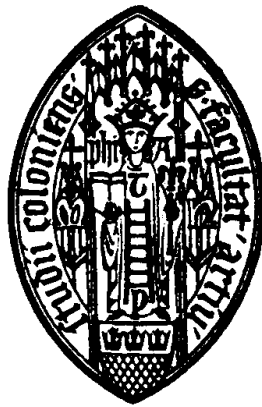


Die Ciliberto-Miranda - Rekursion  
für  
Linearsysteme der projektiven Ebene

DIPLOMARBEIT  
von  
SAMMY BARKOWSKI



angefertigt im Mathematischen Institut  
der Universität zu Köln  
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus

Köln, im Wintersemester 2005/2006



## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei einigen Menschen, die auf die eine oder andere Art einen Beitrag zu meinem Studium und dieser Arbeit geleistet haben, von ganzem Herzen bedanken.

Zuallererst möchte ich mich bei Prof. Dr. Kebekus, Dr. Eckl und Dr. Solá Conde für die durchweg hervorragende Betreuung während meines gesamten Hauptstudiums bedanken. Es war stets mindestens ein Ansprechpartner zur Stelle, der geduldig meine Fragen beantwortete, mir die richtige Richtung wies oder neue Aufgaben stellte, deren Bearbeitung am Ende das gesuchte Licht ins Dunkel bringen sollte. Für die vielen Gespräche, die tolle Zusammenarbeit, all die Zeit und Mühe, vielen Dank.

Ein großer Dank gilt auch meinen Kommilitoninnen und Kommilitonen. Dabei möchte ich mich besonders bei Björn Anton und Jost Schiefer bedanken, die oft Diskussionspartner, manchmal treibende Kraft und immer eine große Unterstützung waren.

Auch bei meinen Freunden und meiner Familie möchte ich mich für ihre moralische Unterstützung bedanken.

Mein größter Dank gebührt jedoch meiner Freundin Susanne, die mich so oft teilen oder ganz auf meine geistige Anwesenheit verzichten musste. Ohne ihr endloses Verständnis, ihre Opferungsbereitschaft und permanente Unterstützung hätte ich es um einiges schwerer gehabt!

Zuletzt möchte ich mich bei all denen entschuldigen, die ich nicht namentlich erwähnt habe, obwohl viele es zweifelsfrei verdient hätten.

Köln, den 14.03.2006

Sammy Barkowski



## Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1. Grundlagen	3
1.1. Linearsysteme ebener Kurven	3
1.2. Aufblasung von Linearsystemen der projektiven Ebene	5
1.3. $(-1)$ -spezielle Systeme	10
1.4. Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung	12
Kapitel 2. Degeneration der Ebene	13
2.1. Konstruktion der degenerierten Ebene	13
2.2. Die Picard-Gruppe der degenerierten Ebene	15
2.3. Familien von Linearsystemen in $X$ und das Ziel der Degeneration	16
2.4. Die Transversalität der eingeschränkten Systeme und $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_0$	25
Kapitel 3. Die Rekursion für homogene Linearsysteme	29
3.1. Hilfsmittel zur Untersuchung auf Speziellheit	29
3.2. Die einfache Rekursion	38
3.3. Erste Beispiele	39
Kapitel 4. Grenzwertbetrachtungen für eine feste Anzahl von Punkten	43
4.1. Ausblick und Motivation	43
4.2. Die Grenzen der Ciliberto-Miranda-Rekursion	45
4.3. Einige Tabellen	50
Anhang A. C++ -Quellcode des Programms	53
A.1. Die Main-Funktion	53
A.2. Die Hilfsfunktionen	56
Literaturverzeichnis	61
Symbolverzeichnis	63
Index	65



## Einleitung

„Du wolltest doch Algebra,  
da hast Du den Salat.“  
Jules Verne

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem bisher noch weitgehend ungelösten Problem, welches zunächst nicht besonders schwierig erscheint:

Wir betrachten die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2$  über dem Grundkörper  $\mathbb{C}$ , wählen Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), ordnen jedem Punkt  $p_i$  eine natürliche Zahl  $m_i$  zu und betrachten Kurven vom Grad  $d$ , die in den Punkten  $p_i$  jeweils mindestens Vielfachheit  $m_i$  haben, für  $i = 1, \dots, n$ .

Kurven vom Grad  $d$  im  $\mathbb{P}^2$  werden von homogenen Polynomen  $P \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]_d$  vom Grad  $d$  ausgeschnitten. Die Menge  $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]_d$  (mit dem Nullpolynom) ist offenbar ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension<sup>1</sup>  $\frac{1}{2}(d+1)(d+2) = \frac{1}{2}d(d+3) + 1$ .

Den Untervektorraum der Kurven vom Grad  $d$ , mit Vielfachheit mindestens  $m_i$  im Punkt  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), bezeichnen wir mit  $L(d, m_1, \dots, m_n)$ .

Da wir uns im projektiven Raum bewegen, unterscheiden wir nicht zwischen Polynomen, die sich nur um ein skalares Vielfaches unterscheiden und betrachten daher die Räume  $\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n) := \mathbb{P}(L(d, m_1, \dots, m_n) \setminus \{0\})$  und  $\mathcal{L}(d) := \mathbb{P}(\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]_d \setminus \{0\})$ , welcher Dimension  $\frac{1}{2}d(d+3)$  hat.

Unser Interesse gilt nun der Dimension von  $\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n)$ .

Eine Kurve  $C$  hat definitionsgemäß in einem Punkt  $p_i$  Vielfachheit  $m_i$  genau dann, wenn das zugehörige Polynom  $P$  im Punkt  $p_i$  eine Nullstelle der Ordnung größer oder gleich  $m_i$  hat. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass alle  $k$ -ten partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k = m_i - 1$  von  $P$  im Punkt  $p_i$  verschwinden.

Ohne Einschränkung sei  $p_i \in U_2 = \{z_2 \neq 0\}$ .

Wir können also der Einfachheit halber anstelle des homogenen Polynoms  $P = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} z_0^i z_1^j z_2^k$  das Polynom  $\tilde{P} = \sum_{i+j \leq d} a_{ijk} x^i y^j$ , mit  $x = \frac{z_0}{z_2}, y = \frac{z_1}{z_2}$  betrachten.

Mit Hilfe der Taylorentwicklung von  $\tilde{P}$  im Punkt  $p_i$  sieht man, dass eine Nullstelle der Ordnung  $\geq m_i$  von  $P$  genau  $\frac{1}{2}m_i(m_i + 1)$  Bedingungen in den Koeffizienten  $a_{ijk}$  an  $P$  liefert.

---

<sup>1</sup>Offenbar bilden die Monome in  $z_0, z_1$  und  $z_2$  vom Grad  $d$  eine Basis und eine einfach kombinatorische Überlegung liefert die angegebene Dimension.

Falls diese Bedingungen linear unabhängig sind, ist  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n)) = \frac{1}{2}(d(d+3) - \sum_{i=1}^n m_i(m_i+1))$ . Dies ist jedoch **nicht** unbedingt richtig, wie ein einfaches Beispiel zeigt:

Seien  $d = n = 2, m_1 = m_2 = 2$  und  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2$  mit  $p_1 \neq p_2$  beliebig gewählt. Dann ist  $\frac{1}{2}d(d+3) - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}m_i(m_i+1) = 5 - 3 - 3 = -1$ , d.h. das System ist leer<sup>2</sup>.

