

---

# Monome und Linearsysteme in der projektiven Ebene

---

Schriftliche Hausarbeit  
im Rahmen der Ersten Staatsprüfung  
für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen

dem Staatlichen Prüfungsamt  
für Lehrämter an Schulen in Köln

vorgelegt von:

Regina Maria Kaune



angefertigt im Mathematischen Institut  
der Universität zu Köln  
unter Anleitung von  
Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus

Köln, den 05.03.2007

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei Herrn Prof. Dr. Kebekus zu bedanken, dass er es mir ermöglicht hat, meine Staatsexamensarbeit in der Algebraischen Geometrie anzufertigen.

Im Sommersemester 2006 hat er in einem Seminar meine Interesse in Richtung der Komplexen Geometrie gelenkt, so dass ich die Basiskenntnisse für eine Arbeit in der Algebraischen Geometrie erwerben konnte.

Herrn Dr. Eckl danke ich für die Beantwortung vieler Fragen bei der Bearbeitung meiner Examensarbeit.

Auch den Teilnehmern des Oberseminars „Komplexe und Algebraische Geometrie“ im Wintersemester 2006/07, vor allem Juliane Baum und Felix Schüller gilt mein Dank für ihre Unterstützung in mathematischen und gestalterischen Fragen.

Es hat mir viel Freude bereitet, in der Mathematik eine fachwissenschaftliche Arbeit anzufertigen.

Köln, den 05.03.2007

Regina Kaune

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Linearsysteme in der projektiven Ebene . . . . .	2
2.2	Punkte in allgemeiner Lage . . . . .	4
2.3	Übergang von den projektiven zu den affinen Koordinaten . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Diagrammausschneidemethode</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Reduktionsalgorithmus</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Beispiele</b>	<b>23</b>
<b>A</b>	<b>Laplace'scher Entwicklungssatz</b>	<b>33</b>
<b>B</b>	<b>Satz von Bezout</b>	<b>33</b>
	<b>Literatur</b>	<b>35</b>

## 1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Dimension von Linearsystemen ebener Kurven, die durch Punkte mit geforderten Vielfachheiten verlaufen. Dies ist eines der bekannten Probleme der algebraischen Geometrie und wird in neuerer Zeit immer weiter erforscht. Besonderes Interesse wecken solche Fälle, in denen die Dimension eines Systems die berechnete und damit erwartete Dimension übersteigt. Vor allem fallen solche Systeme auf, die man eigentlich als leer erwarten könnte, die aber trotzdem Elemente enthalten, d.h. deren Dimension größer als  $-1$  ist.<sup>1</sup>

Marcin Dumnicki [Dum06] hat eine sehr einfache Methode vorgestellt, die es ermöglicht, zu zeigen, dass in einem System die tatsächliche Dimension der erwarteten Dimension entspricht. Diese sogenannte Diagrammausschneidemethode verwendet einfache Grafiken, anhand derer sich die Dimensionsfrage oft sehr schnell und einfach lösen lässt. Sie stellt einen Spezialfall des Reduktionsalgorithmus dar, einem ebenfalls von Dumnicki in [DJ05] entwickelten Verfahren, um Linearsysteme auf ihre Dimensionen zu untersuchen.

Um die von Dumnicki beschriebenen Theoreme vorstellen zu können, werden zunächst in den Grundlagen einige Begriffe in Anlehnung an Rick Miranda [Mir99] und unter Rückgriff auf die Diplomarbeit von Sammy Barkowski [Bar06] geklärt. Die hier vorgestellten Definitionen sind für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtig. Der Hauptteil der Arbeit orientiert sich vorwiegend an den Veröffentlichungen von Dumnicki [Dum06], [DJ05], auch die Beweise im Kapitel der Diagrammausschneidemethode sind diesen Arbeiten entnommen.

Im Anschluss an den Hauptteil werden einige Beispiele für Linearsysteme vorgestellt, für die die erwartete der tatsächlichen Dimension entspricht. Es erfolgt die praktische Anwendung der Diagrammausschneidemethode, die Systeme werden mit ihrer Hilfe untersucht und ihre tatsächlichen Dimensionen ermittelt. So wird gezeigt, dass die Diagrammausschneidemethode eine gut handhabbare Methode darstellt, Linearsysteme zu diskutieren.

---

<sup>1</sup>Im Projektiven hat die leere Menge die Dimension  $-1$

## 2 Grundlagen

### 2.1 Linearsysteme in der projektiven Ebene

Wir betrachten in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2$  über dem Grundkörper  $\mathbb{C}$  Kurven vom Grad  $d$ . Diese werden von homogenen Polynomen  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$  vom Grad  $d$  geschnitten.

**Definition 2.1** Eine projektive ebene algebraische Kurve vom Grad  $d$  ist die Äquivalenzklasse der homogenen Polynome vom Grad  $d$ ,

$$F = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k,$$

wobei zwei äquivalent sind, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind.

Die Menge  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$  der homogenen Polynome vom Grad  $d$  (einschließlich des Nullpolynoms) ist offenbar ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension:

$$\binom{d+2}{2} = \frac{(d+1) \cdot (d+2)}{2}.$$

Eine kombinatorische Überlegung liefert diesen Wert als Anzahl der Monome in  $x_0, x_1$  und  $x_2$  vom Grad  $d$ , die eine Basis dieses Vektorraums bilden.

**Bemerkung 2.2** Da wir nicht zwischen Polynomen und ihren skalaren Vielfachen unterscheiden, ist der Raum der ebenen algebraischen Kurven ein projektiver Raum, also der Raum der 1-dimensionalen Unterräume des Vektorraumes der homogenen Polynome vom Grad  $d$ , wir bezeichnen ihn mit  $\mathcal{L}_d$ . Seine Dimension verringert sich damit um 1 und beträgt folglich:

$$\binom{d+2}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$$

Wir wählen nun Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), ordnen jedem Punkt  $p_i$  eine natürliche Zahl  $m_i$  zu und betrachten Kurven vom Grad  $d$ , die in den Punkten  $p_i$  jeweils mindestens Vielfachheit  $m_i$  haben, für  $i = 1, \dots, n$ . Mindestens Multiplizität 1 in  $p_i$  zu haben bedeutet, dass die Kurve durch  $p_i$  läuft.

Eine Kurve  $C$  hat in einem Punkt  $p_i$  Vielfachheit  $m_i$  genau dann, wenn für das zugehörige Polynom  $F$  alle  $k$ -ten partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k = m_i - 1$  im Punkt  $p_i$  verschwinden.

**Definition 2.3** Eine Kurve  $C$  besitzt *Multiplizität  $m$  in  $p$* , wenn für das definierende Polynom  $F$  gilt:

$$\frac{\partial^{(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)} F}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(p) = 0, \quad \text{für alle } \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq m - 1.$$

## 2 Grundlagen

**Definition 2.4** Für paarweise verschiedene Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$  sei:

$$\mathcal{L}_d \left( - \sum_{i=1}^n m_i p_i \right) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_d (-m_i p_i)$$

das *Linearsystem ebener Kurven vom Grad  $d$*  mit Multiplizität mindestens  $m_i$  in  $p_i$  für jedes  $i$ .

Ohne Einschränkung können wir Punkte  $p_i$  betrachten mit  $x_2 \neq 0$ . Dies erreichen wir dadurch, dass wir entweder nur Punkte außerhalb der unendlich fernen Geraden betrachten oder die unendlich fernen Punkte durch einen Morphismus so verschieben, dass wir Koordinaten erhalten mit  $x_2 \neq 0$ . So können wir anstelle der projektiven Koordinaten die affinen Koordinaten  $(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})$  betrachten und vereinfachen damit die homogenen Polynome  $F = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$  zu den inhomogenen Polynomen  $f = \sum_{i+j \leq d} X_1^j X_2^k$ , mit  $X_1 = \frac{x_0}{x_2}, X_2 = \frac{x_1}{x_2}$ .

Nun können wir mithilfe der Taylorentwicklung von  $f$  berechnen, dass eine Nullstelle der Ordnung  $m_i$  von  $F$  genau  $\binom{m_i+1}{2} = \frac{m_i(m_i+1)}{2}$  Bedingungen an die Koeffizienten  $a_{ijk}$  von  $F$  stellt, solange der Grad von  $F$  mindestens  $m_i - 1$  beträgt.

Anders ausgedrückt: alle partiellen Ableitungen von  $f$  bis zum Grad  $m_i - 1$ , von denen es genau  $\binom{m_i+1}{2}$  gibt, müssen im Punkt  $p_i$  verschwinden.

Da uns die Dimension solcher Linearsysteme interessiert, wenden wir uns der Dimensionsfrage zu und definieren allgemein:

**Definition 2.5** Die *virtuelle Dimension* des Linearsystems  $L = \mathcal{L}_d (- \sum_{i=1}^n m_i p_i)$  ist definiert durch

$$v = \text{vdim}_L := \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i+1)}{2}.$$

Die *erwartete Dimension* des Linearsystems  $L = \mathcal{L}_d (- \sum_{i=1}^n m_i p_i)$  ist definiert durch

$$e = \text{edim}_L := \max \{-1, \text{vdim}_L\}.$$

**Bemerkung 2.6** Falls alle durch die Multiplizitäten geforderten Bedingungen linear unabhängig sind, stimmen die erwartete und die tatsächliche Dimension des Systems überein. Die Dimension des Linearsystems  $L = \mathcal{L}_d (- \sum_{i=1}^n m_i p_i)$  beträgt also mindestens  $\text{edim}_L$ . Im Allgemeinen kann die lineare Unabhängigkeit der Bedingungen aber nicht garantiert werden.

**Beispiel 2.7** Betrachte für  $d = n = 2, p_1, p_2 \in \mathbb{C}^2$  mit  $p_1 \neq p_2$  beliebig gewählt, das Linearsystem, welches durch die zwei Punkte mit Multiplizität 2 verläuft. Gesucht ist also ein Kegelschnitt, der durch zwei verschiedene Punkte jeweils mit Multiplizität 2

## 2 Grundlagen

verläuft. Dann beträgt die virtuelle Dimension:

$$\binom{d+2}{2} - 1 - \sum_{i=1}^2 m_i(m_i + 1) = 6 - 1 - 3 - 3 = -1.$$

Nach der Definition ist damit auch die erwartete Dimension  $-1$ , d.h. das System wird als leer erwartet, denn im Projektiven hat die leere Menge die Dimension  $-1$ .

Es sollte also keine solche Kurve vom Grad 2 existieren. Es gibt aber offensichtlich eine Gerade durch die zwei Punkte. Quadriert man ihre definierende Gleichung, erhält man ein Polynom vom Grad 2. Diese definiert eine Doppelgerade mit den geforderten Eigenschaften.

Obwohl also das System als leer erwartet wurde, ist es dennoch nicht leer.

**Definition 2.8** Wir nennen ein Linearsystem  $L = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^n m_i p_i)$  *speziell*, wenn die tatsächliche Dimension größer als die erwartete Dimension ist. Ist die tatsächliche gleich der erwarteten Dimension, heißt das System *nicht-speziell*.

Es stellt sich nun die Frage, wann ein Linearsystem die erwartete Dimension besitzt und in welchen Fällen man mit Abweichungen rechnen muss. Einen Hinweis für die Gründe für abweichende Dimensionen gibt die Wahl der Punkte, wie Beispiel 2.7 zeigt.

### 2.2 Punkte in allgemeiner Lage (siehe [Bar06], S. 4)

Damit das Linearsystem  $L = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^n m_i p_i)$  die kleinstmögliche Dimension besitzt, können wir die Punkte  $p_1, \dots, p_n$  nicht völlig beliebig wählen.

Um zu verstehen, was „nicht völlig beliebig“ bedeuten soll, betrachten wir folgende lineare Abbildung: Sei

$$\phi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d \rightarrow \mathbb{C}^t, \quad t = \sum_{i=1}^n \frac{m_i(m_i + 1)}{2}$$

die lineare Abbildung, die ein Polynom  $F$  und alle seine partiellen Ableitungen bis zum Grad  $m_i - 1$  in den Punkten  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  auswertet. Dann ist  $\ker \phi = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^n m_i p_i)$ . Die Abbildung  $\phi$  hat eine darstellende Matrix  $M(p_1, \dots, p_n)$  bezüglich der Basis der Monome in  $x_0, x_1$  und  $x_2$  vom Grad  $d$ , welche stetig von den Punkten  $p_1, \dots, p_n$  abhängt.

Definiere nun für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ : Sei

$$R_k := \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^2)^n \mid \text{Rang}(M(p_1, \dots, p_n)) \leq k\}$$

die Menge der  $n$ -Tupel  $(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^2)^n$ , für die die Matrix  $M(p_1, \dots, p_n)$  höchstens den Rang  $k$  hat.

Es gilt offensichtlich für alle  $k \in \mathbb{N}$ :  $R_{k-1} \subset R_k$  und für hinreichend großes  $k$  gilt:  $R_k = (\mathbb{P}^2)^n$ .

## 2 Grundlagen

Setze nun  $s := \min\{k \in \mathbb{N} \mid R_k = (\mathbb{P}^2)^n\}$ , so dass  $R_{s-1} \neq (\mathbb{P}^2)^n$  und  $R_s = (\mathbb{P}^2)^n$ .

