Übungen zu „Analysis III“ / „Mathe~~,~~matik für Physiker III“ **R. Kaiser**

Blatt 1

15.10.02

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$
(1) \qquad \begin{aligned} -(u'' + \frac{3}{r}u') &= u^3, \; r \overset{\geq}{\cancel{\leq}} 0 \quad 1 \\ u(0) &= 1, \; u'(0) = 0. \end{aligned}
$$

Bestimmen Sie eine Lösung von (1) mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $u(r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k}$.
(Probe nicht vergessen!).
Hinweis: Cauchy-Produkt für Reihen, Koeffizientenvergleich (Identitätssatz für Potenzreihen).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie mittels Ober- oder Untersummen das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}, \quad 0 < a < b.$$

Hinweis: Günstig ist z.B. die Zerlegung $Z_n = (x_0, ..., x_n)$ mit $x_i = aq^i$, $i = 0, ..., n$, $q := \sqrt[n]{b/a}$.

Aufgabe 3 (3 P)

$f : [a, b] \to [0, \infty)$ sei stetig, $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$.
Man zeige: $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Aufgabe 4 (4 P)

Es sei $f(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ für $0 < x \leq 1$ und $f(0) = 0$ ($[a] := \max\{i \in \mathbb{N}_0 : i \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}^+$).
Zeigen Sie, daß das Riemann-Integral $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$ existiert.
Hinweis: Benützen Sie das Riemann'sche Integrabilitätskriterium.

Abgabe: In der 2. Vorlesungswoche (21.-25.10.02) in den Übungen.

Musterlösung

Aufg 1: Gegeben das AWP:

$$-\left(u'' + \frac{3}{r} u'\right) = u^3, \qquad r \geq 0$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Lösung durch den Potenzreihenansatz $u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k}$:

$$u'(r) = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} 2k\, a_k r^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)\, a_{k+1} r^{2k+1}$$

$$u''(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(2k+2)\, a_{k+1} r^{2k}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(u'' + \frac{3}{r} u'\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+1)(2k+2) + 3(2k+2)\right] a_{k+1} r^{2k} = -\sum_{k=0}^{\infty} 4(k+1)(k+2)\, a_{k+1} r^{2k}$$

$$u^3 = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k}\right)}_{\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu a_{k-\nu}\right)}_{=: b_k} r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{2k}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{k} b_\mu a_{k-\mu}\right) r^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu a_{\mu-\nu} a_{k-\mu} r^{2k}$$

Koeffizientenvergleich für $-\left(u'' + \frac{3}{r} u''\right) = u^3$ in r^2:

$$-4(k+1)(k+2)\, a_{k+1} = \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu a_{\mu-\nu} a_{k-\mu}$$

Die ersten Koeffizienten: $\quad a_0 = 1 \quad$ (Anfangswert!)

$$k = 0: \quad -8 a_1 = \sum_{\mu=0}^{0} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu a_{\mu-\nu} a_{0-\mu} = a_0^3 = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -1/8$$

②

$k=1$: $-24\, a_2 = \sum_{\mu=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu a_{\mu-\nu} a_{1-\mu} = 3 a_0^2 a_1 = -\frac{3}{8}$

$= \underbrace{a_0^2 a_1}_{\mu=0,\ \nu=0} + \underbrace{a_0 a_1 a_0}_{\mu=1\ \nu=0} + \underbrace{a_1 a_0 a_0}_{\mu=1\ \nu=1}$

$\Rightarrow a_1 = \frac{3}{24\cdot 8} = (-1/8)^2$

$k=2$: .... $a_3 = (-1/8)^3$

Vermutung: $a_k = (-1/8)^k$

Bew. durch Ind.: $k = 0, 1, 2$ ✓

$k \to k+1$: $-4(k+1)(k+2)\, a_{k+1} = \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu a_{\mu-\nu} a_{k-\mu}$