Es sollte also keine Kurve vom Grad 2 geben, die die Punkte  $p_1$  und  $p_2$  mit Vielfachheit 2 enthält.

Es gibt jedoch offensichtlich eine Gerade durch beide Punkte. Wir quadrieren ihrer Gleichung und erhalten eine „Doppelgerade“ mit den geforderten Eigenschaften.

Es stellt sich also die Frage, wann solch ein System die „erwartete“ Dimension hat und was die Ursache für eine Abweichung ist.

Eine Antwort auf diese Frage könnte die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung sein, die jedoch bisher nicht bewiesen wurde.

Um diese formulieren zu können werden zunächst im Kapitel 1 die oben beschriebenen Begriffe und weitere Grundlagen formal definieren.

Danach werden wir uns einer spezielleren Situation zuwenden, indem wir fordern, dass die zu untersuchenden Kurven in allen Punkten die gleiche Vielfachheit haben und einen Lösungsansatz von Rick Miranda und Ciro Ciliberto (vgl. [CM98],[CM00]) vorstellen, die sogenannte Ciliberto-Miranda-Rekursion.

Entsprechend orientiert sich diese Arbeit hauptsächlich an [CM98]. Um die Verständlichkeit der Arbeit zu gewährleisten, werden wir einige Beweise direkt aus diesem Artikel übernehmen und nicht nur darauf verweisen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es schließlich, für eine vorgegebene Anzahl von Punkten Paare  $(d, m)$  zu finden, wobei  $d$  der Grad der Kurven und  $m$  die geforderte Vielfachheit ist, für die die oben genannte Rekursion Ergebnisse liefert.

---

<sup>2</sup>Beachte: Durch Projektivierung verringert sich die Dimension um eins.



## KAPITEL 1

# Grundlagen

### 1.1. Linearsysteme ebener Kurven

Sei  $L \in \text{Cl}(\mathbb{P}^2)$  die Geraden-Äquivalenzklasse<sup>1</sup> des  $\mathbb{P}^2$ . Dann sind Kurven vom Grad  $d$  im  $\mathbb{P}^2$  genau durch das vollständige Linearsystem  $|dL|$  gegeben.

**Definition 1.1.** Für paarweise verschiedene Punkte  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  und  $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sei

$$\mathcal{L} \left( d, \sum_{i=0}^n m_i p_i \right) \subset |dL|$$

das Linearsystem ebener Kurven vom Grad  $d$  mit Multiplizität  $m_i$  im Punkt  $p_i$ , f.a.  $i = 0, \dots, n$ . Für zuvor fest gewählte Punkte schreiben wir kurz:  $\mathcal{L}(d, m_0, \dots, m_n)$ .

Falls  $m_0 = 0, m_1 = \dots = m_n = m \in \mathbb{N}$  gilt, heißt das System *homogen* und wir bezeichnen es mit  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$ . Das System  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ , mit  $m_0 \in \mathbb{N}, m_1 = \dots = m_n = m \in \mathbb{N}$  heißt *quasi-homogen*.

**Bemerkung 1.2.** Wie in der Einleitung bereits geschildert, hat das Linearsystem  $|dL|$  die Dimension  $\frac{d(d+3)}{2}$ .

**Definition 1.3.** Die *virtuelle Dimension* des Linearsystems  $\mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$  ist definiert durch

$$v \left( d, \sum_{i=0}^n m_i p_i \right) := \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=0}^n \frac{m_i(m_i+1)}{2}.$$

Die *erwartete Dimension* des Linearsystems  $\mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$  ist definiert durch

$$e \left( d, \sum_{i=0}^n m_i p_i \right) := \max \left\{ -1, v \left( d, \sum_{i=0}^n m_i p_i \right) \right\}.$$

**Bemerkung 1.4.** Die Dimension des Linearsystems  $\mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$  ist mindestens  $e(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$ . Sind alle durch die Vielfachheiten implizierten Bedingungen linear unabhängig, so stimmen Dimension und erwartete Dimension des Systems überein. Die lineare Unabhängigkeit der Bedingungen kann im Allgemeinen jedoch nicht garantiert werden.

---

<sup>1</sup>Im  $\mathbb{P}^2$  sind alle Geraden linear äquivalent.

**1.1.1. Punkte in allgemeiner Lage.** Um sicher zu stellen, dass das Linearsystem  $\mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$  die kleinstmögliche Dimension hat, können wir die Punkte  $p_0, \dots, p_n$  nicht völlig beliebig wählen.

**Beispiel 1.5.** Die erwartete Dimension  $e(1, p_0 + p_1 + p_2)$  des Linearsystems  $\mathcal{L}(1, p_0 + p_1 + p_2)$  von Geraden im  $\mathbb{P}^2$ , welche die Punkte  $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2$  enthalten, ist  $-1$ . Liegen die Punkte  $p_0, p_1$  und  $p_2$  aber alle auf einer Geraden  $G \subset \mathbb{P}^2$ , so stimmen tatsächliche und erwartete Dimension des Systems offensichtlich nicht überein.

Wir präzisieren nun, was „nicht völlig beliebig“ bedeuten soll.

Sei  $\phi : \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]_d \longrightarrow \mathbb{C}^k$ ,  $k = \sum_{i=0}^n \frac{m_i(m_i+1)}{2}$ , die lineare Abbildung, die ein Polynom  $F$  und alle relevanten partiellen Ableitungen von  $F$  (vgl. Einleitung) in den Punkten  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  auswertet. Dann ist offenbar  $\ker \phi = L(d, m_0, \dots, m_n)$ .

Die Abbildung  $\phi$  hat eine darstellende Matrix  $M(p_0, \dots, p_n)$  bzgl. der Basis  $(z_0^i z_1^j z_2^k)_{i+j+k=d}$ , welche stetig von den Punkten  $p_0, \dots, p_n$  abhängt.

Sei nun für beliebiges  $s \in \mathbb{N}$

$$R_s := \{(p_0, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^2)^{n+1} \mid \text{rg}(M(p_0, \dots, p_n)) \leq s\}$$

die Menge der  $(n+1)$ -Tupel  $(p_0, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^2)^{n+1}$ , für die die Matrix  $M(p_0, \dots, p_n)$  höchstens Rang  $s$  hat.

Offensichtlich gilt für alle  $s \in \mathbb{N} : R_{s-1} \subseteq R_s$  und für hinreichend großes  $s$  gilt  $R_s = (\mathbb{P}^2)^{n+1}$ .

Setze nun  $r := \min\{s \in \mathbb{N} \mid R_s = (\mathbb{P}^2)^{n+1}\}$ , d.h.  $R_{r-1} \neq (\mathbb{P}^2)^{n+1}$  und  $R_r = (\mathbb{P}^2)^{n+1}$ .

Für jedes  $(n+1)$ -Tupel  $(p_0, \dots, p_n) \in R_r \setminus R_{r-1}$  hat die Matrix  $M(p_0, \dots, p_n)$  also den höchstmöglichen Rang und der Kern der Abbildung hat die kleinstmögliche Dimension.