Also hat für jedes  $n$ -Tupel  $(p_1, \dots, p_n) \in R_s \setminus R_{s-1}$  die Matrix  $M(p_1, \dots, p_n)$  den höchstmöglichen Rang und somit hat der Kern der Abbildung, also  $L = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^n m_i p_i)$ , die kleinstmögliche Dimension.

**Definition 2.9** Liegt ein  $n$ -Tupel  $(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^2)^n$  in  $R_s \setminus R_{s-1}$ , dann liegen die Punkte  $p_1, \dots, p_n$  in *allgemeiner Lage* bezüglich  $d$  und  $m_1, \dots, m_n$ .

**Bemerkung 2.10** Die Menge  $R_{s-1}$  ist eine algebraische Teilmenge von  $(\mathbb{P}^2)^n$ , da sie von den  $s \times s$ -Minoren der Matrix  $M$  von  $\phi$  ausgeschnitten wird. Damit ist die Dimension von  $R_{s-1}$  echt kleiner als  $2n$ , da  $(\mathbb{P}^2)^n$  irreduzibel ist. Das Komplement von  $R_{s-1}$  ist Zariski-offen, somit liegen Punkte in allgemeiner Lage in einer Zariski-offenen Menge.

Wenn alle Multiplizitäten, die ein Linearsystem erfüllen muß, 1 sind und die Punkte, durch die seine Kurven verlaufen, in allgemeiner Lage liegen, können wir in Anlehnung an [Mir99] eine Aussage über die erwartete Dimension machen:

**Theorem 2.11 (Multiplizitäts-Eins-Theorem, siehe [Mir99], S. 195)** Liegen die Punkte  $\{p_i\}$  in allgemeiner Lage, dann ist die Dimension von  $L = \mathcal{L}_d(-\sum_{i=1}^n p_i)$  gleich der erwarteten Dimension  $\text{edim}_L$ .  $\square$

### 2.3 Übergang von den projektiven zu den affinen Koordinaten

Wie wir bei der Berechnung der Dimension gesehen haben, vereinfacht es die Rechnungen in manchen Fällen, wenn man mit den affinen Koordinaten arbeitet. Deswegen schneiden wir Punkte außerhalb der unendlich fernen Geraden aus, d.h. Punkte mit  $x_2 \neq 0$ . Wie oben müssen wir dazu evtl. eine Koordinatentransformation durchführen. Im Affinen definieren wir dann allgemein über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit Charakteristik Null:

**Definition 2.12** Für paarweise verschiedene Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}^2$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{L}_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \subset \mathbb{K}[X, Y]$ :

$$\mathcal{L}_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) :=$$

$$\left\{ f = \sum_{\beta_1 + \beta_2 \leq d} c_{\beta_1, \beta_2} X^{\beta_1} Y^{\beta_2} \mid c_{\beta_1, \beta_2} \in \mathbb{K}, \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial X^{\alpha_1} \partial Y^{\alpha_2}}(p_j) = 0, \alpha_1 + \alpha_2 < m_j, j = 1, \dots, n \right\}$$

das *Linearsystem ebener Kurven vom Grad  $d$*  mit Multiplizität mindestens  $m_j$  in  $p_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

In Analogie zum Projektiven können wir wieder unsere Punkte  $p_1, \dots, p_n$  so wählen, dass das Linearsystem die kleinstmögliche Dimension besitzt. Diese Punkte bilden eine



## 2 Grundlagen

Zariski-offene Menge. Wir bezeichnen diese Punkte als Punkte in allgemeiner Lage und vereinfachen unsere Schreibweise folgendermaßen:

**Definition 2.13** Liegen die Punkte  $p_1, \dots, p_n$  in allgemeiner Lage bezüglich  $d$  und  $m_1, \dots, m_n$ , schreibt man auch kurz:  $\mathcal{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ .

Falls  $m_1 = \dots = m_n$  heißt das System *homogen* und wir bezeichnen es mit  $\mathcal{L}_d(m^{\times n})$ .

Nun folgt für die Dimensionen:

**Definition 2.14** Die *virtuelle Dimension* des Linearsystems  $L = \mathcal{L}_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$  ist definiert durch

$$v = \text{vdim}_L := \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{j=1}^n \frac{m_j(m_j+1)}{2}.$$

Die *erwartete Dimension* des Linearsystems  $L = \mathcal{L}_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$  ist definiert durch

$$e = \text{edim}_L := \max\{-1, \text{vdim}_L\}.$$

**Definition 2.15** Die *tatsächliche Dimension* des Linearsystems  $\mathcal{L}_d(m_1, \dots, m_n)$  beträgt:

$$\dim_{\mathcal{L}_d(m_1, \dots, m_n)} := \dim_{\mathcal{L}_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)}$$

für Punkte  $p_1, \dots, p_n$  in allgemeiner Lage bezüglich  $d$  und  $m_1, \dots, m_n$ .

**Bemerkung 2.16** Dumnicki beobachtete nun, dass sich die obigen Überlegungen übertragen lassen, wenn wir anstelle von Kurven, deren zugehörige Polynome alle Monome bis zum Grad  $d$  enthalten dürfen, nur solche betrachten, deren Polynome nur eine Teilmenge dieser Monome enthalten dürfen. Wir wählen solche Monome aus, deren Exponenten einer endlichen Teilmenge  $D \subset \mathbb{N}^2$  entstammen.

Dann können wir für das Linearsystem dieser Kurven definieren:

**Definition 2.17** Sei  $D \subset \mathbb{N}^2$  eine endliche Menge. Dann ist für paarweise verschiedene Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}^2$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) := \left\{ f = \sum_{(\beta_1, \beta_2) \in D} c_{(\beta_1, \beta_2)} X^{\beta_1} Y^{\beta_2} \mid c_{(\beta_1, \beta_2)} \in \mathbb{K}, \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial X^{\alpha_1} \partial Y^{\alpha_2}}(p_j) = 0, \alpha_1 + \alpha_2 < m_j, j = 1, \dots, n \right\}$$

das *Linearsystem ebener Kurven*, deren definierende Polynome nur Monome mit Exponenten aus  $D$  enthalten und die durch die Punkte  $p_j$  mit Multiplizität mindestens  $m_j$  verlaufen, für  $j = 1, \dots, n$ .

Analog schreibt man für Punkte  $p_1, \dots, p_n$  in allgemeiner Lage bezüglich  $D$  und  $m_1, \dots, m_n$ :

$$\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n).$$

## 2 Grundlagen

**Bemerkung 2.18** Die virtuelle Dimension eines solchen Linearsystems  $L = \mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$  beträgt dann:

$$\text{vdim}_L = \#D - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2}$$

und die erwartete Dimension beträgt:

$$\text{edim}_L = \max\{-1, \text{vdim}_L\}.$$

### 3 Diagrammausschneidemethode

Um die Diagrammausschneidemethode einführen zu können, führen wir dafür zunächst etwas Notation ein und erklären in der Sprache der Matrizen, wann ein System *nicht-spezial* ist.

**Definition 3.1** Sei  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ . Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_{j,\alpha} : \quad K[X, Y] &\longrightarrow \mathbb{K}[P_{j,X}, P_{j,Y}] \\ f &\longmapsto \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial X^{\alpha_1} \partial Y^{\alpha_2}}(P_{j,X}, P_{j,Y}). \end{aligned}$$

Diese Abbildung setzt die Variablen  $P_{j,X}, P_{j,Y}$  in die  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -te partielle Ableitung eines Polynoms ein.

Wir werden folgende Notation benutzen:  $\mathcal{M}(n, k; R)$  bezeichnet die Menge aller Matrizen mit  $n$  Zeilen,  $k$  Spalten und Koeffizienten aus  $R$  (ein Ring oder Körper).

Für ein  $M \in \mathcal{M}(n, k; R)$  schreiben wir  $M_{[j,l]}$  für das Element von  $M$  in der  $j$ -ten Zeile und der  $l$ -ten Spalte.

**Definition 3.2** Sei  $L = \mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  ein ebenes Linearsystem, sei

$$D := \{(\alpha_{1,X}, \alpha_{1,Y}), \dots, (\alpha_{n,X}, \alpha_{n,Y})\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Sei  $\mathcal{A} := \{(i, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2 \mid |\beta| < m_i, i = 1, \dots, r\} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_c\}$ .

Wir definieren die Matrix  $M(L) \in \mathcal{M}(c, n; \mathbb{K}[P_{i,X}, P_{i,Y}]_{i=1}^r)$  als

$$M(L)_{[j,k]} := \phi_{\mathbf{a}_j}(X^{\alpha_{k,X}} Y^{\alpha_{k,Y}}).$$

Die Matrix  $M(L)$  besitzt so viele Zeilen, wie das Linearsystem  $L$  an implizierten Bedingungen erfüllen muss, um die vorgeschriebenen Multiplizitäten  $m_i, i = 1, \dots, r$  in  $r$  Punkten zu erfüllen. Dies sind  $\sum_{i=1}^r \binom{m_i+1}{2}$  Bedingungen, zur Vereinfacherung wird diese Zahl mit  $c$  bezeichnet. Dabei sind die Zeilen so angeordnet, dass in den ersten Zeilen die Bedingungen berücksichtigt werden, die der erste Punkt, also  $p_1$ , an das Linearsystem stellt. Ist  $m_1 > 1$ , so sind die Einträge der ersten Zeile die ursprünglichen Monome der Basis, in die  $P_{1,X}$  und  $P_{1,Y}$  eingesetzt wurde. In der zweiten Zeile stehen die ersten partiellen Ableitungen nach der ersten Variablen, in der dritten die ersten partiellen Ableitungen nach der zweiten Variablen. In den nächsten Zeilen folgen die partiellen Ableitungen bis zum Grad  $m_1 - 1$ . Dabei stehen partielle Ableitungen gleicher Ordnung in lexikographischer Ordnung, d.h. zuerst leiten wir nur nach der ersten Variablen ab, dann leiten wir einmal weniger nach der ersten und einmal nach der zweiten Variablen ab, usw.. Beispielsweise wird  $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$  vor  $\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}$  vor  $\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}$  gebildet.

Der Punkt  $p_2$  bestimmt die Einträge der sich anschließenden Zeilen. In der oben beschriebenen Weise entstehen  $\binom{m_2+1}{2}$  Zeilen, die die Variablen  $P_{2,X}$  und  $P_{2,Y}$  enthalten.

### 3 Diagrammausschneidemethode

In analoger Weise werden die nächsten Punkte berücksichtigt, so dass der Punkt  $p_r$  die letzten Zeilen der Matrix beeinflusst.

Die Spaltenzahl der Matrix  $M(L)$  ist gleich  $n$ , der Elementanzahl von  $D$ , der Menge der Exponentenpaare für  $X$  und  $Y$ . Die Einträge der Matrix entstammen dem Polynomring  $\mathbb{K}[P_{i,X}, P_{i,Y}]_{i=1}^r$  in  $2r$  Variablen, durch die Umbenennung der Variablen  $X, Y$  in die Variablen  $P_{i,X}, P_{i,Y}$  ist die Anzahl der Variablen von der Zahl der Punkte abhängig.

**Beispiel 3.3** Wir betrachten als einfachen Fall das Linearsystem  $L = \mathcal{L}_D(m)$ , welches nur die Multiplizität in einem Punkt vorschreibt. Die Exponentenmenge sei wie oben  $D = \{(\alpha_{1,X}, \alpha_{1,Y}), \dots, (\alpha_{n,X}, \alpha_{n,Y})\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . In einem ersten Schritt betrachten wir die Matrix  $M'(L)$ , die entsteht, indem man zuerst nur die partiellen Ableitungen bestimmt:

$$\begin{pmatrix} X^{\alpha_{1,X}} Y^{\alpha_{1,Y}} & X^{\alpha_{2,X}} Y^{\alpha_{2,Y}} & \dots & X^{\alpha_{n,X}} Y^{\alpha_{n,Y}} \\ \frac{\partial}{\partial X}(X^{\alpha_{1,X}} Y^{\alpha_{1,Y}}) & \frac{\partial}{\partial X}(X^{\alpha_{2,X}} Y^{\alpha_{2,Y}}) & \dots & \frac{\partial}{\partial X}(X^{\alpha_{n,X}} Y^{\alpha_{n,Y}}) \\ \frac{\partial}{\partial Y}(X^{\alpha_{1,X}} Y^{\alpha_{1,Y}}) & \frac{\partial}{\partial Y}(X^{\alpha_{2,X}} Y^{\alpha_{2,Y}}) & \dots & \frac{\partial}{\partial Y}(X^{\alpha_{n,X}} Y^{\alpha_{n,Y}}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial X \partial Y^{m-2}}(X^{\alpha_{1,X}} Y^{\alpha_{1,Y}}) & \frac{\partial^{m-1}}{\partial X \partial Y^{m-2}}(X^{\alpha_{2,X}} Y^{\alpha_{2,Y}}) & \dots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial X \partial Y^{m-2}}(X^{\alpha_{n,X}} Y^{\alpha_{n,Y}}) \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial Y^{m-1}}(X^{\alpha_{1,X}} Y^{\alpha_{1,Y}}) & \frac{\partial^{m-1}}{\partial Y^{m-1}}(X^{\alpha_{2,X}} Y^{\alpha_{2,Y}}) & \dots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial Y^{m-1}}(X^{\alpha_{n,X}} Y^{\alpha_{n,Y}}) \end{pmatrix}.$$

In einem zweiten Schritt erfolgt dann die Substituierung von  $X, Y$  durch  $P_{1,X}, P_{1,Y}$ . Dann sieht die Matrix  $M(L)$  folgendermaßen aus, wobei ein Eintrag gleich Null ist, falls einer der Exponenten von  $P_{1,X}$  oder  $P_{1,Y}$  kleiner als Null wird. Denn dann leiten wir häufiger ab als der Grad des betreffenden Basismonoms beträgt und ein Koeffizient des Eintrages wird Null:

$$\begin{pmatrix} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}} & P_{1,X}^{\alpha_{2,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}} & \dots & P_{1,X}^{\alpha_{n,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}} \\ \alpha_{1,X} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}} & \alpha_{2,X} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}} & \dots & \alpha_{n,X} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}} \\ \alpha_{1,Y} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}-1} & \alpha_{2,Y} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}-1} & \dots & \alpha_{n,Y} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{1,Y} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}-(m-1)} & \alpha'_{2,Y} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}-(m-1)} & \dots & \alpha'_{n,Y} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}-(m-1)} \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha'_{1,Y} = \alpha_{1,Y} \cdots (\alpha_{1,Y} - (m-2)); \dots; \alpha'_{n,Y} = \alpha_{n,Y} \cdots (\alpha_{n,Y} - (m-2))$ .

