}$ zu untersuchen:

$$(d\omega) \circ \varphi = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \circ \varphi$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\nu} \circ \varphi \; d\varphi_\nu(t) \wedge d\varphi_{i_1}(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(t)$$

$$d(\omega \circ \varphi) = d\left(\tilde{f} \circ \varphi \; d\varphi_{i_1}(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(t) \right)$$

$$= d(\tilde{f} \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1}(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(t)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_\nu} \circ \varphi \; d\varphi_\nu(t) \wedge d\varphi_{i_1}(t) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(t)$$

✓

Äußere Ableitung und "Pull-back" vertauschen!