**Definition 1.6.** Wenn ein  $(n+1)$ -Tupel  $(p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{P}^{2(n+1)}$  in  $R_r \setminus R_{r-1}$  liegt, dann sagen wir die Punkte  $p_0, \dots, p_n$  befinden sich *in allgemeiner Lage*.

**Bemerkungen 1.7.** Die Menge  $R_{r-1}$  ist algebraische Teilmenge von  $(\mathbb{P}^2)^{n+1}$ , da sie von den  $r \times r$ -Minoren der Matrix  $M(\cdot)$  von  $\phi$  ausgeschnitten wird. Die Dimension von  $R_{r-1}$  ist also echt kleiner als  $2(n+1)$ , da  $(\mathbb{P}^2)^{n+1}$  irreduzibel ist. Das Komplement von  $R_{r-1}$  ist also Zariski-offen und es macht Sinn von allgemeiner Lage zu sprechen.

Die Abbildung  $\text{rg} : M(p \times q, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{N}$  ist unterhalbstetig. Insbesondere bleibt die allgemeine Lage von Punkten bei kleinen Variationen erhalten und die Dimension eines gegebenen Linearsystems ist als Funktion von  $p_0, \dots, p_n$  oberhalbstetig.

Wir betrachten von nun an quasi-homogene Systeme und setzen stets voraus, dass sich die Punkte  $p_0, \dots, p_n$  des Linearsystems  $\mathcal{L}(d, m_0 p_0 + \sum_{i=1}^n m_i p_i)$  in allgemeiner Lage befinden. Wir schreiben kurz  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ . Das Linearsystem  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ist also nicht eindeutig bestimmt, wohl aber seine Dimension:

**Definition 1.8.** Die *Dimension* des Linearsystems  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  bezeichnen wir mit  $\ell = \ell(d, m_0, n, m)$ .

Nach Bemerkung 1.4 gilt stets die Ungleichung

$$\ell(d, m_0, n, m) \geq e(d, m_0, n, m).$$

**Definition 1.9.** Wir nennen das System  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  *nicht-spezial*, wenn  $\ell(d, m_0, n, m) = e(d, m_0, n, m)$  gilt. Ist  $\ell(d, m_0, n, m) > e(d, m_0, n, m)$ , so sagen wir das System ist *spezial*.

**Lemma 1.10.** Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$  ein Linearsystem ebener Kurven mit  $n \leq 2$ . Dann erhält man die Dimension von  $\mathcal{L}$ , indem man die Punkte  $p_i$  in die Koordinatenpunkte der Ebene legt und die Anzahl der homogenen Monome vom Grad  $d$  bestimmt, die den Vielfachheitsbedingungen genügen.

*Beweis:* Es genügt den Fall  $n = 2$  zu beweisen. Zu beliebigen Punkten  $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2$  gibt es einen Automorphismus  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$  mit  $\varphi(p_0) = [1 : 0 : 0]$ ,  $\varphi(p_1) = [0 : 1 : 0]$ ,  $\varphi(p_2) = [0 : 0 : 1]$ . Die Dimension von  $\mathcal{L}$  ist invariant unter  $\varphi$ , weil  $\varphi$  ein Automorphismus ist. Es genügt also die Dimension von  $\varphi(\mathcal{L})$  zu bestimmen.

Diese erhält man aufgrund der speziellen Form durch einfache kombinatorische Überlegungen, indem man die Anzahl der homogenen Monome vom Grad  $d$  bestimmt, die den Vielfachheitsbedingungen genügen. ■

## 1.2. Aufblasung von Linearsystemen der projektiven Ebene

Wir blasen nun die projektive Ebene in den Punkten  $p_0, \dots, p_n$  auf, um komfortabler mit den Linearsystemen arbeiten zu können. Diese transformieren auf natürliche Weise zu vollständigen Linearsystemen auf der Aufblasung.

Wir fixieren zunächst  $n + 1$  Punkte  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  in allgemeiner Lage.

**Definition 1.11.** Es sei  $\mathbb{P}' \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^2$  die Aufblasung von  $\mathbb{P}^2$  in den Punkten  $p_0, \dots, p_n$ . Den exceptionellen Divisor über dem Punkt  $p_i$  bezeichnen wir mit  $E_i$ , f.a.  $i = 0, \dots, n$ .

**Satz 1.12.** Sei  $H := \nu^*(L)$  der Rückzug einer Geraden  $L \subset \mathbb{P}^2$ . Dann gibt es eine Bijektion zwischen dem vollständigen Linearsystem  $|dH - m_0 E_0 - \sum_{i=1}^n m_i E_i|$  auf der Aufblasung  $\mathbb{P}'$  und dem System  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  der projektiven Ebene.

*Beweis:* Es sei  $\nu^* : \text{Pic}(\mathbb{P}^2) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}')$  die durch  $\nu : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}^2$  induzierte Abbildung und  $H := \nu^*(L)$ . Vorüberlegung:

Wegen  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$  gilt  $\text{Pic}(\mathbb{P}') \cong \text{Pic}(\mathbb{P}^2) \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}$ . Mit  $\nu_* : \text{Pic}(\mathbb{P}') \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}^2)$  bezeichnen wir die Projektion auf  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ . Damit erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}') \xrightarrow{\nu_*} \text{Pic}(\mathbb{P}^2) \rightarrow 0,$$

wobei die erste Abbildung die  $n + 1$  Erzeuger  $e_0, \dots, e_n$  von  $\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}$  auf die exceptionellen Divisoren der Aufblasung abbildet, also  $e_i \mapsto E_i$ , f.a.  $i = 0, \dots, n$ . Unter der Identifikation  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$  leistet die

erste Abbildung  $(b_0, \dots, b_n) \mapsto (0, b_0, \dots, b_n)$ ,  $\nu_*$  schickt  $(a, b_0, \dots, b_n) \mapsto a$  und  $\nu^* : a \mapsto (a, 0, \dots, 0) \in \bigoplus_{i=0}^{n+1} \mathbb{Z}$  spaltet die Sequenz, d.h.  $\nu_* \circ \nu^* = \text{id}_{\text{Pic}(\mathbb{P}^2)}$ .

Wir betrachten nun die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(d, m_0, n, m) &\rightarrow |dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i| \\ D &\mapsto \nu^*(D) - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i, \\ \text{und} \\ \psi : |dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i| &\rightarrow \mathcal{L}(d, m_0, n, m) \\ C &\mapsto \nu_*(C + m_0E_0 + m \sum_{i=1}^n E_i). \end{aligned}$$

Diese sind wohldefiniert:

Der Divisor  $\varphi(D)$  ist genau dann effektiv, wenn  $D$  die Punkte  $p_i$  mit mindestens Vielfachheit  $m_0$  bzw.  $m$  enthält. Wegen  $D \in \mathcal{L}(d, m_0, n, m) \subset |dL|$  ist  $\nu^*(D) \in |dH|$  und  $\varphi(D) \in |dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i|$ .

Wegen  $C \in |dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i|$  ist  $C + m_0E_0 + m \sum_{i=1}^n E_i \in |dH|$  und  $\psi(C) \in |dL|$ . Da  $C$  effektiv ist folgt, dass  $\psi(C)$  in den Punkten  $p_i$  mindestens die geforderten Vielfachheiten hat.