Ein Eintrag der Matrix  $M(L)$  mit  $\beta = (\beta_X, \beta_Y)$ ,  $|\beta| < m$  wird also folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} M(L)_{[(1,\beta),j]} &= \phi_{(1,\beta)}(X^{\alpha_{j,X}} Y^{\alpha_{j,Y}}) \\ &= \prod_{k=1}^{\beta_X} (\alpha_{j,X} - k + 1) \cdot \prod_{k=1}^{\beta_Y} (\alpha_{j,Y} - k + 1) \cdot P_{1,X}^{\alpha_{j,X}-\beta_X} P_{1,Y}^{\alpha_{j,Y}-\beta_Y}. \end{aligned}$$

Der Zeilenindex  $(1, \beta)$ , ein Tripel, zeigt zunächst an, welcher Punkt des Linearsystems die Ableitungsvorschrift vorgibt, in unserem Fall der Punkt  $p_1$ . Die Vorschrift

### 3 Diagrammausschneidemethode

der partiellen Ableitung bestimmt  $(\beta_X, \beta_Y)$ . Der Spaltenindex  $j$  drückt aus, dass das Basismonom mit den Exponenten  $(\alpha_{j,X}, \alpha_{j,Y})$  partiell abgeleitet wird.

**Beispiel 3.4** In diesem Beispiel diskutieren wir nun das Linearsystem  $L = \mathcal{L}_D(3, 2)$  mit  $D = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ . Es enthält Kurven, deren Gleichungen nur Monome mit Exponenten aus  $D$  enthalten und die durch zwei Punkte mit den geforderten Vielfachheiten 3 und 2 verlaufen.

In den ersten Zeilen der Matrix  $M(L)$  müssen wir die Multiplizität 3 beachten und in den nächsten Zeilen die Multiplizität 2. Damit ist  $M'(L)$  von folgender Gestalt:

$$M'(L) = \begin{pmatrix} X^2Y^2 & X^2Y^3 & X^2Y^4 & X^2Y^5 & X^3Y^5 \\ 2XY^2 & 2XY^3 & 2XY^4 & 2XY^5 & 3X^2Y^5 \\ 2X^2Y & 3X^2Y^2 & 4X^2Y^3 & 5X^2Y^4 & 5X^3Y^4 \\ 2Y^2 & 2Y^3 & 2Y^4 & 2Y^5 & 6XY^5 \\ 4XY & 6XY^2 & 8XY^3 & 10XY^4 & 15X^2Y^4 \\ 2X^2 & 6X^2Y & 12X^2Y^2 & 20X^2Y^3 & 20X^3Y^3 \\ X^2Y^2 & X^2Y^3 & X^2Y^4 & X^2Y^5 & X^3Y^5 \\ 2XY^2 & 2XY^3 & 2XY^4 & 2XY^5 & 3X^2Y^5 \\ 2X^2Y & 3X^2Y^2 & 4X^2Y^3 & 5X^2Y^4 & 5X^3Y^4 \end{pmatrix}$$

Die ersten 6 Zeilen der Matrix werden durch den ersten Punkt bestimmt, die letzten 3 durch den zweiten, deswegen setzen wir in die ersten 6 Zeilen die Variablen  $P_{1,X}, P_{1,Y}$  ein, in die letzten die Variablen  $P_{2,X}, P_{2,Y}$  und erhalten:

$$M(L) = \begin{pmatrix} P_{1,X}^2 P_{1,Y}^2 & P_{1,X}^2 P_{1,Y}^3 & P_{1,X}^2 P_{1,Y}^4 & P_{1,X}^2 P_{1,Y}^5 & P_{1,X}^3 P_{1,Y}^5 \\ 2P_{1,X} P_{1,Y}^2 & 2P_{1,X} P_{1,Y}^3 & 2P_{1,X} P_{1,Y}^4 & 2P_{1,X} P_{1,Y}^5 & 3P_{1,X}^2 P_{1,Y}^5 \\ 2P_{1,X}^2 P_{1,Y} & 3P_{1,X}^2 P_{1,Y}^2 & 4P_{1,X}^2 P_{1,Y}^3 & 5P_{1,X}^2 P_{1,Y}^4 & 5P_{1,X}^3 P_{1,Y}^4 \\ 2P_{1,Y}^2 & 2P_{1,Y}^3 & 2P_{1,Y}^4 & 2P_{1,Y}^5 & 6P_{1,X} P_{1,Y}^5 \\ 4P_{1,X} P_{1,Y} & 6P_{1,X} P_{1,Y}^2 & 8P_{1,X} P_{1,Y}^3 & 10P_{1,X} P_{1,Y}^4 & 15P_{1,X}^2 P_{1,Y}^4 \\ 2P_{1,X}^2 & 6P_{1,X}^2 P_{1,Y} & 12P_{1,X}^2 P_{1,Y}^2 & 20P_{1,X}^2 P_{1,Y}^3 & 20P_{1,X}^3 P_{1,Y}^3 \\ P_{2,X}^2 P_{2,Y}^2 & P_{2,X}^2 P_{2,Y}^3 & P_{2,X}^2 P_{2,Y}^4 & P_{2,X}^2 P_{2,Y}^5 & P_{2,X}^3 P_{2,Y}^5 \\ 2P_{2,X} P_{2,Y}^2 & 2P_{2,X} P_{2,Y}^3 & 2P_{2,X} P_{2,Y}^4 & 2P_{2,X} P_{2,Y}^5 & 3P_{2,X}^2 P_{2,Y}^5 \\ 2P_{2,X}^2 P_{2,Y} & 3P_{2,X}^2 P_{2,Y}^2 & 4P_{2,X}^2 P_{2,Y}^3 & 5P_{2,X}^2 P_{2,Y}^4 & 5P_{2,X}^3 P_{2,Y}^4 \end{pmatrix}.$$

Für gegebene Punkte  $p_1 = (p_{1,X}, p_{1,Y}), \dots, p_r = (p_{r,X}, p_{r,Y}) \in \mathbb{K}^2$  benutzen wir die natürliche Auswertungsabbildung:

$$\begin{aligned} \nu_{p_1, \dots, p_r} : \quad \mathbb{K}[P_{i,X}, P_{i,Y}]_{i=1}^r &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f|_{P_{i,X} \mapsto p_{i,X}, P_{i,Y} \mapsto p_{i,Y}} \end{aligned}$$

indem wir einfach die Koordinaten der Punkte  $p_1$  bis  $p_r$  in die Variablen  $P_{1,X}, P_{1,Y}$  bis  $P_{r,X}, P_{r,Y}$  einsetzen.

### 3 Diagrammausschneidemethode

**Proposition 3.5** (siehe [Dum06], Prop. 9) Sei  $L = \mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  ein ebenes Linearsystem. Dann gilt:

$$\dim_L = \#D - \text{Rang}M(L) - 1.$$

*Beweis:* Seien  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{K}^2$  Punkte in allgemeiner Lage bezüglich  $D$  und  $m_1, \dots, m_r$ . Wir betrachten ein Element  $f$  des Linearsystems,

$$f = \sum_{(\alpha_X, \alpha_Y) \in D} c_{(\alpha_X, \alpha_Y)} X^{\alpha_X} Y^{\alpha_Y}.$$

Sei die Abbildung  $\Phi$  die Hintereinanderausführung der Abbildungen  $\phi$  und  $\nu$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}[X, Y] &\longrightarrow \mathbb{K}^c \\ f &\longmapsto (\nu_{p_1, \dots, p_r} \circ \phi_{\mathbf{a}_j}(f))_{j=1}^c. \end{aligned}$$

Es gilt:  $\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r) = \ker \Phi$ . Denn die geforderten Multiplizitäten in den Punkten  $p_1$  bis  $p_r$  zu haben, bedeutet, dass für jeden Punkt  $p_i$  alle Ableitungen bis zum Grad  $m_i - 1$  verschwinden. Aber die Abbildung  $\Phi$  berechnet ja gerade die partiellen Ableitungen aller Basiselemente bis zum Grad  $m_i - 1$  und wertet sie dann in den zugehörigen Punkten  $p_i$  aus, für  $i = 1, \dots, r$ . D.h. alle Elemente des Linearsystems  $\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r)$  werden auf die Null in  $\mathbb{K}^c$  abgebildet und jedes Element, das auf 0 abgebildet wird, liegt im Linearsystem.  $\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r)$  ist damit der Kern der Abbildung  $\Phi$ .

Bezeichnet  $M$  die Matrix von  $\Phi$  in den Basen  $\{(\alpha_{1,X}, \alpha_{1,Y}), \dots, (\alpha_{n,X}, \alpha_{n,Y})\}, \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_c\}$ , dann haben wir:

$$\nu_{p_1, \dots, p_r}(M(L)_{[j,k]}) = M_{[j,k]},$$

und damit  $\text{Rang}M(L) = \text{Rang}M$ . Jetzt können wir mithilfe der Linearen Algebra die Dimension von  $L$  berechnen

$$\dim_L = n - \text{Rang}M - 1 = \#D - \text{Rang}M(L) - 1.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Definition 3.6** Der Bigrad eines Monoms  $g = P_{1,X}^{\alpha_{1,X}} \dots P_{n,X}^{\alpha_{n,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}} \dots P_{n,Y}^{\alpha_{n,Y}}$  ist gegeben durch:

$$\text{bdeg}(g) = \sum_{i=1}^n (\alpha_{i,X}, \alpha_{i,Y})$$

**Beispiel 3.7** Der Bigrad des Monoms  $f = 5P_{3,X}^4 P_{1,Y}^2 P_{2,Y}^3$  beträgt dann:  $\text{bdeg}(f) = (4, 5)$ .

### 3 Diagrammausschneidemethode

**Proposition 3.8** (siehe [Dum06], Prop.11) Sei  $L = \mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  ein ebenes Linearsystem. Sei  $M$  eine quadratische Untermatrix von  $M(L)$  der Größe  $s \in \mathbb{N}^*$ . Falls die Spalten von  $M$  durch die Exponentenpaare  $(\alpha_{1,X}, \alpha_{1,Y}), \dots, (\alpha_{s,X}, \alpha_{s,Y})$  gegeben sind und die Zeilen durch die Tripel  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ , ist  $\det M$  ein bezüglich des Bigrads bihomogenes Polynom vom Bigrad  $(\sum_{i=1}^s \alpha_{i,X}, \sum_{i=1}^s \alpha_{i,Y}) - \gamma$ , wobei  $\gamma \in \mathbb{N}^2$  nur von den  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$  und damit der Wahl der Zeilen abhängt.

*Beweis:* Es gilt:

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_s} \text{sign}(\sigma) M_{[1, \sigma(1)]} \cdots M_{[s, \sigma(s)]}.$$

Für jeden Eintrag  $M_{[j,k]} \neq 0$  beträgt der Bigrad  $\text{bdeg} M_{[j,k]} = (\alpha_{k,X}, \alpha_{k,Y}) - \beta_j$ , wobei  $\beta_j$  nur von der Zeilennummer abhängig ist. Dies folgt daraus, dass die Spaltennummer ausschlaggebend für die ursprünglichen Exponenten der Variablen  $X, Y$  ist, von denen dann noch beim Bilden der Ableitungen eine natürliche Zahl abgezogen wird. Diese Zahl  $\beta_j$  ist nur abhängig von der Zeilennummer, die ja für die ganze Zeile dieselbe Ableitungsvorschrift vorgibt.

