Übungen zu "Analysis III"/ Mathematik für Physiker III" **R. Kaiser**
Blatt 10 (**Weihnachtsblatt**)
16.12.2000

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $M := \partial K := \partial K_1(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ und $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) :]0,\pi[\times]0,2\pi[\to M$, $\psi(\vartheta,\phi) := (\cos\phi \sin\vartheta, \sin\phi\sin\vartheta, \cos\vartheta)$ eine Karte.
Man berechne das Integral

$$\int_M z\, dx \wedge dy - dy \wedge dz$$

vermöge

a) der Formel $\int\limits_M \omega = \int\limits_{\psi^{-1}(M)} \omega \circ \psi$,

b) der Entsprechung $(dy\wedge dz, dz\wedge dx, dx\wedge dy) = d\vec{O} = \nu dO$ als klassisches Oberflächenintegral,

c) des Satzes von Stokes $\int\limits_{\partial K} \omega = \int\limits_K d\omega$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Archimedisches Prinzip: Betrachten Sie einen See $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$ und einen schwimmenden Körper $K \subset S$. Der See habe konstante Dichte ρ, K sei kompakt mit glattem Rand ∂K und äußerer Normale ν. Der hydrostatische Druck ist gegeben durch $p : S \to \mathbb{R}$, $p(x,y,z) = -\rho z$. Auf K wirkt eine Auftriebskraft

$$F = -\int_{\partial K} p(x,y,z)\nu(x,y,z) dO(x,y,z).$$

Zeigen Sie: $F = (0,0,\rho\ \mathrm{vol}_3(K))$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Man verifiziere den Satz von Gauß für den Torus aus Aufgabe 3, Blatt 7 und die Funktion $f(x,y,z) = (x,y,z)$.

b) Man verifiziere den klassischen Satz von Stokes für die Funktion $f(x,y,z) = (z^2-x^2, x^2-y^2, y^2-x^2)$ auf der Fläche

$$x = u\cos\ v, \quad y = u \sin\ v, \quad z = v;$$

dabei gelte $1 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt mit glattem Rand ∂K, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, für $x \in \partial K$ gelte $f(x) = 0$. Schließlich sei $R \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $\|x\| \leq R$ gilt für alle $x \in K$. Zeigen Sie:

$$\int_K |f(x)|^2\, dx \leq \frac{4R^2}{n^2} \int_K |\nabla f(x)|^2\, dx.$$

Hinweis: Wenden Sie den Gauß'schen Satz auf die Funktion $x \mapsto x \cdot f^2(x)$ an.

Abgabe: In der 11. Vorlesungswoche (7.1.-10.1.03) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 1: $M := \partial K = \partial K_1(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| = 1\}$

$$\psi : \begin{cases} (0,\pi) \times (0,2\pi) \longrightarrow M \\ \psi(\theta,\varphi) \longmapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \end{cases}$$

Karte von M

Berechne:

$$\int_M \underbrace{z\,dx \wedge dy - dy \wedge dz}_{\omega}$$

a) $\int_M \omega = \int_{\psi^{-1}(M)} \omega \circ \psi$ (Vorlesung)

$$\omega \circ \psi = \psi_3\, d\psi_1 \wedge d\psi_2 - d\psi_2 \wedge d\psi_3$$

$$= \cos\theta \,(-\sin\theta \sin\varphi \cos\theta \sin\varphi \; d\varphi \wedge d\theta$$

$$+ \cos\theta\cos\varphi \sin\theta \cos\varphi \; d\theta \wedge d\varphi)$$

$$- \sin\theta\cos\varphi\,(-\sin\theta)\; d\varphi \wedge d\theta$$

$$= (\cos\theta \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta \cos\varphi)\; d\theta \wedge d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_M \omega = \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)} (\cos^2\theta \sin\theta - \sin^2\theta\cos\varphi)\; d\theta \wedge d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos^2\theta \sin\theta - \sin^2\theta\cos\varphi)\; d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta - \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi}_{=0}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3}\right) \cos^3\theta \Big|_0^\pi = 4/3\,\pi$$

b)

$$\int_M z\,dx \wedge dy - dy \wedge dz = \int_M (-1)\, dy \wedge dz + 0 \cdot dz \wedge dx + z \cdot dx \wedge dy$$

$$= \int_M \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_M \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{\nu}(\vec{x})\, dO(x) \quad \text{(Aufg 2 Blatt 9)}$$

$$\vec{v}(\vec{x}) := (-1, 0, z)$$

Mit $\vec{\nu}(\vec{x}) = \vec{x} = \Psi(\theta, \varphi)$ und $|\partial_\theta \Psi \times \partial_\varphi \Psi| = \sin\theta$