Wir weisen nach, dass  $\varphi$  und  $\psi$  zueinander inverse Bijektionen sind.

Für einen beliebigen Divisor  $D \in \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  erhalten wir nach unserer Vorüberlegung  $\psi(\varphi(D)) = \nu_*(\nu^*(D)) = D$ , also  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{L}(d, m_0, n, m)}$ .

Sei nun  $C \in |dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i|$  beliebig. Da  $C$  effektiv ist, schreiben wir  $C = C' + \sum_{i=0}^n r_i E_i$ , mit  $r_i \geq 0$ , für alle  $i = 0, \dots, n$ . Es gilt  $C'.E_0 = (C - \sum_{j=1}^n r_j E_j).E_0 = C.E_0 - r_0 E_0^2 = m_0 + r_0 =: m'_0$  und  $C'.E_i = (C - \sum_{j=1}^n r_j E_j).E_i = C.E_i - r_i E_i^2 = m + r_i =: m'_i$ , f.a.  $i = 1, \dots, n$ . Daher hat  $\nu_*(C')$  Vielfachheit  $m'_i$  im Punkt  $p_i$  und wir erhalten durch Anwendung von  $\psi$  einen effektiven Divisor  $D \in |dL|$ , der ebenfalls in  $p_0$  Vielfachheit  $m'_0 = r_0 + m_0$  und in den Punkten  $p_i$  Vielfachheit  $m'_i = r_i + m$  hat, f.a.  $i = 1, \dots, n$ .

Da  $\nu$  außerhalb von  $\nu^{-1}(\{p_0, \dots, p_n\})$  ein Isomorphismus ist, erhalten wir  $\nu^*(D) = C' + \sum_{i=0}^n m'_i E_i$  und durch Subtrahieren von  $m_0E_0 + m \sum_{i=1}^n E_i$  den Divisor  $C$  zurück. Es gilt also  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{|dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i|}$ . ■

**Notation 1.13.** Wir strapazieren nun unsere bisherige Notation und bezeichnen das zum Linearsystem  $|dH - m_0E_0 - \sum_{i=1}^n mE_i|$  gehörige Geradenbündel auf  $\mathbb{P}'$  ebenfalls mit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ .

**Bemerkung 1.14.** Die im Beweis von Satz 1.12 definierten Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  definieren auch Vektorraumisomorphismen zwischen Untervektorräumen von  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(dL))$  und  $H^0(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(dH))$ . Dies rechtfertigt obige Notation. Insbesondere gilt  $\ell(d, m_0, n, m) = h^0(\mathbb{P}', \mathcal{L}) - 1$ .

**Satz 1.15.** *Das Linearsystem  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m) \subset \mathbb{P}^2$  ist genau dann nicht-spezial, wenn für das zugehörige Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathbb{P}'$  gilt*

$$h^1(\mathbb{P}', \mathcal{L}) = \max \{0, -1 - v(d, m_0, n, m)\}.$$

*Beweis:* Auf der Aufblasung  $\mathbb{P}'$  gilt  $E_i^2 = -1$ ,  $E_i.E_j = 0$  und  $H.E_i = \nu^*(L).E_i = 0$ , f.a.  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ . Für einen Divisor  $D \in |dH - m_0E_0 - \sum_{i=1}^n mE_i|$  gilt daher wegen der Invarianz von Schnittzahlen unter linearer Äquivalenz  $D.H = D.\nu^*(L) = \nu_*(D).L = d$  und  $D.E_i = -m_iE_i.E_i = m_i$ .

Der kanonische Divisor auf  $\mathbb{P}'$  ist durch  $K = -3H + E_0 + \dots + E_n$  gegeben. Da das arithmetische Geschlecht  $p_a$  invariant unter Aufblasung ist, gilt  $p_a(\mathbb{P}') = p_a(\mathbb{P}^2) = 0$ . Deshalb erhält man mit dem Satz von Riemann-Roch für Flächen:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}) &= \frac{1}{2}D.(D - K) + 1 = \frac{1}{2}(d^2 - m_0^2 - nm^2 - (-3d + m_0 + nm)) + 1 \\ &= v + 1. \end{aligned}$$

Um den Beweis zu vollenden, müssen wir noch  $\dim H^2(\mathbb{P}', \mathcal{L}) = 0$  zeigen. Die Behauptung folgt dann mit einer einfachen Fallunterscheidung.

Zum Beweis benutzen wir, dass der Divisor  $H$  als Rückzug eines amplen Divisors, der Geraden  $L \subset \mathbb{P}^2$ , nef ist. Das heißt der Schnitt von  $H$  mit einem effektiven Divisor ist nicht negativ. Nach Serre-Dualität ist  $\dim H^2(\mathbb{P}', \mathcal{L}) = \dim H^0(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(K - D)) =: l(K - D)$ . Wäre  $l(K - D) > 0$ , so wäre der Divisor  $K - D$  effektiv und damit  $(K - D).H \geq 0$ . Es gilt jedoch  $(K - D).H = -(3 + d) < 0$ . ■

**Bemerkung 1.16.** Sei  $\mathcal{L}$  das dem Linearsystem  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  entsprechende Geradenbündel auf  $\mathbb{P}'$ . Wir haben im obigen Beweis gezeigt, dass für  $\mathcal{L}$  die Gleichung  $\chi(\mathcal{L}) = v(d, m_0, n, m) + 1$  gilt. Wir nehmen dies zum Anlass für die folgende

**Definition 1.17.** Für ein Geradenbündel  $\mathcal{L}$  über der Aufblasung  $\mathbb{P}'$  definieren wir die *virtuelle Dimension* von  $\mathcal{L}$  durch

$$v(\mathcal{L}) := \chi(\mathcal{L}) - 1$$

und die *erwartete Dimension* von  $\mathcal{L}$  durch

$$e(\mathcal{L}) := \max\{-1, v(\mathcal{L})\}.$$

Da diese Definition, wie bereits erwähnt, eine Konsequenz aus dem Satz von Riemann-Roch ist, werden wir diesen stets implizit in unseren Berechnungen anwenden.

Wir betrachten nun Schnittzahlen von Divisoren auf der Aufblasung  $\mathbb{P}'$ . Da Schnittzahlen invariant unter linearer Äquivalenz sind, können wir von der Schnittzahl eines Linearsystems mit einer Kurve und dem Selbstschnitt eines Linearsystems sprechen. Mit den im Beweis von Satz 1.15 gegebenen Schnittzahlen überprüft man das folgende

**Lemma 1.18.** *Sei  $\mathcal{L} := \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ein quasi-homogenes Linearsystem. Dann ist der Selbstschnitt von  $\mathcal{L}$  gegeben durch  $\mathcal{L}^2 = d^2 - m_0^2 - nm^2$ . ■*

Wir können auch von dem *Geschlecht*  $g_{\mathcal{L}}$  der Kurven des Systems  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m) \subset \mathbb{P}^2$  sprechen, indem wir das arithmetische Geschlecht des zugehörigen Geradenbündels  $\mathcal{L}$  auf der Aufblasung  $\mathbb{P}'$  betrachten.