Nach Definition sind alle nichtverschwindenden Einträge von  $M(L)$  Monome oder Konstanten, denn jeder Eintrag ist von der Gestalt  $M(L)_{[j,k]} = \phi_{\mathbf{a}_j}(X^{\alpha_{k,X}} Y^{\alpha_{k,Y}})$ , eine Ableitung bestimmter Ordnung eines Monoms. Also ist auch das Produkt  $M_{[1, \sigma(1)]} \cdots M_{[s, \sigma(s)]}$  als Produkt dieser Ableitungen wieder ein Monom, eine Konstante oder Null und für den Bigrad gilt dann (falls kein  $M_{[j,k]} = 0$ )

$$\text{bdeg} M_{[1, \sigma(1)]} \cdots M_{[s, \sigma(s)]} = \left( \sum_{i=1}^s \alpha_{i,X}, \sum_{i=1}^s \alpha_{i,Y} \right) - \sum_{i=1}^s \beta_i.$$

Damit ist der Bigrad für jedes Produkt dieser Art identisch oder gleich Null, da man in der Berechnung nur über die Zeilen  $i = 1, \dots, s$  aufsummiert und damit der Wert nur von der Wahl der Zeilen abhängt. Diese Zeilenvorgabe ist aber bei allen Ausdrücken gleich.

$\det M$  als Summe dieser Produkte ist dann ebenfalls ein Monom und für seinen Bigrad gilt:

$$\text{bdeg}(\det M) = \left( \sum_{i=1}^s \alpha_{i,X}, \sum_{i=1}^s \alpha_{i,Y} \right) - \sum_{i=1}^s \beta_i.$$

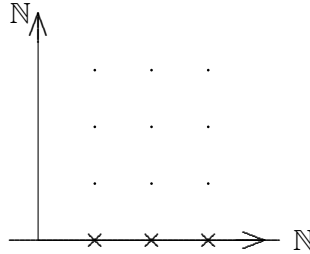
Der Beweis ist beendet mit  $\gamma = \sum_{i=1}^s \beta_i$  und dieses  $\gamma$  ist nur allein von den  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$  und damit von der Wahl der Zeilen abhängig.  $\square$

**Proposition 3.9** (siehe [Dum06], Prop. 12) Sei  $m \in \mathbb{N}, D \subset \mathbb{N}^2, \#D = \binom{m+1}{2}$ . Genau dann ist  $L = \mathcal{L}_D(m)$  *nicht-spezial*, falls  $D$  nicht auf einer Kurve vom Grad  $m - 1$  liegt.

**Beispiel 3.10** Wir betrachten den einfachen Fall  $m = 2$ . Sei  $D = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$ . Es gilt damit:  $\#D = \binom{3}{2} = 3$ . Die virtuelle Dimension von  $\mathcal{L}_D(2)$  errechnet sich als

### 3 Diagrammausschneidemethode

$\text{vdim}_{\mathcal{L}_D(2)} = 3 - 1 - 3 = -1$ . Also ist die erwartete Dimension  $-1$ , das Linearsystem sollte somit leer sein, wenn die Elemente aus  $D$  nicht auf einer Kurve vom Grad  $2-1 = 1$ , d.h. auf einer Geraden liegen. Zeichnet man die Exponenten der Elemente aus  $D$  in die Koordinatenebene ein, sieht man sofort, dass sie auf einer Geraden liegen:



Das System ist damit speziell, es ist nicht leer. Dies kann man auch daran sehen, dass die Abbildungsmatrix

$$\phi : \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

niemals vollen Rang besitzt, da ihre Determinante immer gleich 0 ist. Also berechnet sich die Dimension von  $L$  nach Proposition 3.5 folgendermaßen:  $\dim_L = 3 - 2 - 1 = 0$ , und  $\mathcal{L}_D(2)$  ist also speziell.

*Beweis von Prop. 3.9:* Die virtuelle Dimension von  $L = \mathcal{L}_D(m)$  berechnet sich folgendermaßen:

$$\text{vdim}_L = \#D - 1 - \binom{m+1}{2} = \binom{m+1}{2} - 1 - \binom{m+1}{2} = -1.$$

Damit entspricht die erwartete der virtuellen Dimension. Sei  $p \in \mathbb{K}^2$  ein Punkt in allgemeiner Lage bezüglich  $D$  und  $m$ . Dann liefert uns die Formel aus Proposition 3.5 die tatsächliche Dimension:  $\dim_L = \#D - \text{Rang}M(L) - 1$ . Wenn nun  $L$  nicht-spezial ist, muß die tatsächliche der erwarteten Dimension entsprechen,  $\dim_L$  muß  $-1$  betragen. Dies ist dann der Fall, wenn der Rang von  $M(L) = \#D = \binom{m+1}{2}$  ist.

$M$  ist nach Voraussetzung eine quadratische Matrix der Größe  $\binom{m+1}{2}$ . Dies ergibt sich daraus, dass das Linearsystem nur die Multiplizität  $m$  in einem Punkt erfüllen muß, die Zeilenanzahl ist also  $\binom{m+1}{2}$ . Die Anzahl der Spalten ist gleich der Elementanzahl von  $D$ , also auch  $\binom{m+1}{2}$ . Wenn das System nicht-spezial ist, muß die Matrix damit vollen Rang besitzen und wir brauchen nur seine Determinante zu betrachten. Wenn diese nicht verschwindet, ist  $L$  nicht-spezial.

Aus dem Beweis zu Proposition 3.8 kann man sehen, dass  $\det M(L)$  ein bihomogenes Polynom ist. Da die Kurven unseres Linearsystems  $L$  nur durch einen Punkt mit geforderter Multiplizität verlaufen, enthält die Determinante nur die Variablen  $P_{1,X}$  und



### 3 Diagrammausschneidemethode

$P_{1,Y}$ . Damit ergibt sich, dass die Determinante sogar ein Monom ist,  $\det M(L) = c \cdot f$ , wobei  $f$  ein Monom ist,  $c \in K$ .

Sei nun  $D = \{(\alpha_{1,X}, \alpha_{1,Y}), \dots, (\alpha_{n,X}, \alpha_{n,Y})\}$ ,  $n = \binom{m+1}{2}$ .

Wie wir oben gesehen haben, wird für  $\beta = (\beta_X, \beta_Y)$ ,  $|\beta| < m$  jeder Eintrag der Matrix  $M(L)$  so berechnet:

$$\begin{aligned} M(L)_{[(1,\beta),j]} &= \phi_{(1,\beta)}(X^{\alpha_{j,X}} Y^{\alpha_{j,Y}}) \\ &= \prod_{k=1}^{\beta_X} (\alpha_{j,X} - k + 1) \cdot \prod_{k=1}^{\beta_Y} (\alpha_{j,Y} - k + 1) \cdot P_{1,X}^{\alpha_{j,X} - \beta_X} P_{1,Y}^{\alpha_{j,Y} - \beta_Y}. \end{aligned}$$

Also sieht die Matrix  $M(L)$  folgendermaßen aus:

$$\left( \begin{array}{cccc} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}} & P_{1,X}^{\alpha_{2,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}} & \cdots & P_{1,X}^{\alpha_{n,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}} \\ \alpha_{1,X} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}} & \alpha_{2,X} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}} & \cdots & \alpha_{n,X} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}} \\ \alpha_{1,Y} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}-1} & \alpha_{2,Y} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}-1} & \cdots & \alpha_{n,Y} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}-1} \\ \alpha'_{1,X} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}-2} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}} & \alpha'_{2,X} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}-2} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}} & \cdots & \alpha'_{n,X} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}-2} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}} \\ \alpha_{1,X} \alpha_{1,Y} P_{1,X}^{\alpha_{1,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{1,Y}-1} & \alpha_{2,X} \alpha_{2,Y} P_{1,X}^{\alpha_{2,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{2,Y}-1} & \cdots & \alpha_{n,X} \alpha_{n,Y} P_{1,X}^{\alpha_{n,X}-1} P_{1,Y}^{\alpha_{n,Y}-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right)$$

mit  $\alpha'_{1,X} = \alpha_{1,X}(\alpha_{1,X} - 1), \dots, \alpha'_{n,X} = \alpha_{n,X}(\alpha_{n,X} - 1)$ .

Da wir uns nur für den Wert von  $c$  interessieren, vereinfachen wir die Rechnung, indem wir die Determinante von  $M = M(L)_{P_{1,X} \mapsto 1, P_{1,Y} \mapsto 1}$  berechnen. Dann hat  $M$  folgende Gestalt:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_{1,X} & \alpha_{2,X} & \cdots & \alpha_{n,X} \\ \alpha_{1,Y} & \alpha_{2,Y} & \cdots & \alpha_{n,Y} \\ \alpha_{1,X}(\alpha_{1,X} - 1) & \alpha_{2,X}(\alpha_{2,X} - 1) & \cdots & \alpha_{n,X}(\alpha_{n,X} - 1) \\ \alpha_{1,X} \alpha_{1,Y} & \alpha_{2,X} \alpha_{2,Y} & \cdots & \alpha_{n,X} \alpha_{n,Y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,Y} \cdots (\alpha_{1,Y} - (m-2)) & \alpha_{2,Y} \cdots (\alpha_{2,Y} - (m-2)) & \cdots & \alpha_{n,Y} \cdots (\alpha_{n,Y} - (m-2)) \end{array} \right).$$

Durch eine geeignete Folge von Zeilenumformungen, z.B. addiert man zur vierten Zeile die zweite hinzu, usw., kann man die Matrix  $M$  in die folgende Matrix  $M'$  umwandeln:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_{1,X} & \alpha_{2,X} & \cdots & \alpha_{n,X} \\ \alpha_{1,Y} & \alpha_{2,Y} & \cdots & \alpha_{n,Y} \\ \alpha_{1,X}^2 & \alpha_{2,X}^2 & \cdots & \alpha_{n,X}^2 \\ \alpha_{1,X} \alpha_{1,Y} & \alpha_{2,X} \alpha_{2,Y} & \cdots & \alpha_{n,X} \alpha_{n,Y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,Y}^{m-1} & \alpha_{2,Y}^{m-1} & \cdots & \alpha_{n,Y}^{m-1} \end{array} \right)$$

### 3 Diagrammausschneidemethode

In der Matrix  $M'$  sind also die Einträge von der Gestalt:  $M'_{[(1,\beta),j]} = \alpha_{j,X}^{\beta_X} \alpha_{j,Y}^{\beta_Y}$  und es gilt:  $\det M \neq 0 \Leftrightarrow \det M' \neq 0$ .

Genau dann ist  $\det M' = 0$ , wenn die Zeilen von  $M'$  linear abhängig sind, d.h. wenn es eine nichttriviale Darstellung der Null gibt:

$$(\lambda_{(0,0)}, \dots, \lambda_{(0,m-1)}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{1,X} & \alpha_{2,X} & \dots & \alpha_{n,X} \\ \alpha_{1,Y} & \alpha_{2,Y} & \dots & \alpha_{n,Y} \\ \alpha_{1,X}^2 & \alpha_{2,X}^2 & \dots & \alpha_{n,X}^2 \\ \alpha_{1,X}\alpha_{1,Y} & \alpha_{2,X}\alpha_{2,Y} & \dots & \alpha_{n,X}\alpha_{n,Y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,Y}^{m-1} & \alpha_{2,Y}^{m-1} & \dots & \alpha_{n,Y}^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anders ausgedrückt: alle Elemente aus  $D$  müssen Nullstelle des Polynoms vom Grad  $m - 1$  in zwei Variablen:  $\lambda_{(0,0)} + \lambda_{(1,0)}x + \dots + \lambda_{(0,m-1)}y^{m-1}$  sein. Dies ist dann der Fall, wenn die Elemente aus  $D$  auf einer Kurve vom Grad  $m - 1$  liegen, und nur wenn die Elemente aus  $D$  auf einer Kurve vom Grad  $m - 1$  liegen, sind die Zeilen von  $M'$  linear abhängig und  $\det M'$  ist Null.

Also ist das System nicht-spezial genau dann, wenn die Element aus  $D$  nicht auf einer Kurve vom Grad  $m - 1$  liegen.  $\square$

#### **Theorem 3.11 (Diagrammausschneidemethode, siehe [Dum06], Theorem 13)**

Sei  $m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$ ,  $D \subset \mathbb{N}^2$  ein Diagramm, sei

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\longmapsto r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + r_0 \end{aligned}$$

eine affine Funktion,  $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ . Sei

$$D_1 := \{(\alpha_1, \alpha_2) \in D \mid F(\alpha_1, \alpha_2) < 0\}$$

$$D_2 := \{(\alpha_1, \alpha_2) \in D \mid F(\alpha_1, \alpha_2) > 0\}.$$

Dabei soll kein Punkt von  $D$  auf der Hyperebene  $F = 0$  liegen, was impliziert:

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Ist  $L_2 = \mathcal{L}_{D_2}(m_{r+1}, \dots, m_p)$  nicht-spezial und  $\text{vdim}_{L_2} = -1$ , dann ist

$$\dim_{\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_p)} \leq \dim_{\mathcal{L}_{D_1}(m_1, \dots, m_r)}.$$

*Beweis:* Setze  $L_1 := \mathcal{L}_{D_1}(m_1, \dots, m_r)$ ,  $L := \mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_p)$ .