[Aufg. 2 a) Blatt 9] ergibt sich weiter:

$$= \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)} (-\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta \cdot \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos^2\theta \sin\theta - \sin^2\theta \cos\varphi) \, d\theta \, d\varphi \underset{(s.o.)}{=} 4/3\,\pi$$

c)

$$\int_{M = \partial K} \omega \underset{\text{Stokes}}{=} \int_K d\omega = \int_K dx \wedge dy \wedge dz = \int_{K_1(0)} dx\,dy\,dz$$

$$= \mathrm{vol}_3(K_1(0)) = 4/3\,\pi$$

Aufg 2:

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$, $K \subset S$ kompakt

∂K: glatt, mit äußerer Normale $\vec{\nu}(\vec{x})$

$p : S \to \mathbb{R}$, $p(\vec{x}) = -\varrho z$

$$\vec{F} = -\int_{\partial K} p(\vec{x})\, \vec{\nu}(\vec{x})\, dO(\vec{x})$$

Beh: $\vec{F} = (0, 0, \varrho\, \mathrm{vol}_3(K))^T$ „Auftrieb"

Bew. $$\vec{F} = \int_{\partial K} \varrho z \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}(\vec{x})\, dO(\vec{x})$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{\partial K} \varrho z \nu_1\, dO \\ \int_{\partial K} \varrho z \nu_2\, dO \\ \int_{\partial K} \varrho z \nu_3\, dO \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \int_K \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \varrho z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d^3x \\ \int_K \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho z \\ 0 \end{pmatrix} d^3x \\ \int_K \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varrho z \end{pmatrix} d^3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_K \varrho\, d^3x \end{pmatrix} = (0, 0, \varrho\, \mathrm{vol}_3(K))^T$$

Aufg 3:

a) $K = T \subset \mathbb{R}^3$

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x = (R + \varrho \cos\psi)\cos\varphi \\ y = (R + \varrho\cos\psi)\sin\varphi \\ z = \varrho \sin\psi \end{array} \right. \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \psi \in [0, 2\pi) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ \varrho \in [0, R) \end{array}.$$

ν: äußere Normale an ∂K

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y, z)$$

Satz von Gauß:

$$\int_K \operatorname{div} f \, d^3x = \int_{\partial K} f \cdot \nu \, dO(x)$$

linke Seite:

$$\int_K \nabla \cdot f \, d^3x = 3 \int_T d^3x = 3 \operatorname{vol}_3(T) = 6\pi^2 \varrho^2 R$$

siehe Aufg 3 Blatt 2

rechte Seite:

$$\nu \, dO(x) = \partial_\varphi \vec{x} \times \partial_\psi \vec{x} \; d\varphi \wedge d\psi$$

$$\partial_\varphi \vec{x} \times \partial_\psi \vec{x} = \begin{pmatrix} -(R + \varrho\cos\psi)\sin\varphi \\ R + \varrho\cos\psi)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho\sin\psi\cos\varphi \\ -\varrho\sin\psi\sin\varphi \\ \varrho\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \varrho(R+\varrho\cos\psi)\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi\\ \cos\psi\sin\varphi\\ \sin\psi\end{pmatrix}$$

$$f\cdot\partial_\varphi\vec{x}\times\partial_\psi\vec{x} = \varrho(R+\varrho\cos\psi)\Big[(R+\varrho\cos\psi)\cos\psi\cos^2\varphi + (R+\varrho\cos\psi)\cos\psi\sin^2\varphi + \varrho\sin^2\psi\Big]$$

$$= \varrho(R+\varrho\cos\psi)\Big[(R+\varrho\cos\psi)\cos\psi + \varrho\sin^2\psi\Big]$$

$$= \varrho(R+\varrho\cos\psi)(R\cos\psi+\varrho)$$

$$= \varrho\Big[(R^2+\varrho^2)\cos\psi + R\varrho(1+\cos^2\psi)\Big]$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} f\cdot\nu\, dO(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varrho\Big[(R^2+\varrho^2)\cos\psi + R\varrho(1+\cos^2\psi)\Big]\,d\varphi\, d\psi$$

$$= 2\pi\varrho\underbrace{\int_0^{2\pi}(R^2+\varrho^2)\cos\psi\, d\psi}_{=0} + 2\pi\varrho R\varrho\underbrace{\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\psi)\,d\psi}_{2\pi+\pi}$$

$$= 6\pi^2\varrho^2 R$$

b)

$$\mathcal{F} = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3:\ \begin{matrix} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v\end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} u\in[1,2] \\ v\in[0,2\pi]\end{matrix}\right\}$$

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(\vec{x}) = (z^2-x^2,\ x^2-y^2,\ y^2-x^2)$$

$$\operatorname{rot} f = 2(y,\ x+z,\ x)$$

Satz von Stokes:

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot \nu \, dO = \int_{\partial \mathcal{F}} f \cdot \tau \, d\sigma$$

linke Seite:

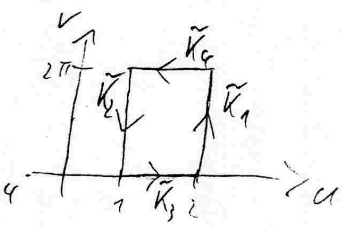
$$\partial_u \vec{x} \times \partial_v \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot \nu \, dO = 2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \begin{pmatrix} u \sin v \\ u \cos v + v \\ u \cos v \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} du \, dv$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left[2u \underbrace{(\sin^2 v - \cos^2 v)}_{=0} - 2v \cos v + 2u^2 \underbrace{\cos v}_{=0} \right] du \, dv$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} v \cos v \, dv = -4 \left[v \sin v \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin v \right] = 0$$

rechte Seite: $\partial \mathcal{F} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$



$\tau \, d\sigma = \partial_t \varphi \, dt \qquad \varphi_i(\tilde{K}_i) = K_i \quad i = 1..4$

$K_1: \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 2\cos v \\ 2 \sin v \\ v \end{pmatrix} \qquad \partial_v \varphi_1 = \begin{pmatrix} -2 \sin v \\ 2 \cos v \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le v \le 2\pi$

$K_2: \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - v) \\ \sin(2\pi - v) \\ 2\pi - v \end{pmatrix} \qquad \partial_v \varphi_2 = -\begin{pmatrix} -\sin(2\pi - v) \\ \cos(2\pi - v) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \le v \le 2\pi$

$K_3: \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \partial_u \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le u \le 2$

$K_4 \quad \varphi_4 = \begin{pmatrix} 3 - u \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \qquad \partial_u \varphi_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le u \le 2$

Fortsetzung: S. 8

Aufg 4:

$K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, ∂K glatt

$f: U \to \mathbb{R}$ stetig diffb. $f|_{\partial K} = 0$

$R \in \mathbb{R}$: $|x| \leq R$ für alle $x \in K$

Beh: $$\int_K |f(x)|^2 \, d^n x \leq \frac{4R^2}{n^2} \int_K |\nabla f(x)|^2 \, d^n x$$

Bew: Betrachte $g(x) := f^2(x) \cdot x$

$\operatorname{div} g = \nabla \cdot g = n f^2(x) + 2 f(x) \nabla f \cdot x$

$g|_{\partial K} = 0$

Gauß: $$0 = \int_{\partial K} g \cdot \nu \, dO(x) = \int_K \nabla \cdot g \, d^n x$$

$$= n \int_K f^2(x) \, d^n x + 2 \int_K f(x) \nabla f(x) \cdot x \, d^n x$$

$$\Rightarrow \int_K f^2(x) \, d^n x = -\frac{2}{n} \int_K f(x) \nabla f(x) \cdot x \, d^n x$$

$$\underset{\uparrow}{\leq} \frac{2}{n} \int_K |f(x)| \, |x| \, |\nabla f| \, d^n x \leq \frac{2R}{n} \int_K |f(x)| \, |\nabla f| \, d^n x$$

C.-S. für eukl. Norm

$$\leq \frac{2R}{n}\left(\int_K |f(x)|^2 d^n x\right)^{1/2}\left(\int_K |\nabla f|^2 d^n x\right)^{1/2}$$

C.-S. für L^2-Norm

$$\Rightarrow \left(\int_K |f(x)|^2 d^n x\right)^{1/2} \leq \frac{2R}{n}\left(\int_K |\vec{\nabla} f(x)|^2 d^n x\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_K |f(x)|^2 d^n x \leq \frac{4R^2}{n^2}\int_K |\vec{\nabla} f(x)|^2 d^n x$$

Aufg 3b (Forts.)

$$\Rightarrow \int_{K_1} f\cdot\tau\, do = \int_{\tilde{K}_1} \begin{pmatrix} v^2-4\cos^2 v \\ 4\cos^2-4\sin^2 v \\ 4\sin^2 v-4\cos^2 v\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -2\sin v \\ 2\cos v \\ 1\end{pmatrix} dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[-2v^2\sin v + \underbrace{8\sin v\cos^2 v}_{=0} + \underbrace{8\cos^3 v}_{=0} \underbrace{-8\sin^2 v\cos v}_{=0} + \underbrace{4\sin^2 v - 4\cos^2 v}_{=0}\Big] dv$$

$$= -2\int_0^{2\pi} v^2 \sin v\, dv = -2\Big\{\big[-v^2\cos v\big]_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} 2v\cos v\, dv}_{=0}\Big\} = 8\pi^2$$

analog: $\int_{K_2} f\cdot\tau\, do = \ldots = -4\pi^2$

$$\int_{K_3} f\cdot\tau\, do = -\int_1^2 u^2\, du = -\left[u^3/3\right]_1^2 = -7/3$$

$$\int_{K_4} f\cdot\tau\, do = -\int_1^2\left(4\pi^2-(3-u)^2\right) du = 7/3 - 4\pi^2$$

insgesamt: $\int_{\partial F} f\cdot\tau\, do = \sum_{i=1}^4 \int_{K_i} f\cdot\tau\, do = 0$ ✓