**Lemma 1.19.** *Das Geschlecht  $g_{\mathcal{L}}$  des Linearsystems  $\mathcal{L} := \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ist durch  $g_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(d(d-3) - m_0(m_0-1) - nm(m-1)) + 1$  gegeben.*

*Insbesondere gilt  $v(d, m_0, n, m) = \mathcal{L}^2 - g_{\mathcal{L}} + 1$ .*

*Beweis:* Es sei  $dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i =: D \in \mathcal{L}$ . Der kanonische Divisor auf  $\mathbb{P}'$  ist gegeben durch  $K = -3H + E_0 + \dots + E_n$ . Nach Adjunktions- oder Geschlechtsformel gilt

$$\begin{aligned} 2g_{\mathcal{L}} - 2 &= D \cdot (D + K) \\ &= D \cdot ((d-3)H - (m_0-1)E_0 - (m-1)E_1 - \dots - (m-1)E_n) \\ &= d(d-3) - m_0(m_0-1) - nm(m-1). \end{aligned}$$

■

Wir formulieren nun noch einige einfache Resultate.

**Lemma 1.20** (Multiplicity One Lemma). *Sei  $\mathcal{M}$  ein Linearsystem auf einer Varietät  $X$ ,  $p_1, \dots, p_n \in X$  Punkte in allgemeiner Lage und  $\mathcal{M}(-\sum_{i=1}^n p_i)$  das Teilsystem von Divisoren aus  $\mathcal{M}$ , die die Punkte  $p_1, \dots, p_n$  schneiden. Dann gilt*

$$\dim \mathcal{M}(-\sum_{i=1}^n p_i) = \max\{-1, \dim \mathcal{M} - n\}.$$

*Beweis:* (nach [CM98, S. 193]) Die Behauptung folgt via Induktion über die Anzahl  $n$  der Punkte  $p_1, \dots, p_n \in X$ . Der Induktionsanfang ist klar. Im Induktionsschritt wählt man den nächsten Punkt  $p_{n+1} \in X$  so, dass er kein Basispunkt des Systems  $\mathcal{M}(-\sum_{i=1}^n p_i)$  ist (sofern dies nicht leer ist). Dies liefert eine weitere Bedingung, welche von den bisherigen Bedingungen nicht linear abhängt, da der gewählte Punkt sonst auf allen Kurven des Systems liegen müsste. ■

**Korollar 1.21.** *Seien  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  Punkte in allgemeiner Lage,  $k < n$  und  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^k m_i p_i)$  ein nicht-speziales Linearsystem. Dann ist das Linearsystem  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^k m_i p_i + \sum_{j=k+1}^n p_j)$  ebenfalls nicht-spezial und  $v(\mathcal{L}') = v(\mathcal{L}) - (n-k)$ . ■*

**Lemma 1.22.** *Es gelten folgende Aussagen:*

- i)  $\mathcal{L}(d, 0, 1, m)$  ist für alle  $d$  und  $m$  nicht-spezial.
- ii) Ist  $e(d, m_0, n, m) > -1$  und  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  nicht-spezial, so ist  $\mathcal{L}(d', m'_0, n', m')$  für  $d' \geq d, m'_0 \leq m_0, n' \leq n$  und  $m' \leq m$  ebenfalls nicht-spezial.
- iii) Ist  $e(d, m_0, n, m) = -1$  und  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  nicht-spezial, so ist  $\mathcal{L}(d', m'_0, n', m')$  für  $d' \leq d, m'_0 \geq m_0, n' \geq n$  und  $m' \geq m$  ebenfalls nicht-spezial. Das heißt, beide Systeme sind leer.
- iv) Die Systeme  $\mathcal{L}(d, 0, 2, d)$  und  $\mathcal{L}(2d, 0, 5, d)$  sind für  $d \geq 2$  spezial.

*Beweis:* (nach [CM98, S. 193]) Die erste Aussage folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vielfachheitsbedingungen des einen Punktes, was man leicht überprüft.

Zu Aussage *ii*). Im Falle  $d' = d$  liefern die Ungleichungen  $m'_0 \leq m_0, n' \leq n$  und  $m' \leq m$ , dass die an die Kurven in  $\mathcal{L}(d, m'_0, n', m')$  gestellten Bedingungen auch für  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  gelten müssen. Da diese nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt für  $d = d'$  die Behauptung. Wir können also annehmen, dass  $m'_0 = m_0, n' = n, m' = m$  und  $d' = d + 1$  gilt und den Beweis dann induktiv fortführen. Auf der Aufblasung  $\mathbb{P}'$  betrachten wir die Idealgarbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_H \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}'} \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0.$$

Wir tensorieren mit dem Geradenbündel  $\mathcal{L}(d + 1, m_0, n, m)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_H \otimes \mathcal{L}(d + 1, m_0, n, m) &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(-H) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}((d + 1)H - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(dH - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i) \\ &= \mathcal{L}(d, m_0, n, m), \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}'} \otimes \mathcal{L}(d + 1, m_0, n, m) &= \mathcal{L}(d + 1, m_0, n, m) \text{ und} \\ \mathcal{O}_H \otimes \mathcal{L}(d + 1, m_0, n, m) &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}((d + 1)H - m_0E_0 - m \sum_{i=1}^n E_i)|_H \\ &= \mathcal{O}_H(d + 1). \end{aligned}$$

Wir erhalten daher auf  $\mathbb{P}'$  die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(d, m_0, n, m) \longrightarrow \mathcal{L}(d + 1, m_0, n, m) \longrightarrow \mathcal{O}_H(d + 1) \longrightarrow 0.$$

Nach Voraussetzung und Satz 1.15 gilt  $H^1(\mathbb{P}', \mathcal{L}(d, m_0, n, m)) = 0$ .

Mit  $H^1(H, \mathcal{O}_H(d + 1)) = 0$  folgt die Behauptung aus der langen exakten Kohomologiesequenz zusammen mit Satz 1.15.

Mit analoger Argumentation reduziert man Aussage *iii*) auf den Fall  $m'_0 = m_0, n' = n$  und  $m' = m$ . Die selbe exakte Sequenz auf  $H^0$ -Ebene liefert dann den Beweis.

Zu *iv*). Es gilt  $v(d, 0, 2, d) = v(2d, 0, 5, d) = \frac{d(1-d)}{2} < 0$ . Da es durch zwei allgemeine Punkte stets eine Gerade und durch fünf allgemeine Punkte stets eine Konik gibt, folgt die Behauptung durch Potenzieren der jeweiligen Gleichung mit  $d$ . ■

Wir zitieren nun eine Version des klassischen Satzes von Bézout, welcher uns im folgenden und späteren Beweisen von Nutzen sein wird.