Für den Beweis betrachten wir Punkte  $p_1, \dots, p_p$  in allgemeiner Lage bezüglich  $D$  und  $m_1, \dots, m_p$ , wobei auch jeweils die Punkte  $p_1, \dots, p_r$  bezüglich  $D_1$  und  $m_1, \dots, m_r$  und

### 3 Diagrammausschneidemethode

die Punkte  $p_{r+1}, \dots, p_p$  bezüglich  $D_2$  und  $m_{r+1}, \dots, m_p$  in allgemeiner Lage sind. Dies ist möglich, da Punkte in allgemeiner Lage in einer nicht-leeren Zariski-offenen Menge liegen, der Schnitt zweier nicht-leerer Zariski-offener Mengen ist nie leer. Nun liefert uns die Rechnung  $\dim_L = \#D - \text{Rang}M(L) - 1$  aus Proposition 3.5 die tatsächliche Dimension des Gesamtsystems  $L$ . Da  $D = D_1 \cup D_2$ , ist die Matrix von  $M(L)$  in einer geeigneten Basis von der folgenden Form:

$$M(L) = \begin{bmatrix} M(L_1) & K_1 \\ K_2 & M(L_2) \end{bmatrix}.$$

In der Matrix  $M(L_1)$  entspricht die Anzahl der Spalten der Elementanzahl in  $D_1$  und die Anzahl der Zeilen ist  $\sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$ , gleich der Anzahl der durch die Multiplizitäten geforderten Bedingungen. Wir betrachten die Minoren von  $M(L_1)$  und wählen einen maximalen nicht verschwindenden Minor aus. Die zugehörige quadratische Untermatrix von  $M(L)$  nennen wir  $M'$ . Die die Spalten bestimmenden Exponentenpaare fassen wir in der Menge  $D' \subset D$  zusammen.

Die Matrix  $M(L_2)$  ist eine quadratische Matrix der Größe  $\sum_{i=r+1}^p \binom{m_i+1}{2}$  mit vollem Rang. Dies folgt aus den zwei Voraussetzungen, zum einen beträgt die virtuelle Dimension  $-1$ ,  $\text{vdim}_{L_2} = \#D_2 - 1 - \sum_{i=r+1}^p \binom{m_i+1}{2} = -1$ . Dies bedeutet, dass die Anzahl der Elemente von  $D_2$  gleich  $\sum_{i=r+1}^p \binom{m_i+1}{2}$  ist. Damit muss die Matrix quadratisch sein, die Anzahl ihrer Zeilen ist gleich der Zahl der implizierten Bedingungen, nämlich  $\sum_{i=r+1}^p \binom{m_i+1}{2}$  und ihre Spaltenzahl ist die Anzahl der Elemente von  $D_2$ , also wie gerade berechnet der gleiche Wert.

Zweitens muss wegen der Nicht-Speziellheit von  $L_2$  auch die tatsächliche Dimension  $-1$  betragen,  $\dim_L = \#D_2 - \text{Rang}M(L_2) - 1 = -1$ . Der Rang von  $M(L_2)$  ist also gleich der Elementanzahl in  $D_2$ ,  $\sum_{i=r+1}^p \binom{m_i+1}{2}$ , damit hat die Matrix  $M(L_2)$  vollen Rang. Man erhält so die folgende quadratische Untermatrix von  $M(L)$ :

$$M = \begin{bmatrix} M' & K'_1 \\ K'_2 & M(L_2) \end{bmatrix},$$

wobei  $K'_1$  und  $K'_2$  geeignete Untermatrizen von  $K_1$  und  $K_2$  sind.

Es gilt nun:  $\text{Rang}M(L) \geq \text{Rang}M$ . Wir wollen nun zeigen, dass die Determinante von  $M$  nicht verschwindet, also  $M$  vollen Rang besitzt. Denn dann ergibt sich für die Dimension des Gesamtsystems :

$$\begin{aligned} \dim_L &= \#D - \text{Rang}M(L) - 1 \\ &\leq \#D - \text{Rang}M - 1 \\ &\leq \#D_1 + \#D_2 - (\text{Rang}M' + \text{Rang}M(L_2)) - 1 \\ &= \#D_1 + \#D_2 - (\text{Rang}M' - \#D_2) - 1 \\ &= \#D_1 - \text{Rang}M' - 1 \\ &= \dim_{L_1} \end{aligned}$$

### 3 Diagrammausschneidemethode

Also ist die Dimension von  $L$  höchstens so groß ist wie die von  $L_1$  und damit gilt die Behauptung.

*Beweis von  $\det(M) \neq 0$ :* Für  $D' := D'_1 \cup D_2$  seien  $U = [M' \quad K'_1]$ ,  $T = [K'_2 \quad M(L_2)]$  die Untermatrizen von  $M$ , sei

$$\mathcal{C} := \{C \subset D' \mid \#C = \#D_2\}.$$

Für  $C \in \mathcal{C}$  definieren wir  $T_C$  (beziehungsweise  $U_C$ ) als die Untermatrix von  $T$  (beziehungsweise  $U$ ), die durch die Spalten gegeben ist, welche als Indizes die Elemente aus  $C$  tragen. Die Zeilenindizes sind für  $T$  durch die Punkte des Linearsystems  $L_2$  und ihre Multiplizitäten gegeben, die Zeilenindizes von  $U$  durch die Punkte aus  $L_1$  und ihre Multiplizitäten.

Die Untermatrizen  $T_C$  und  $U_{D' \setminus C}$  sind jeweils quadratisch, denn die Zeilenanzahl in  $T$  beträgt  $\#C = \#D_2$  und die in  $U$  ist dann gleich der restlichen Elementanzahl von  $D'$ , also gleich der Spaltenanzahl von  $U$ . Deswegen können wir nun die Determinante von  $M$  folgendermaßen berechnen, indem wir über die Zeilen entwickeln, deren Indizes durch die Punkte  $p_{r+1}, \dots, p_p$  bedingt sind:<sup>2</sup>

$$\det M = \sum_{C \in \mathcal{C}} \epsilon(C) \det T_C \det U_{D' \setminus C},$$

für  $\epsilon(C) = \pm 1$ . Wir stellen fest, dass  $\det T_C \in \mathbb{K}[P_{r+1,X}, P_{r+1,Y}, \dots, P_{p,X}, P_{p,Y}]$ ,  $\det U_{D' \setminus C} \in \mathbb{K}[P_{1,X}, P_{1,Y}, \dots, P_{r,X}, P_{r,Y}]$ , denn die Zeilenindizes sind ausschlaggebend für die Umbenennung der Variablen  $X, Y$  in die neuen Variablen  $P_{i,X}, P_{i,Y}$ , also lauten die Variablen in  $U$ :  $P_{1,X}, P_{1,Y}, \dots, P_{r,X}, P_{r,Y}$  und in  $T$ :  $P_{r+1,X}, P_{r+1,Y}, \dots, P_{p,X}, P_{p,Y}$ . Wir betrachten jetzt  $\det M$  als ein Polynom in den Variablen  $\{P_{l,X}, P_{l,Y}\}_{l>r}$  über  $\mathbb{K}[\{P_{l,X}, P_{l,Y}\}_{l \leq r}]$ . Dabei müssen wir beachten, dass nach Proposition 3.8  $\det T_C$  und  $\det U_{D' \setminus C}$  bihomogene Polynome sind, die jeweils Monome vom selben Bigrad enthalten. Es gilt

$$\det M = \pm \det M' \det M(L_2) + f,$$

mit

$$f = \sum_{C \in \mathcal{C}, C \neq D_2} \epsilon(C) \det T_C \det U_{D' \setminus C}.$$

Angenommen,  $\det M = 0$ . Wegen der Voraussetzungen gilt nun  $\det M' \neq 0$  und  $\det M(L_2) \neq 0$ , wobei  $\det M'$  und  $\det M(L_2)$  jeweils bihomogene Polynome sind, welche jeweils mindestens ein Monom enthalten. Also enthält das Produkt  $\det M' \det M(L_2)$  mindestens ein Monom und um dieses aufzuheben, muß es einen Term  $g \in \mathbb{K}[\{P_{l,X}, P_{l,Y}\}_{l>r}]$  ungleich Null in  $f$  geben mit  $g = g_1 g_2$ , wobei  $g_1$  Monom in  $\mathbb{K}[\{P_{l,X}, P_{l,Y}\}_{l \leq r}]$  und  $g_2$  Monom in  $\mathbb{K}[\{P_{l,X}, P_{l,Y}\}_{l>r}]$  ist, mit

---

<sup>2</sup>Laplace'scher Entwicklungssatz, siehe Anhang A

### 3 Diagrammausschneidemethode

$\text{bdeg}(g_2) = \text{bdeg}(\det M(L_2))$ . Das Monom  $g_2$  ist gegeben als Summand von  $\det T_C$  für ein  $C \in \mathcal{C}, C \neq D_2$ . Es gilt

$$\text{bdeg}(g_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} (\alpha_1, \alpha_2) - \gamma, \quad \text{bdeg}(\det M(L_2)) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} (\alpha_1, \alpha_2) - \gamma,$$

wobei  $\gamma \in \mathbb{N}^2$  wegen der Proposition 3.8 für beide Ausdrücke identisch ist, denn wir haben jeweils dieselben Zeilen gewählt.

Daraus folgt, dass

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} (\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} (\alpha_1, \alpha_2).$$

Wenden wir unsere affine Funktion  $F$  auf die zwei Summen an, folgt:

$$F\left(\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} (\alpha_1, \alpha_2)\right) = F\left(\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} (\alpha_1, \alpha_2)\right).$$

Da  $F$  eine affine Form ist, gilt

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} (\alpha_1, \alpha_2)\right) &= r_1 \cdot \sum_{\alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2) \in C} \alpha_1 + r_2 \cdot \sum_{\alpha_2, (\alpha_1, \alpha_2) \in C} \alpha_2 + r_0 \\ &= \sum_{\alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2) \in C} r_1 \cdot \alpha_1 + \sum_{\alpha_2, (\alpha_1, \alpha_2) \in C} r_2 \cdot \alpha_2 + r_0 \\ &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} F(\alpha_1, \alpha_2) - (\#C - 1) \cdot r_0 \end{aligned}$$

und

$$F\left(\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} (\alpha_1, \alpha_2)\right) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} F(\alpha_1, \alpha_2) - (\#D_2 - 1) \cdot r_0.$$

Da nach Konstruktion  $\#C = \#D_2$ , folgt also

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} F(\alpha_1, \alpha_2).$$

Untersucht man nun die Elemente von  $C$  darauf, ob sie in  $F$  eingesetzt positive oder negative Werte ergeben, kann man folgende Differenzierung vornehmen:

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C} F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C \cap D_2} F(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C \setminus D_2} F(\alpha_1, \alpha_2),$$

wobei nach Definition die Elemente aus  $D_2$  positive Funktionswerte und die Elemente, die nicht in  $D_2$  liegen, negative Funktionswerte in  $F$  besitzen.

Es muss also gelten

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C \cap D_2} F(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in C \setminus D_2} F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} (\alpha_1, \alpha_2).$$

### 3 Diagrammausschneidemethode

Die Summe der positiven Funktionswerte für die Elemente aus  $D_2$  muss damit einer Summe aus einem Teil dieser positiven und einer Reihe negativer Werte entsprechen, wobei die Anzahl der Werte identisch ist. Dies ist nur möglich, wenn es keine negativen Funktionswerte gibt und  $C$  alle Elemente aus  $D_2$  enthält, d.h. wenn  $C = D_2$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von  $C$ ! Also gibt es kein Monom in  $f$  mit demselben Bigrad wie  $\det M(L_2)$ , die Determinante von  $M$  ist nicht das Nullpolynom.

Somit ist gezeigt, dass es Punkte in allgemeiner Lage gibt, für die die Determinante von  $M$  nicht Null werden kann, die Dimension von  $L$  wird damit maximal so groß wie die Dimension von  $L_1$ . Also ist die Behauptung bewiesen.

□

## 4 Reduktionsalgorithmus

**Definition 4.1** Sei  $D \subset \mathbb{N}^2$  eine endliche Menge. Das Linearsystem  $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  genügt einem *Reduktionsalgorithmus*, wenn eine Sequenz von Mengen

$$D = D_r \supset \dots \supset D_0 \quad \text{existiert, so dass}$$

1.  $\#D_j - \#D_{j-1} \leq \binom{m_j+1}{2}, j = 1, \dots, r,$
2. das System  $\mathcal{L}_{D_j \setminus D_{j-1}}(m_j)$  ist nicht-spezial für  $j = 1, \dots, r,$
3. falls  $P \subset D_j$  die Bedingung  $\#P = \#D_j - \#D_{j-1}$  erfüllt und wenn

$$\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_j \setminus D_{j-1}} \alpha$$

gilt, dann ist  $\mathcal{L}_P(m_j)$  speziell für  $j = 1, \dots, r$

4.  $\#D_0 - 1 \leq \text{edim} \mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r).$

**Lemma 4.2** Sei  $D \subset \mathbb{N}^2$  eine endliche Menge. Seien  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ . Seien

$$\begin{aligned} F_i : \quad \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\longmapsto r_{i1}\alpha_1 + r_{i2}\alpha_2 + \alpha_0, \quad r_{i0}, r_{i1}, r_{i2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

affine Funktionen,  $i = 1, \dots, r$ . Seien

$$\begin{aligned} D &:= D_r, \\ D_{r-i} &:= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_{r-i+1} \mid F_i(\alpha_1, \alpha_2) < 0\}, \\ D_r \setminus D_{r-i} &:= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_{r-i+1} \mid F_i(\alpha_1, \alpha_2) > 0\}, \end{aligned}$$

so dass  $\mathcal{L}_{D_j \setminus D_{j-i}}(m_j)$  nicht-spezial ist für  $j = 1, \dots, r$  mit virtueller Dimension von  $-1$ . Dann ist  $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  nicht-spezial.