$\underset{\text{Ind. Vor.}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\mu} \underbrace{(-1/8)^\nu (-1/8)^{\mu-\nu} (-1/8)^{k-\mu}}_{(-1/8)^k} = (-1/8)^k \cdot \underbrace{\sum_{\mu=0}^{k} (\mu+1)}_{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

$\Leftrightarrow a_{k+1} = (-1/8)^k \cdot (-1/8) = (-1/8)^{k+1}$ ✓

<u>Also</u>: $u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/8)^k r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{r^2}{8}\right)^k \underset{r^2<8}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{1+\frac{r^2}{8}} = \frac{8}{8+r^2}$

<u>formale</u>

Die Potenzreihe konvergiert nur für $|r| < 2\sqrt{2}$, die rechte Seite allerdings auf ganz $\mathbb{R}$. Probe für $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(r) = \frac{8}{8+r^2}$:

$u' = \frac{-16r}{(8+r^2)^2}$, $u'' = \frac{64 r^2}{(8+r^2)^3} - \frac{16}{(8+r^2)^2}$

$\Rightarrow -\left(u'' + \frac{3}{r} u'\right) = -\left[\frac{64 r^2}{(8+r^2)^3} - (1+3)\frac{16}{(8+r^2)^2}\right] = \frac{8\cdot 64}{(8+r^2)^3} = \left(\frac{8}{8+r^2}\right)^3 = u^3$ ✓

$u(0) = 1$ ✓

$u'(0) = 0$ ✓

Aufg. 2:

Zu berechnen: $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $\quad 0 < a < b$

$f:\begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x^2 \end{cases}$ ist im Intervall $[a,b]$ stetig

$\Rightarrow$ f integrierbar, es genügt also den Grenzwert einer bel. Folge von Obersummen $\underbrace{(S_f(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{mit } |Z_n| \to 0 \text{ für } n\to\infty}$ zu berechnen

z. B.: $Z_n = Z_n(x_0, \dots, x_n)$, $x_0 = aq^0$, $x_i = aq^i$, $x_n = aq^n = b$
$(\Leftrightarrow q = (b/a)^{1/n})$

$$|Z_n| := \max_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{i=1}^{n} a(q^i - q^{i-1}) = a(q-1)\max_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

$$= a(q-1)\,q^{n-1} = a\left((b/a)^{1/n} - 1\right)(b/a)^{\frac{n-1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$S_{1/x^2}(Z_n) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \underset{\underset{f\downarrow}{\uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{n} a(q^i - q^{i-1}) \frac{1}{(aq^{i-1})^2}$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{q-1}{q^{i-1}} = \frac{q-1}{a}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{q}\right)^i = \frac{q-1}{a}\,\frac{1-(1/q)^n}{1-1/q}$$

$$= \frac{1-(1/q)^n}{a}\,\frac{q-1}{1-1/q} = \frac{1-a/b}{a}\,q\,\frac{q-1}{q-1} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(b/a)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \overline{\int_a^b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} S_{1/x^2}(Z_n) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

[Verwendet wurde der Satz:
$\lim_{|Z|\to 0} s_f(Z) = \underline{\int_a^b} f\,dx$, $\quad \lim_{|Z|\to 0} S_f(Z) = \overline{\int_a^b} f\,dx$]

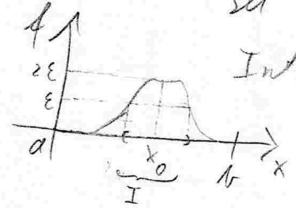
Aufg 3: $f : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

Beh: $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$

Bew: Ann: $\exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \neq 0$, also $f(x_0) > 0$.

Sei $f(x_0) = 2\varepsilon$. Da f $\underbrace{\text{stetig existiert}}^{\text{und } f(x_0)-\varepsilon = \varepsilon > 0}$ ein offenes Intervall $\underset{\subset[a,b]}{I}$ mit $x_0 \in I$ und $f(x) - \varepsilon > 0$ für alle $x \in I$. Sei $\ell(I) = 2\delta > 0$.