**Lemma 1.23** (Bézout). *Es sei  $C \subset \mathbb{P}^2$  eine glatte Kurve vom Grad  $d$  und  $C' \subset \mathbb{P}^2$  eine Kurve vom Grad  $d'$ , welche  $C$  nicht als Komponente enthält. Dann gilt*

$$\sum_{p \in C \cap C'} I_p(C, C') = dd'.$$

*Dabei bezeichne  $I_p(C, C')$  die Schnittmultiplizität von  $C$  und  $C'$  im Punkt  $p \in C \cap C'$ .*

*Beweis:* Siehe [Sha94, S.20]. ■

**Lemma 1.24.** *Es gelten folgende Aussagen:*

- i)  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ist für  $m_0 > d$  nicht-spezial und leer.
- ii)  $\ell(d, d, n, m) = \max\{-1, d - nm\}$  und  $\mathcal{L}(d, d, n, m)$  ist genau dann speziell, wenn  $n \geq 1, m \geq 2$  und  $d \geq nm$  gilt.
- iii) Ist  $m + m_0 \geq d + 1$ , so gilt  
 $\ell(d, m_0, n, m) = \ell(d - n(m + m_0 - d), m_0 - n(m + m_0 - d), n, d - m_0)$ .
- iv) Ist  $m \geq 2$ , so ist  $\ell(d, d - 1, n, m) = \max\{-1, 2d - 2nm + n\}$ .

*Beweis:* (nach [CM98, S. 194]) Es sei  $L_i$  die Gerade durch die Punkte  $p_0$  und  $p_i$ , f.a.  $i = 1, \dots, n$ . Wir beweisen zunächst Aussage iii). Jeder Divisor  $C$  des Linearsystems  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  muss wegen der Bedingung  $I_{p_i}(C, L_i) + I_{p_0}(C, L_i) = m + m_0 \geq d + 1$  nach Lemma 1.23 die Geraden  $L_i$  als Komponente enthalten. Daher gilt  $\ell(d, m_0, n, m) = \ell(d - n, m_0 - n, n, m - 1)$ . Durch  $(m + m_0 - d)$ -fache Iteration erhalten wir somit die Behauptung.

Analog erhält man die Aussage i).

Gilt  $m_0 = d$  und  $m \geq 1$ , so liefert iii)  $\ell(d, d, n, m) = \ell(d - nm, d - nm, n, 0)$  und damit den ersten Teil der Aussage ii). Der Vergleich der virtuellen Dimensionen  $v(d, d, n, m)$  und  $v(d - mn, d - mn, n, 0)$  liefert die Aussage über die Spezialität.

Durch Anwendung von iii) und des Multiplicity One Lemmas folgt Aussage iv). ■

### 1.3. (-1)-spezielle Systeme

In diesem Abschnitt treffen wir die letzten Vorbereitungen, um die bereits in der Einleitung angekündigte Vermutung über spezielle Systeme von Harbourne und Hirschowitz formulieren zu können.

**Definition 1.25.** Ein Linearsystem  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  mit  $\mathcal{L}^2 = -1$  und  $g_{\mathcal{L}} = 0$  heißt *quasi-homogene (-1)-Klasse*. Eine irreduzible, rationale Kurve  $A \subset \mathbb{P}^2$ , deren strikte Transformation auf  $\mathbb{P}^1$  eine glatte Kurve  $A'$  mit Selbstschnitt -1 liefert, heißt *(-1)-Kurve bzgl.  $\mathcal{L}$* .

Die Kurve  $A'$  ist birational zu  $A$ , also ebenfalls rational und Lemma 1.19 liefert, dass die virtuelle Dimension einer (-1)-Klasse Null ist.

**Lemma 1.26.** *Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ein quasi-homogenes Linearsystem und  $A \in \mathcal{L}$  eine (-1)-Kurve bzgl.  $\mathcal{L}$ . Dann gilt  $\mathcal{L} = \{A\}$ . Insbesondere ist  $v(\mathcal{L}) = 0$  und  $\mathcal{L}$  ist nicht-spezial.*

*Beweis:* Auf  $\mathbb{P}^1$  gilt für einen beliebigen Divisor  $D \in \mathcal{L}$  nach Voraussetzung  $D.A < 0$ . Nach Lemma 1.23 muss  $D$  die Kurve  $A$  als Komponente enthalten. Da  $D$  und  $A$  die selbe Divisorklasse haben, folgt  $D = A$ . ■

Eine quasi-homogene (-1)-Klasse besteht also aus genau einer (-1)-Kurve bzgl.  $\mathcal{L}$ . Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Falls ein System  $\mathcal{L}$  eine (-1)-Kurve  $A$  bzgl.  $\mathcal{L}$  enthält folgt nicht, dass  $\mathcal{L}$  eine quasi-homogene (-1)-Klasse ist. Die Existenz von (-1)-Kurven, die ein Linearsystem  $\mathcal{L}$  schneiden, wirkt sich wie folgt aus.



**Lemma 1.27.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein nicht leeres Linearsystem und  $A_1, \dots, A_r$  seien  $(-1)$ -Kurven bzgl.  $\mathcal{L}$ . Auf der Aufblasung  $\mathbb{P}^l$  gelte  $\mathcal{L}.A_j = -N_j$  mit  $N_j \geq 1$ , f.a.  $j = 1, \dots, r$ . Dann gilt auf der Aufblasung  $\mathbb{P}^l$ :*

- i)  $\mathcal{L}$  enthält  $\sum_{j=1}^r N_j A_j$  als fixen Divisor, also  $\sum_{j=1}^r N_j A_j \subset \bigcap_{D \in \mathcal{L}} D$ .
- ii)  $A_i.A_j = 0$ , für  $i \neq j$ .
- iii) Für das System  $\mathcal{M} = \mathcal{L} - \sum_{j=1}^r N_j A_j$  gilt:  

$$v(\mathcal{M}) - v(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r N_j(N_j - 1).$$
- iv) Ist  $v(\mathcal{M}) \geq 0$  und  $N_j \geq 2$  für ein  $j \in \{1, \dots, r\}$ , so ist  $\mathcal{L}$  speziell.

*Beweis:* (nach [CM98, S. 202]) Wir arbeiten auf der Aufblasung  $\mathbb{P}^l$  und verwenden für Objekte auf  $\mathbb{P}^l$  der Einfachheit halber die selbe Notation, wie für die korrespondierenden Objekte im  $\mathbb{P}^2$ .

Zu i): Wegen der Voraussetzung  $\mathcal{L}.A_j = -N_j < 0$  muss jede Kurve  $C \in \mathcal{L}$  den Divisor  $A_j$  als Komponente enthalten und iterativ folgt, dass  $A_j$  mit Vielfachheit  $N_j$  enthalten ist. Es gilt also  $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^r N_j A_j + \mathcal{M}$ , für ein Linearsystem  $\mathcal{M}$  mit  $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{M})$ .

Zu ii): Wenn zwei  $(-1)$ -Kurven  $A_1$  und  $A_2$  bzgl.  $\mathcal{L}$  das System  $\mathcal{L}$  negativ schneiden, folgt wie zuvor  $A_1, A_2 \in \bigcap_{D \in \mathcal{L}} D \Rightarrow A_1 + A_2 \in \bigcap_{D \in \mathcal{L}} D$ . : (\*)

Da  $A_1$  und  $A_2$   $(-1)$ -Kurven bzgl.  $\mathcal{L}$  sind, gilt  $0 = v(A_i) = \chi(\mathcal{O}(A_i)) - 1$ . Mit dem Satz von Riemann-Roch folgt  $A_i.K_{\mathbb{P}^l} = -1$  und

$$\begin{aligned} v(A_1 + A_2) &= \chi(\mathcal{O}(A_1 + A_2)) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(A_1 + A_2).(A_1 + A_2 - K_{\mathbb{P}^l}) \\ &= A_1.A_2. \end{aligned}$$

Würden sich  $A_1$  und  $A_2$  nun schneiden, wäre  $0 \neq A_1.A_2 = v(A_1 + A_2)$ , im Widerspruch zu (\*).