*Beweis:* Das Lemma erfüllt alle Voraussetzungen der Diagrammausschneidemethode. Das Linearsystem  $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  wird schrittweise verkleinert, indem wir jeweils ein nicht-speziales System abschneiden, das die Multiplizität in einem Punkt erfüllt. Zuerst schneiden wir mithilfe der Geraden  $F_1$  das System  $D_r \setminus D_{r-1}(m_r)$  ab, übrig bleibt das System  $\mathcal{L}_{D_{r-1}}(m_1, \dots, m_{r-1})$ . Dann reduzieren wir das System durch Abschneiden mittels der Geraden  $F_2$  und erhalten  $\mathcal{L}_{D_{r-2}}(m_1, \dots, m_{r-2})$ . Diesen Vorgang setzen wir solange fort, bis keine Multiplizitätsbedingung mehr an das System gestellt wird.

Damit haben wir  $r$ -mal die Diagrammausschneidemethode angewendet, nach Theorem 3.11 ist dann  $\dim \mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r) \leq \dim \mathcal{L}_{D_0}$  erfüllt. Die Dimension von  $\mathcal{L}_{D_0}$  beträgt  $\#D - \sum_{i=1}^r \binom{m_i+1}{2} - 1$ , ist also gleich der virtuellen Dimension des Gesamtsystems. Das System  $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  ist damit nicht-spezial, da die tatsächliche nicht kleiner als die virtuelle Dimension werden kann, sie entspricht der erwarteten Dimension.  $\square$

#### 4 Reduktionsalgorithmus

**Lemma 4.3** Unter denselben Voraussetzungen wie im Lemma 4.3 genügt  $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_r)$  einem Reduktionsalgorithmus bezüglich der Mengensequenz

$$D = D_r \supset \dots \supset D_0.$$

*Beweis:* Zu zeigen ist, dass die Vorgehensweise in der Diagrammausschneidemethode, wie sie in Lemma 4.3 formuliert wurde, alle 4 geforderten Kriterien des Reduktionsalgorithmus erfüllt.

Die erste Bedingung des Reduktionsalgorithmus besagt, dass jeweils die Basis der Systeme um maximal  $\binom{m_j+1}{2}$  Elemente reduziert werden soll für  $j = 1, \dots, r$ . Es werden damit höchstens soviele Elemente abgeschnitten, wie durch die Forderung, Multiplizität  $m_j$  in einem Punkt zu erfüllen, an Bedingungen impliziert werden. Die Diagrammausschneidemethode ist hier strenger, sie schneidet genau  $\binom{m_j+1}{2}$  Elemente ab. Dieses erreicht sie dadurch, dass die abzuschneidenden Systeme  $L_{D_j \setminus D_{j-i}}(m_j)$  die virtuelle Dimension von  $-1$  haben müssen. Dies besagt, dass die Anzahl der Elemente in  $D_j \setminus D_{j-i}$  gleich  $\binom{m_i+1}{2}$  ist für  $j = 1, \dots, r$ .

Der Reduktionsalgorithmus fordert als zweite Bedingung die Nicht-Speziellheit der abzuschneidenden Systeme, deren Nicht-Speziellheit ist auch in der Diagrammausschneidemethode Voraussetzung.

Die Diagrammausschneidemethode erfüllt die dritte Bedingung des Reduktionsalgorithmus deswegen, da sie die zu eliminierenden Elemente durch eine affine Gerade abschneidet. Diese Vorgehensweise garantiert uns, dass es keine weitere Teilmenge der Exponentenmenge  $P \subset D_j$  mit derselben Elementanzahl, also  $\#P = \#D_j - \#D_{j-1}$ , und  $\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_j \setminus D_{j-1}} \alpha$  gibt, die uns ein nicht-spezies System ausschneidet. Klar wird diese Tatsache im Beweis zur Diagrammausschneidemethode, der zeigt, dass jede zu  $D_j \setminus D_{j-1}$  gleichelementige Teilmenge aus  $D_j$  mit  $P \neq D_j \setminus D_{j-1}$  eine andere Summe seiner Elemente besitzt als  $D_j \setminus D_{j-1}$  und ein spezielles System ausschneidet. Nur falls  $P = D_j \setminus D_{j-1}$  ist, wird ein nicht-spezies System abgeschnitten.

Die vierte Bedingung drückt aus, dass im Endsystem die Dimension maximal so groß ist wie die erwartete Dimension des Ausgangssystems. In der Diagrammausschneidemethode werden genau so viele Elemente herausgenommen, wie Bedingungen an das Linearsystem gestellt werden. Im Lemma setzen wir voraus, dass wir  $r$ -mal die Diagrammausschneidemethode anwenden können und damit können wir genau so viele Elemente abschneiden, wie das Linearsystem an Bedingungen erfüllen muß,  $\#D \geq \sum_{j=1}^r \binom{m_j+1}{2}$ . Also enthält das Endsystem noch  $\#D - \sum_{j=1}^r \binom{m_j+1}{2}$  Elemente und seine Dimension ist gleich der erwarteten Dimension des Ausgangssystems.

Die Diagrammausschneidemethode stellt also einen Spezialfall des Reduktionsalgorithmus dar. Allerdings wird in der Regel nicht gefordert, dass jeweils nur ein System, welches nur die Multiplizität in einem Punkt erfüllen muß abgeschnitten wird. Es kann auch sofort ein System herausgeschnitten werden, welches die Multiplizität in mehreren



#### 4 Reduktionsalgorithmus

Punkten erfüllen muss.

Wie im Lemma formuliert, erfüllt die Diagrammausschneidemethode alle Bedingungen des Reduktionsalgorithmus.  $\square$

Im Folgenden zitieren wir noch ein Theorem und eine Vermutung aus [DJ05]. Den Beweis werden wir nicht erbringen, da er den Rahmen dieser Arbeit sprengt. Dennoch sind diese Aussagen für den Leser interessant und bringen einen weiteren Zusammenhang zwischen nicht-speziellen Systemen und dem Reduktionsalgorithmus.

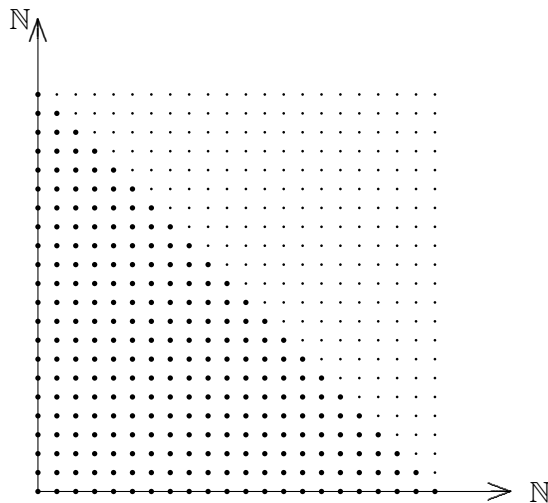
**Theorem 4.4 (siehe [DJ05], S. 5)** Wenn ein System einem Reduktionsalgorithmus genügt, dann ist es *nicht-spezial*.  $\square$

**Vermutung 4.5 (siehe [DJ05], S. 5)** Jedes *nicht-spezial* System genügt einem Reduktionsalgorithmus.

## 5 Beispiele

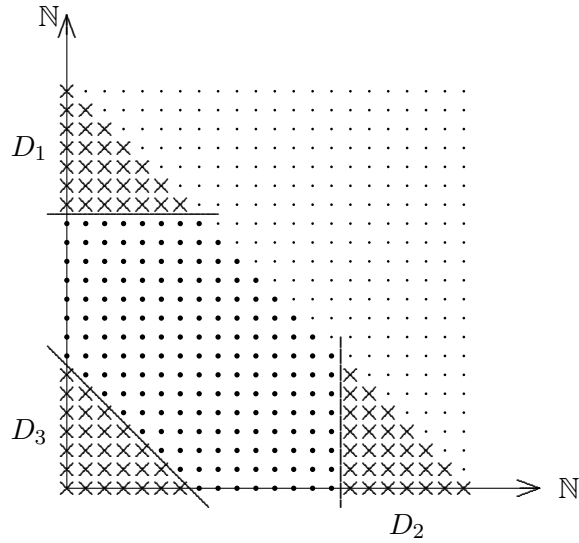
In diesem Kapitel betrachten wir Beispiele, um die Funktionsweise der Diagrammausschneidemethode zu demonstrieren. Das erste Beispiel behandelt ein recht komplexes Linearsystem, welches Dumnicki in [Dum06] vorstellt und untersucht:

**Beispiel 5.1** (siehe [Dum06], S. 11) Betrachte das Linearsystem, welches alle Kurven bis zum Grad 21 enthält, die durch 6 Punkte mit der Multiplizität 7, durch 4 Punkte mit der Multiplizität 6 und durch einen Punkt mit der Multiplizität 1 verlaufen. Also das System  $L = \mathcal{L}_{21}(7, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 1) = \mathcal{L}_{21}(7^{\times 6}, 6^{\times 4}, 1)$ . Monome in  $X$  und  $Y$  bis zum Grad 21 gibt es genau  $\binom{22}{2}$ , zeichnet man ihre Exponenten als Punkte in  $\mathbb{N}^2$  in ein Koordinatensystem ein, bilden sie ein rechtschenkliges, rechtwinkliges Dreieck:



Wir wollen zeigen, dass das System  $L = \mathcal{L}_{21}(7^{\times 6}, 6^{\times 4}, 1)$  nicht-spezial ist, indem wir die Diagrammausschneidemethode benutzen.

Betrachtet man die drei Ecken des Dreiecks, kann man jeweils 28 Punkte markieren, die jeweils auf 7 zueinander parallelen Geraden liegen. Auf der ersten Geraden liegen 7 Punkte, auf der zweiten 6, auf jeder weiteren Parallelen liegt jeweils ein Punkt weniger, so dass auf der siebten Parallelen nur noch ein Punkt liegt:



Diese 28 Punkte entsprechen jeweils genau der Anzahl an Bedingungen, die durch die Forderung an das Linearsystem, Multiplizität 7 in einem Punkt zu erfüllen, gegeben ist. Dies sind  $\binom{7+1}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$  Bedingungen.

Setze:

$$D_1 := \{(0, 15), \dots, (0, 21), (1, 15), \dots, (1, 20), \dots, (6, 15)\}$$

$$D_2 := \{(15, 0), \dots, (15, 6), (16, 0), \dots, (16, 5), \dots, (21, 0)\}$$

$$D_3 := \{(0, 0), \dots, (0, 6), (1, 0), \dots, (1, 5), \dots, (6, 0)\}$$

und betrachte die Linearsysteme  $L_1 = \mathcal{L}_{D_1}(7)$ ,  $L_2 = \mathcal{L}_{D_2}(7)$  und  $L_3 = \mathcal{L}_{D_3}(7)$ .

Für alle drei Linearsysteme ist die Voraussetzung der Proposition 3.9 erfüllt, denn es gilt jeweils  $\#D_1 = \#D_2 = \#D_3 = \binom{7+1}{2} = 28$ .

Um die Nicht-Speziellheit der Systeme zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass die Elemente aus  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_3$  jeweils nicht auf einer Kurve vom Grad  $7 - 1 = 6$  liegen.

Wie oben beschrieben, liegen sie jeweils auf 7 zueinander parallelen Geraden, der Einfachheit halber betrachten wir jetzt nur das System  $L_1$ , die Argumentation für die anderen beiden Systeme verläuft analog.

Bezeichne die senkrechten, zueinander parallelen Geraden mit  $G_1, \dots, G_7$  so, dass die Gerade  $G_i$  genau  $i$  Punkte aus  $D_1$  enthält.

Angenommen, es existiere eine Kurve  $C$  vom Grad  $7 - 1 = 6$ , die alle 28 Punkte aus  $D_1$  enthält. Dann schneidet  $C$  die Gerade  $G_7$  mindestens in den 7 Punkten aus  $D_1$ . Da aber nach dem Theorem von Bezout<sup>3</sup> die Schnittmultiplizität zweier Kurven ohne gemeinsame Komponente gleich dem Produkt der Grade der definierenden Funktionsgleichungen ist, d.h. in diesem Fall  $6 \cdot 1 = 6$ , folgt, dass  $G_7$  ein Teil von  $C$  sein muss. Da die Gleichung von  $C$  die Geradengleichung von  $G_7$  als irreduzible Komponente enthält, kann man sie durch die Gleichung von  $G_7$  dividieren und erhält als Rest eine Gleichung

<sup>3</sup>Formulierung des Theorems von Bezout siehe Anhang B

## 5 Beispiele

vom Grad 5. Der Teil von  $C$ , der durch diese Gleichung definiert wird, muss sich mit  $G_6$  in mindestens 6 Punkten schneiden, also ist wiederum nach Bezout auch  $G_6$  ein Teil von  $C$ . Der Rest nach Division durch die Gleichung von  $G_6$  ist ein Polynom vom Grad 4 und definiert eine Kurve, die  $G_5$  in mindestens 5 Punkten schneidet, damit ist auch  $G_5$  ein Teil von  $C$ .