Da f stetig $\Rightarrow$ f (Riemann-) integrierbar $\Rightarrow$

Für eine bel. Folge von Zerlegungen (Z_n) von $[a,b]$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt: $\underset{\text{Untersumme}}{s_f(Z_n)} \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int_a^b f(x)\,dx$.

Sei n_0 so, daß $|Z_{n_0}| < \delta$. Dann gibt es wenigstens ein Intervall $\tilde{I} \in Z_{n_0}$ mit $\tilde{I} \subset I$. Es gilt dann die Abschätzung

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq s_f(Z_{n_0}) = \sum_{i=1}^{k_{n_0}} \underbrace{(x_i^{n_0} - x_{i-1}^{n_0})}_{\ell(I_i^{n_0})} \inf_{I_i^{n_0}} f \geq \ell(\tilde{I}) \inf_{\tilde{I}} f$$

$$\geq \ell(\tilde{I}) \cdot \underbrace{\inf_{I} f}_{> \varepsilon} \geq \ell(\tilde{I}) \cdot \varepsilon > 0 \quad ↯$$

Falls $x_0 = a$ oder b dann gibt es auch $x_1 \in (a,b)$ mit $f(x_1) \neq 0$. Weiter wie oben.

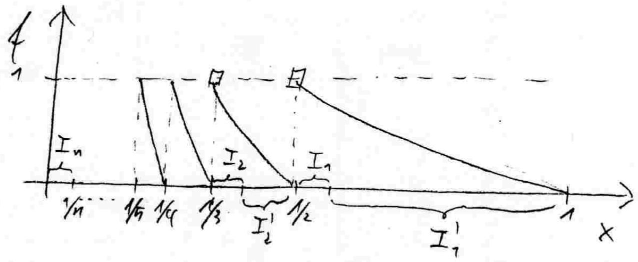
Aufg. 4:

Geg: $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ für $0 < x \leq 1$ $\wedge$ $f(0) = 0$

$$[a] := \max_{i \in \mathbb{N}} \{ i : i \leq a \}$$

Beh: $\int_0^1 f(x)\,dx$ existiert.

Bew:



$0 \leq f(x) < 1$

Riemannsches Integrabilitätskriterium:

f intgr. $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists Z : S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$: Wähle n derart, daß gilt: $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3} < \frac{1}{n-1}$

und setze $\delta := \frac{\varepsilon}{3n} < \frac{1}{n(n-1)}$

Zerlege dann $[0,1]$ in $2n-1$ Teilintervalle:

$I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta]$, $I_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \delta]$, ..., $I_{n-1} = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \delta]$, $I_n = [0,$

$I_1' = [\frac{1}{2} + \delta, 1]$, $I_2' = [\frac{1}{3} + \delta, \frac{1}{2}]$, ..., $I_{n-1}' = [\frac{1}{n} + \delta, \frac{1}{n-1}]$,

Auf I_i' $(i = 1, \dots, n-1)$ ist $f(x)$ stetig und damit integrierbar, d.h. es existiert eine Zerlegung Z_i von I_i' mit

$$S_f(Z_i) - s_f(Z_i) < \frac{\varepsilon}{3(n-1)}.$$

Sei $Z = \bigcup_{i=1}^{n-1} Z_i$, dann gilt:

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\left[S_f(Z_i) - s_f(Z_i)\right]}_{\sim I_i'} + \sum_{i=1}^{n-1} \delta \left[\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\right] + \frac{1}{n}\left[\sup_{I_n} f - \inf_{I_n} f\right]$$

$$\leq (n-1)\frac{\varepsilon}{3(n-1)} + (n-1) \cdot \underbrace{\delta}_{\leq \frac{\varepsilon}{3n}} \cdot 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \varepsilon/3} \cdot 1$$

$$\leq \varepsilon/3 + \frac{n-1}{n}\varepsilon/3 + \varepsilon/3 \leq \varepsilon$$