Zu iii): Zunächst gilt  $\mathcal{M}^2 = \mathcal{L}^2 + \sum_{j=1}^r N_j^2$  und  $\mathcal{M}.K = \mathcal{L}.K + \sum_{j=1}^r N_j$ . Der Satz von Riemann-Roch liefert nun:

$$\begin{aligned} v(\mathcal{M}) - v(\mathcal{L}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}^2 - \mathcal{M}.K) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}.K) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 + \sum_{j=1}^r N_j^2 - \mathcal{L}.K - \sum_{j=1}^r N_j) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}.K) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r N_j(N_j - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Zu iv): Gilt nun  $N_j \geq 2$  für ein  $j \in \{1, \dots, r\}$ , so folgt mit iii)  $v(\mathcal{M}) > v(\mathcal{L})$  und daher  $\dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{M}) \geq v(\mathcal{M}) > v(\mathcal{L})$ . ■

Dadurch motiviert notieren wir

**Definition 1.28.** Ein Linearsystem  $\mathcal{L}$  heißt *(-1)-speziell*, wenn es (-1)-Kurven  $A_1, \dots, A_r$  bzgl.  $\mathcal{L}$  gibt, so dass folgendes gilt:

- i)  $\mathcal{L}.A_j = -N_j$  mit  $N_j \geq 1$  für alle  $j = 1, \dots, r$  und  $N_j \geq 2$  für einige  $j \in \{1, \dots, r\}$ .
- ii) Das Residuensystem  $\mathcal{M} := \mathcal{L} - \sum_{j=1}^r N_j A_j$  hat nicht-negative virtuelle Dimension  $v(\mathcal{M}) \geq 0$ .
- iii)  $\mathcal{M}.C \geq 0$ , für jede (-1)-Kurve  $C$  bzgl.  $\mathcal{L}$ .

Die Bedingung iii) stellt sicher, dass keine weiteren (-1)-Kurven im fixen Divisor des Residuensystems  $\mathcal{M}$  liegen. Mit dieser abschließenden Definition formulieren wir schließlich

#### 1.4. Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung

**Vermutung 1.29** (Harbourne-Hirschowitz-Vermutung). *Jedes spezielle System ist (-1)-speziell.*

**Bemerkung 1.30.** Die Frage, ob die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung stimmt, konnte bisher für nur wenige Fälle beantwortet werden. Die Umkehrung ist gerade die Aussage iv) des zuvor gezeigten Lemmas.

Wir bemerken jedoch noch folgende Aussage.

**Theorem 1.31.** *Für  $n \leq 9$  ist das homogene System  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  genau dann speziell, wenn es (-1)-speziell ist.*

Dieses Theorem ist ein klassisches Resultat und findet sich beispielsweise in [Nag61]. Mit der folgenden Proposition sieht man insbesondere, dass es für  $n = 4$  und  $n = 9$  keine speziellen Linearsysteme gibt. Dies gilt nicht nur für die Zahlen 4 und 9, sondern für alle Quadratzahlen. Wir werden im dritten Kapitel noch einmal darauf zurück kommen.

Die folgende Klassifikation aller (-1)-speziellen, homogenen Systeme findet sich im Abschnitt 2 des Artikels [CM00].

**Proposition 1.32.** *Die (-1)-speziellen homogenen Systeme sind gegeben durch  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  mit*

- i)  $n = 2$       und       $m \leq d \leq 2m - 2$
- ii)  $n = 3$       und       $\frac{3}{2}m \leq d \leq 2m - 2$
- iii)  $n = 5$       und       $2m \leq d \leq \frac{1}{2}(5m - 2)$
- iv)  $n = 6$       und       $\frac{12}{5}m \leq d \leq \frac{1}{2}(5m - 2)$
- v)  $n = 7$       und       $\frac{21}{8}m \leq d \leq \frac{1}{3}(8m - 2)$
- vi)  $n = 8$       und       $\frac{48}{17}m \leq d \leq \frac{1}{6}(17m - 2)$

*Beweis:* Siehe [CM00, Proposition 2.4]. ■

Diese Systeme werden im dritten und vierten Kapitel eine wichtige Rolle spielen. Vorher schaffen wir im nächsten Kapitel die Grundlage für unser weiteres Vorgehen.

## KAPITEL 2

### Degeneration der Ebene

Wir führen nun eine Konstruktion durch, welche für unser weiteres Vorgehen grundlegend ist. Mittels dieser Konstruktion werden wir später die in der Einleitung erwähnte Rekursion durchführen.

#### 2.1. Konstruktion der degenerierten Ebene

Wir betrachten die quasi-projektive Varietät  $V := \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  mit den Projektionen  $p_1 : V \rightarrow \mathbb{A}^1$ ,  $p_2 : V \rightarrow \mathbb{P}^2$ .

Für  $a \in \mathbb{A}^1$  sei  $V_a := p_1^{-1}(\{a\}) = \mathbb{P}^2 \times \{a\}$ . Wir blasen  $V$  nun in einer Geraden  $L \subset V_0$  auf und erhalten damit eine neue Varietät  $X$ . Um die Struktur von  $X$  besser verstehen zu können, betten wir  $V$  mittels der Segre-Einbettung  $s_{2,1} : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$  in  $\mathbb{P}^5$  ein: (Für Details bzgl. der Abbildung verweise ich auf [Sha94].)

Seien dazu Koordinaten  $x_0, x_1, x_2$  auf  $\mathbb{P}^2$ ,  $y_0, y_1$  auf  $\mathbb{P}^1$  und  $z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}, z_{20}, z_{21}$  auf  $\mathbb{P}^5$  gegeben, die den Gleichungen  $z_{ij} = x_i y_j$  ( $i = 0, 1, 2, j = 0, 1$ ) auf  $\Sigma := s_{2,1}(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1)$  genügen. Bezüglich dieser Koordinaten ist  $V = \{([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid y_1 \neq 0\}$ .