Führt man diese Rechnung weiter fort, stellt man fest, dass die Gleichung von  $C$  ein Produkt der Geradengleichungen aller  $G_i, i = 1, \dots, 7$ , enthalten muss. Damit beträgt aber der Grad von  $C$  mindestens 7, ein Widerspruch zur Annahme, dass die Kurve  $C$  nur vom Grad 6 ist. Also liegen die Elemente aus  $D_1$  nicht auf einer Kurve vom Grad 6 und damit ist nach Proposition 3.9 das System  $L_1$  nicht-spezial.

Genauso kann man den Beweis für  $D_2$  und  $D_3$  führen. Auch hier liegen die Elemente wieder auf je 7 zueinander parallelen Geraden, insgesamt also auf einer Kurve vom Grad wenigstens 7.

Wir haben damit bewiesen, dass die Linearsysteme  $L_1, L_2$  und  $L_3$  nicht-spezial sind. Um die Diagrammausschneidemethode anwenden zu können, müssen wir im nächsten Schritt die virtuelle Dimension der Systeme untersuchen.

Diese beträgt jeweils

$$\text{vdim}_{L_1} = \text{vdim}_{L_2} = \text{vdim}_{L_3} = 28 - 1 - \binom{7+1}{2} = -1.$$

Die virtuelle Dimension ist damit für alle drei Systeme  $-1$ , wie es als Voraussetzung in der Diagrammausschneidemethode gefordert wird.

Nun müssen wir noch affine Funktionen finden, die für die Elemente aus  $D_1$  ( bzw.  $D_2$  oder  $D_3$ ) positive Werte ergibt und für die Elemente aus  $D \setminus D_1$  ( bzw.  $D \setminus D_2$  oder  $D \setminus D_3$ ) negative Werte ergibt. Diese drei Geradengleichungen lauten:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_2 - 15, 5, \\ F_2(\alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_1 - 15, 5 \quad \text{und} \\ F_3(\alpha_1, \alpha_2) &= -\alpha_2 - \alpha_1 + 6, 5. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_1} &> 0 \quad \text{und} \quad F_1(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D \setminus D_1} < 0 \\ F_2(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_2} &> 0 \quad \text{und} \quad F_2(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D \setminus D_2} < 0 \\ F_3(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D_3} &> 0 \quad \text{und} \quad F_3(\alpha_1, \alpha_2)_{(\alpha_1, \alpha_2) \in D \setminus D_3} < 0 \end{aligned}$$

Jetzt sind alle Voraussetzungen für die Diagrammausschneidemethode erfüllt. Wir wenden sie an, indem wir zuerst mithilfe unserer affinen Funktion  $F_1$  die obere Spitze abschneiden, und erhalten das System  $\mathcal{L}_{D \setminus D_1}(7^{\times 5}, 6^{\times 4}, 1)$  als restliches System. Es gilt dann:

$$\dim_L \leq \dim_{\mathcal{L}_{D \setminus D_1}(7^{\times 5}, 6^{\times 4}, 1)}.$$

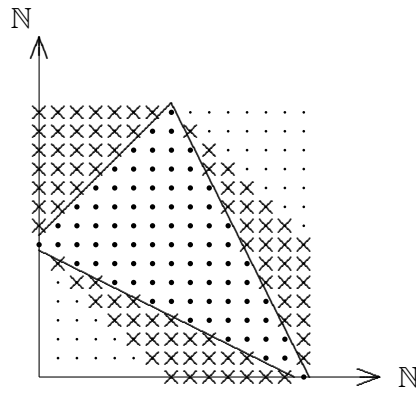
## 5 Beispiele

Mittels der Geraden  $F_2$  schneiden wir die zweite Spitze ab und verkleinern unser System auf  $\mathcal{L}_{D \setminus (D_1 \cup D_2)}(7 \times 4, 6 \times 4, 1)$ . Damit gilt die Ungleichung:

$$\dim_L \leq \dim_{\mathcal{L}_{D \setminus D_1}}(7 \times 5, 6 \times 4, 1) \leq \dim_{\mathcal{L}_{D \setminus (D_1 \cup D_2)}}(7 \times 4, 6 \times 4, 1) \cdot$$

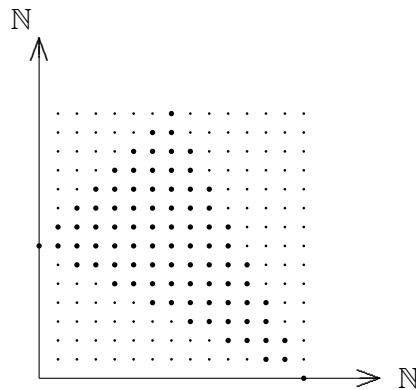
Die dritte Ecke wird durch die Gerade  $F_3$  abgeschnitten und führt zu  $\mathcal{L}_{D \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)}(7 \times 4, 6 \times 4, 1)$ .

Nun betrachten wir die verbliebene Exponentenmenge als Punkte in der Ebene und versuchen, 28 Punkte auszuschneiden, die in der oben beschriebenen Weise auf 7 Parallelen liegen sollen, damit die Nicht-Speziellheit des herauszuschneidenden Systems gewährleistet ist:



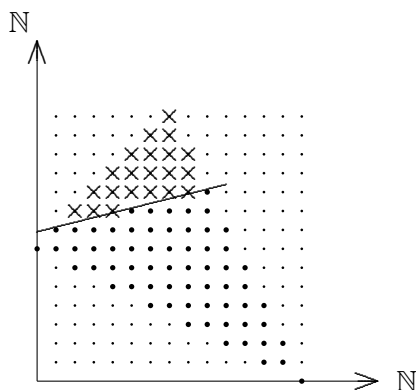
Diese Anordnung findet man wieder dreimal, wie obige Grafik zeigt. In der linken oberen Ecke liegen die Punkte sowohl horizontal als auch vertikal auf 7 Parallelen. Am rechten Rand können wir 28 Punkte ausschneiden, die auf vertikalen Parallelen liegen und die Punkte am unteren Rand liegen auf 7 horizontalen Parallelen. Insgesamt können wir also wieder dreimal ein nicht-spezies System mit Multiplizität 7 in einem Punkt ausschneiden.

Das verbliebene System sieht folgendermassen aus:

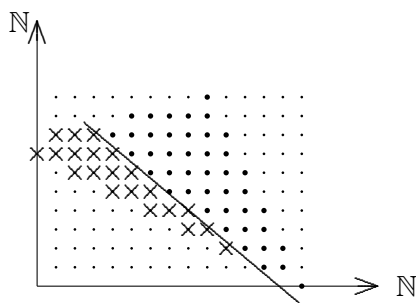


## 5 Beispiele

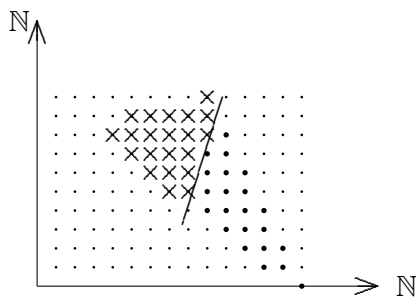
Da wir 6 Linearsysteme mit Multiplizität 7 herausgeschnitten haben, müssen wir jetzt nach 21 Punkten auf 6 parallelen Geraden suchen, um Linearsysteme mit der Multiplizität 6 in einem Punkt herauszuschneiden zu können. Die markierten Punkte im folgenden System erfüllen diese Bedingung, sie liegen auf 6 horizontalen Parallelen:



Eine Anordnung von 21 Punkten auf 6 Parallelen in der beschriebenen Form findet man folgendermaßen, wobei in der ersten Grafik die Punkte auf 6 schrägen Parallelen liegen, in der zweiten Grafik auf 6 horizontalen Parallelen:



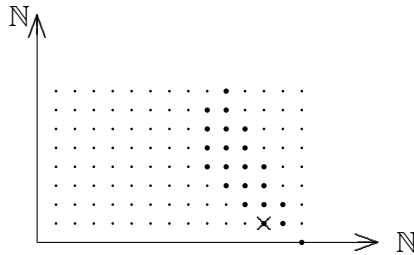
und



Schneidet man nun noch den Punkt  $(12, 1)$  aus, hat man ein Linearsystem von Kurven, die durch einen Punkt mit der Multiplizität 1 verlaufen, entfernt. Zurück bleiben

## 5 Beispiele

genau 21 Punkte, die wiederum auf 6 vertikalen Parallelen angeordnet sind. Es liegt somit ein nicht-speziales System  $\mathcal{L}_{D_0}(6)$  als zurückbleibendes System vor:



Nach Theorem 3.11 gilt jetzt insgesamt die Ungleichung

$$\dim_L \leq \dim_{\mathcal{L}_{D_0}(6)}.$$

Die virtuelle Dimension von  $\mathcal{L}_{D_0}(6)$  beträgt  $21 - 1 - \binom{6+1}{2} = -1$ . Damit ist auch seine erwartete Dimension  $-1$  und da die Elemente von  $D_0$  nicht auf einer Kurve vom Grad 5 liegen, ist nach Proposition 3.9 das System nicht-spezial, also beträgt auch seine tatsächliche Dimension  $-1$ .

Es gilt damit  $\dim_L \leq -1$ . Da die tatsächliche Dimension aber nicht kleiner als  $-1$  sein kann, ist also  $\dim_L = -1$ .

Die virtuelle Dimension von  $L = \mathcal{L}_{21}(7^{\times 6}, 6^{\times 4}, 1)$  beträgt:

$$\begin{aligned} \binom{22}{2} - 1 - 6 \cdot \binom{8}{2} - 4 \cdot \binom{7}{2} - 1 &= \\ \frac{22 \cdot 21}{2} - 1 - \frac{6 \cdot 8 \cdot 7}{2} - \frac{4 \cdot 7 \cdot 6}{2} - 1 &= \\ 11 \cdot 21 - 1 - 8 \cdot 21 - 4 \cdot 21 - 1 &= -23. \end{aligned}$$

Seine erwartete Dimension ist damit auch  $-1$ .

Also entspricht im System  $L = \mathcal{L}_{21}(7^{\times 6}, 6^{\times 4}, 1)$  die tatsächliche der erwarteten Dimension, es ist nicht-spezial, was wir zeigen wollten.

In den folgenden Beispielen soll an nicht-spezialen homogenen Linearsystemen demonstriert werden, wie man auf einfache Weise mithilfe der Diagrammausschneidemethode die Nicht-Spezialität nachprüfen kann. Diese homogenen Linearsystemen müssen also dieselbe Multiplizität in einer unterschiedlichen Anzahl von Punkten erfüllen.

Ausgehend von einem einfachen Beispiel, einem Linearsystem, welches nur die Multiplizität in einem Punkt erfüllen muss, werden dann immer kompliziertere Systeme vorgestellt. Die Schranken für die Systeme, die die Multiplizität in mehreren Punkten erfüllen müssen sind einem Artikel von Ciliberto und Miranda, [CM00], entnommen. In diesem Artikel werden spezielle Systeme betrachtet, die außerhalb der dort angegebenen Grenzen nicht-spezial sind.

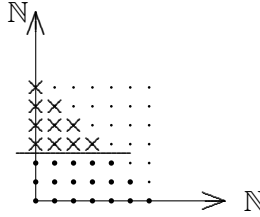
## 5 Beispiele

**Beispiel 5.2** Betrachte das Linearsystem  $\mathcal{L}_6(4)$ . Seine virtuelle Dimension beträgt:

$$\dim_{\mathcal{L}_6(4)} = \binom{6+2}{2} - 1 - \binom{4+1}{2} = 28 - 1 - 10 = 17$$

Damit ist auch die erwartete Dimension 17 und es bleibt zu überprüfen, ob das System speziell oder nicht-spezial ist.

Legt man die Exponentenpaare der Definitionsmenge in die Ebene und wendet die Diagrammausschneidemethode an, erhält man folgendes Diagramm:



Die markierten Punkte erfüllen nach Proposition 3.9 die Bedingungen für ein nicht-speziales Linearsystem, welches durch einen Punkt mit der Multiplizität 4 verläuft, der Dimension  $-1$ . Schneidet man die markierten Punkte aus, bleiben 18 Punkte übrig, das restliche System hat damit die Dimension 17, da keine Multiplizitätsbedingung mehr in einem Punkt erfüllt werden muß.

Damit entspricht in dem System  $\mathcal{L}_6(4)$  die tatsächliche der erwarteten Dimension, es liegt ein nicht-speziales System vor.

**Proposition 5.3** (siehe [CM00], Th. 2.4., Th. 2.5.) Homogene Linearsystem der Form  $\mathcal{L}_d(m^{\times 2})$  sind für  $d > 2m - 2$  nicht-spezial.

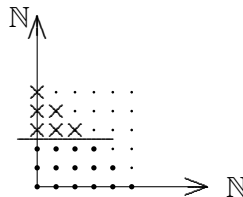
Dies läßt sich leicht durch die Diagrammausschneidemethode beweisen. Diskutieren wir zuerst ein Beispiel:

**Beispiel 5.4** Betrachte das Linearsystem  $\mathcal{L}_5(3^{\times 2})$  mit  $m = 3$  und  $d = 5$ , d.h., es ist  $d > 2m - 2$  erfüllt. Die virtuelle Dimension beträgt:

$$\dim_{\mathcal{L}_5(3^{\times 2})} = \binom{5+2}{2} - 1 - 2 \cdot \binom{3+1}{2} = 21 - 1 - 2 \cdot 6 = 8$$

Also beträgt auch die erwartete Dimension 8.

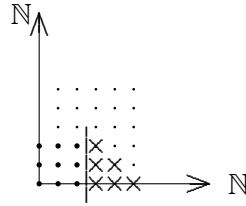
Man kann die Diagrammausschneidemethode auf das Linearsystem anwenden:



Im zurückbleibenden System findet man wiederum 9 Punkte, die auf 3 Parallelen angeordnet sind:



## 5 Beispiele



Nach dem Ausschneiden der markierten Punkte bleiben 9 Elemente der vorgegebenen Exponentenmenge übrig. Das verbliebene System muß keine Multiplizität mehr in einem Punkt erfüllen, damit beträgt seine Dimension  $9 - 1 = 8$ . Also ist gezeigt, dass das Linearsystem  $\mathcal{L}_5(3 \times 2)$  nicht-spezial ist.

*Beweis von Proposition 5.3:* Genügt ein homogenes Linearsystem der Form  $\mathcal{L}_d(m \times 2)$  der Forderung  $d > 2m - 2$ , dann sieht man, wenn man die Exponenten der Monome bis zum Grad  $d$  als Punkte in die Ebene legt, dass die Anzahl der Punkte auf der  $X$ -Achse und auf der  $Y$ -Achse mindestens jeweils  $2m$  beträgt. Denn es gilt dann mindestens  $d = 2m - 1$  und die Punkte auf der  $X$ -Achse sind  $(0, 0), \dots, (2m - 1, 0)$ , die auf der  $Y$ -Achse  $(0, 0), \dots, (0, 2m - 1)$ .

Damit findet man sogar dreimal die Anordnung von  $\frac{m \cdot (m+1)}{2}$  Punkten auf  $m$  Parallelen, so dass auf der ersten Geraden 1 Punkt, auf der zweiten 2 Punkte, usw., auf der  $m$ -ten Geraden  $m$  Punkte liegen. Diese lassen sich ausschneiden, indem man zuerst die obere und linke Spitze abschneidet und im verbliebenen System noch einmal diagonal ausschneidet.

Nach Proposition 3.9 kann man damit 3 nicht-spezial System ausschneiden, die jeweils die Multiplizität  $m$  in einem Punkt erfüllen. Es reicht aber, 2 nicht-spezial Systeme abzuschneiden. Das zurückbleibende System hat dann noch die Dimension

$$\binom{d+2}{2} - 2 \cdot \binom{m+1}{2} - 1.$$

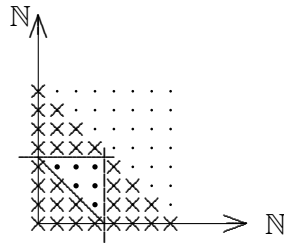
Diese Dimension entspricht der des Ausgangssystems und somit ist gezeigt, dass homogene Linearsysteme der Form  $\mathcal{L}_d(m \times 2)$  mit  $d > 2m - 2$  nicht-spezial sind.  $\square$

**Proposition 5.5** (siehe [CM00], Th. 2.4., Th. 2.5.) Homogene Linearsysteme der Form  $\mathcal{L}_d(m \times 3)$  sind für  $d > 2m - 2$  nicht-spezial.  $\square$

**Bemerkung 5.6** Der Beweis mithilfe der Diagrammausschneidemethode verläuft analog wie der für Linearsysteme der Form  $\mathcal{L}_d(m \times 2)$ .

**Beispiel 5.7** Betrachte für  $m = 4$  und  $d = 7$  das Linearsystem  $\mathcal{L}_7(4 \times 3)$ . Legt man die Exponenten der Monome bis zum Grad 7 in die Ebene kann man mittels der Diagrammausschneidemethode dreimal je 10 Punkte auf je 4 zueinander parallelen Geraden ausschneiden:

## 5 Beispiele



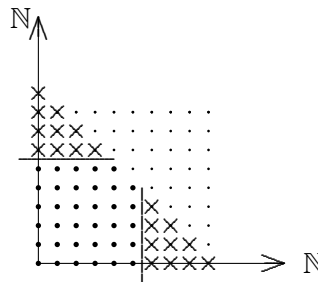
Das zurückbleibende System enthält noch 6 Punkte, hat damit die Dimension 5, dies entspricht der erwarteten Dimension des Gesamtsystems:

$$\binom{7+2}{2} - 1 - 3 \cdot \binom{4+1}{2} = 36 - 1 - 3 \cdot 10 = 5$$

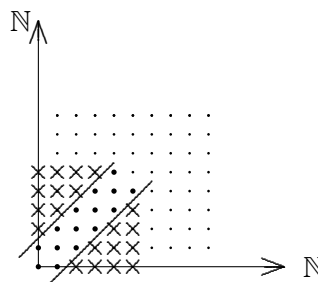
Und damit ist gezeigt, dass das System  $\mathcal{L}_7(4 \times 3)$  nicht-spezial ist.

**Proposition 5.8** (siehe [CM00], Th. 2.5.) Homogene Systeme der Form  $\mathcal{L}_d(m \times 4)$  sind alle nicht-spezial. □

**Beispiel 5.9** Betrachte das Linearsystem  $\mathcal{L}_9(4 \times 4)$ :



Man kann die Spitzen abschneiden und entfernt so 2 nicht-spezial Systeme, die die Multiplizität 4 in einem Punkt erfüllen.



2 weitere System lassen sich wie oben dargestellt entfernen. Das restliche System hat die Dimension 14 wie das ursprüngliche System  $\mathcal{L}_9(4 \times 4)$ , welches damit nicht-spezial ist.

**Proposition 5.10** (siehe [CM00], Th. 2.4., Th. 2.5.) Homogene Linearsysteme der Form  $\mathcal{L}_d(m \times 5)$  mit  $d > \frac{(5m-2)}{2}$  sind nicht-spezial. □

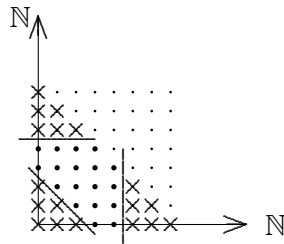
## 5 Beispiele

**Beispiel 5.11** Das Linearsystem  $\mathcal{L}_7(3^5)$  erfüllt die obige Bedingung  $d > \frac{(5m-2)}{2}$ . Man kann gut zeichnerisch seine Nicht-Spezialität demonstrieren. Seine virtuelle Dimension beträgt:

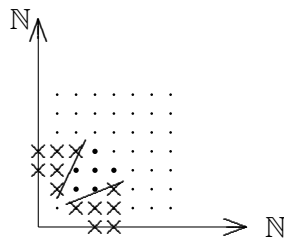
$$\binom{7+2}{2} - 1 - 5 \cdot \binom{3+1}{2} = 36 - 1 - 5 \cdot 6 = 5$$

D.h. auch seine erwartete Dimension ist 5.

Betrachtet man die Exponentenpaare der Monome bis zum Grad 7 in der Ebene, fällt es leicht, 3 nicht-speziale Systeme, die die Multiplizität 3 in einem Punkt erfüllen, auszuschneiden:



Im restlichen System findet man noch zweimal die Anordnung von 6 Punkten auf 3 Parallelen, die sich mithilfe einer affinen Gerade ausschneiden lassen:



Zurück bleiben 6 Punkte, deren Linearsystem keine Multiplizität mehr in einem Punkt erfüllen muss, die Dimension beträgt damit 5, das gesamte System ist nicht-spezial.

## A Laplace'scher Entwicklungssatz

Im Beweis zur Diagrammausschneidemethode verwenden wir für die Determinantenberechnung einen Sonderfall des Laplace'schen Entwicklungssatzes, wie er in [Bri83] vorgestellt und bewiesen wird.

Für eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  bezeichne

$$A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

mit

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad \text{und} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$$

die  $k \times k$ -Untermatrix von  $A$ , die aus den Zeilen mit den Indizes  $i_1, \dots, i_k$  und aus den Spalten mit den Indizes  $j_1, \dots, j_k$  besteht. Die  $(n - k) \times (n - k)$ -Untermatrix, die aus den übrigen Zeilen und Spalten entsteht, bezeichnen wir mit:

$$A' \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

weil sie durch Streichen der Zeilen  $i_1, \dots, i_k$  und der Spalten  $j_1, \dots, j_k$  entsteht.

Dann gilt:

**Satz A.1 (Laplace'scher Entwicklungssatz, siehe [Bri83], S. 568)**  $A$  sei eine  $n \times n$ -Matrix. Dann gilt für die Determinante von  $A$  die folgende Entwicklung nach  $k$  Zeilen mit den Indizes  $i_1, \dots, i_k$ , wobei  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ :

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix} \det A' \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

□

## B Satz von Bezout

In den Beispielen benutzen wir den Satz von Bezout, um zu beweisen, dass  $\binom{m+1}{2}$  Punkte, die auf  $m$  zueinander parallelen Geraden liegen, von denen die erste Gerade einen Punkt, die zweite 2 Punkte, usw., die  $m$ -te  $m$  Punkte enthält, auf einer Kurve vom Grad mindestens  $m$  liegen müssen.

Für den Satz von Bezout betrachten wir die Schnittmultiplizität zweier ebener Kurven  $C = \{f = 0\}$  und  $C' = \{g = 0\}$ , die keine gemeinsame Komponente besitzen. Dann ist die Schnittmultiplizität folgendermaßen definiert, wobei wir für die projektive Ebene über dem Körper  $k$  die Notation  $\mathbb{P}_k^2$  benutzen:

**Definition B.1 (siehe [Hul00], S. 95)** Die *Schnittmultiplizität* zweier ebener Kurven  $C$  und  $C'$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{P}_k^2$  ist definiert durch:

$$I_P(C, C') := \dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2, P} / (f, g).$$

**Lemma B.2** (siehe [Hul00], S. 95)

$$I_P(C, C') \geq 1 \Leftrightarrow P \in C \cap C'.$$

□

**Lemma B.3** (siehe [Hul00], S. 96) Zwei Kurven  $C$  und  $C'$  schneiden sich genau dann transversal in  $P$ , wenn  $I_P(C, C') = 1$ . □

**Satz B.4** (siehe [Hul00], S. 97) Es sei  $C \in \mathbb{P}_k^2$  eine Kurve vom Grad  $d$  und  $L$  eine Gerade, die nicht in  $C$  enthalten ist. Dann schneiden sich  $C$  und  $L$  in  $d$  Punkten, d.h.

$$\sum_P I_P(C, L) = d.$$

□

Nun können wir den Satz von Bezout formulieren:

**Satz B.5 (Satz von Bezout, siehe [Hul00], S. 98)** Es seien  $C$  und  $C'$  zwei ebene Kurven vom Grad  $d$  bzw.  $d'$ , die keine gemeinsame Komponente besitzen. Dann schneiden sich  $C$  und  $C'$  in  $dd'$  Punkten, d.h.

$$C.C' := \sum_P I_P(C, C') = dd'.$$

□

## Literatur

- [Bar06] Sammy Barkowsky. Die Ciliberto-Miranda-Rekursion für Linearsysteme der projektiven Ebene. Diplomarbeit, Universität zu Köln, 2006.
- [Bri83] Egbert Brieskorn. *Lineare Algebra und analytische Geometrie I*. Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1983.
- [CM00] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(9):4037 – 4050, 2000.
- [DJ05] Marcin Dumnicki and Witold Jarnicki. New effective bounds on the dimension of a linear system in  $\mathbb{P}^2$ . Preprint: math.AG/0505183, 2005.
- [Dum06] Marcin Dumnicki. Reduction method for linear systems of plane curves with base fat points. Preprint: math.AG/0606716, 2006.
- [Hul00] Klaus Hulek. *Elementare Algebraische Geometrie*. Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000. Erste Auflage.
- [Mir99] Rick Miranda. Linear systems of plane curves. *Notices of the AMS*, 46(2):192 – 202, 1999.

## **Erklärung:**

Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit einschließlich der Zeichnungen und Darstellungen selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.

Köln, den 05.03.2007

---

## **Einverständniserklärung:**

Ich bin damit einverstanden, dass diese Hausarbeit nach Abschluss meiner Ersten Staatsprüfung wissenschaftlich interessierten Personen oder Institutionen zur Einsichtnahme zur Verfügung gestellt wird und dass zu diesem Zweck Ablichtungen dieser Hausarbeit hergestellt werden, sofern diese keine Korrektur- oder Bewertungsvermerke enthalten und sofern der Benutzer die entstehenden Kosten für die Ablichtung trägt.

Köln, den 05.03.2007

---