Wir identifizieren  $V$  im folgenden mit seinem Bild unter der Segre-Einbettung:

$$\begin{aligned} V &= \{[z_{00} : z_{01} : z_{10} : z_{11} : z_{20} : z_{21}] \in \mathbb{P}^5 \mid \exists_{i \in \{0,1,2\}} : z_{i1} \neq 0\} \\ &= \{[x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1 : x_2 y_0 : x_2 y_1] \in \mathbb{P}^5 \mid \exists_{i \in \{0,1,2\}} : x_i \neq 0\} \\ &= \{[\frac{y_0}{y_1} x_0 : x_0 : \frac{y_0}{y_1} x_1 : x_1 : \frac{y_0}{y_1} x_2 : x_2] \in \mathbb{P}^5 \mid \exists_{i \in \{0,1,2\}} : x_i \neq 0\} \\ &= \{[t x_0 : x_0 : t x_1 : x_1 : t x_2 : x_2] \in \mathbb{P}^5 \mid t \in \mathbb{A}^1, \exists_{i \in \{0,1,2\}} : x_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dann gilt  $V_0 = \{u \in V \mid u_{00} = u_{10} = u_{20} = 0\}$  und die Koordinaten  $z_{ij}$  auf  $\Sigma$  erfüllen offenbar die Gleichungen:

$$(1) \quad z_{00} z_{11} = z_{01} z_{10}, \quad z_{20} z_{01} = z_{21} z_{00}, \quad z_{20} z_{11} = z_{21} z_{10}.$$

Ohne Einschränkung blasen wir  $V$  entlang der Geraden

$$L := s_{2,1}(\{x_0 = 0\} \times \{y_0 = 0\})$$

auf. Sei  $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$  die Standardüberdeckung des  $\mathbb{P}^2$ . Dann hat  $L$  in den affinen Karten  $\mathcal{U}_i := s_{2,1}(U_i \times \mathbb{A}^1)$  die lokal definierenden Funktionen  $z_{01}, z_{i0}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) und die Aufblasung von  $V$  entlang  $L$  über  $\mathcal{U}_i$  die Gestalt ( $i = 0, 1, 2$ )

$$(2) \quad X_i := \{(u, [t_0 : t_1]) \in (V \cap \mathcal{U}_i) \times \mathbb{P}^1 \mid t_1 u_{01} - t_0 u_{i0} = 0\} \xrightarrow{\sigma_i} V.$$

Die  $X_i$  und die Projektionen  $\sigma_i$  verkleben zu einer Varietät  $X$  mit einem Morphismus  $\pi : X \rightarrow V$  vermöge der Übergangsabbildungen ( $i, j = 0, 1, 2, i \neq j$ )

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} : \sigma_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) &\longrightarrow \sigma_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \\ (u, [t_0 : t_1]) &\longmapsto \left( u, \left[ \frac{u_{i1}}{u_{j1}} t_0 : t_1 \right] \right). \end{aligned}$$

Die oben definierten Abbildungen sind wegen  $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = \text{id}_{\sigma_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}$  offensichtlich Isomorphismen und die folgende Rechnung zeigt, dass sie die  $X_i$  tatsächlich „verkleben“:

⌈ Sei  $(u, [t_0 : t_1]) \in \sigma_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ . Dann gilt

$$0 = t_1 u_{01} - t_0 u_{i0} = t_1 u_{01} - t_0 \frac{u_{j1} u_{i0}}{u_{j1}} \stackrel{(1)}{=} t_1 u_{01} - t_0 \frac{u_{i1} u_{j0}}{u_{j1}} = t_1 u_{01} - \left( \frac{u_{i1}}{u_{j1}} t_0 \right) u_{j0}.$$

Also ist  $\varphi_{ij}((u, [t_0 : t_1])) \in \sigma_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ . ⌋

Wir untersuchen nun die Struktur von  $X$ . Dazu betrachten wir die Abbildung  $\pi_1 := p_1 \circ \pi : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ . Die Faser von  $\pi_1$  über einem Punkt  $a \in \mathbb{A}^1$  bezeichnen wir mit  $X_a := \pi_1^{-1}(\{a\})$ .

**Satz 2.1.** *Die Fasern  $X_a$  sind für alle  $a \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  isomorph zu  $\mathbb{P}^2$ . Die Faser  $X_0$  ist die Vereinigung der strikten Transformierten*

$$\mathbb{P} := \overline{\pi^{-1}(V_0 \setminus L)}$$

von  $V_0$  und dem exzeptionellen Divisor

$$\mathbb{F} := \pi^{-1}(L).$$

$\mathbb{P}$  ist isomorph zu  $\mathbb{P}^2$  und  $\mathbb{F}$  ist isomorph zu der Aufblasung von  $\mathbb{P}^2$  in einem Punkt, mit exzeptionellem Divisor  $\mathbb{E} = \mathbb{P} \cap \mathbb{F}$ .

*Beweis:* Die ersten beiden Aussagen sind klar, da  $\pi$  außerhalb von  $L$  ein Isomorphismus ist.

Der exzeptionelle Divisor  $\mathbb{F} = \pi^{-1}(L)$  wird überdeckt von

$$\pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_i) = \{([0 : 0 : 0 : u_{11} : 0 : u_{21}], [t_0 : t_1]) \in (L \cap \mathcal{U}_i) \times \mathbb{P}^1 \mid u_{i1} \neq 0\},$$

$i = 1, 2$ . Die Übergangsfunktion

$$\sigma_{12} : (L \cap \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow (L \cap \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \times \mathbb{P}^1$$

ist die Einschränkung von  $\varphi_{12}$  auf  $L$  und folglich gegeben durch:

$$\sigma_{12}(u, \xi) = \left( u, \begin{pmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi \right) = \left( u, \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi \right).$$

Damit erhalten wir sofort  $\pi^{-1}(L) \cong \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$ .

Die Regelfläche  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$  ist aber, wie behauptet, isomorph zur Aufblasung von  $\mathbb{P}^2$  in einem Punkt. Siehe dazu auch [Har77, S. 374/375].

Zu  $\pi^{-1}(V_0 \setminus L)$ . In den Karten  $\mathcal{U}_i$  hat  $V_0$  die lokal definierende Funktion  $z_{i0}$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Mit der Gleichung (2) folgt:

$$\pi^{-1}((V_0 \setminus L) \cap \mathcal{U}_i) = \{([0 : u_{01} : 0 : u_{11} : 0 : u_{21}], [1 : 0]) \mid u_{01} \neq 0\}. \text{ Also ist}$$

$$\overline{\pi^{-1}((V_0 \setminus L) \cap \mathcal{U}_i)} = \{([0 : u_{01} : 0 : u_{11} : 0 : u_{21}], [1 : 0]) \mid \exists_{i \in \{0,1,2\}} : u_{i1} \neq 0\}$$

und  $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^2 \times \{[1 : 0]\} \cong \mathbb{P}^2$ .

Die Übergangsfunktionen von  $\mathbb{F}$  lassen den Punkt  $[1 : 0]$  invariant. Daher ist

$$\mathbb{E} := \mathbb{P} \cap \mathbb{F} = \{([0 : 0 : 0 : u_{11} : 0 : u_{21}], [1 : 0]) \mid \exists_{i \in \{1,2\}} : u_{i1} \neq 0\} \cong \mathbb{P}^1$$

ein globaler Schnitt in  $\mathbb{F}$ . Mittels Einschränkung der Übergangsfunktion von  $\mathbb{F}$  erhalten wir  $N_{\mathbb{E}/\mathbb{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{E}}(-1)$ . Da  $\mathbb{E}$  folglich Selbstschnitt  $-1$  hat, liefert dies die Behauptung. Siehe dazu auch [GH94, S. 514–520]. ■

**Definition 2.2.** Die Faser  $X_0$  heißt *degenerierte Ebene* und wird im folgenden mit  $\mathbb{X}_0$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.3.**

- i)  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{F}$  schneiden sich transversal in  $\mathbb{E}$ .
- ii) Der Beweis des obigen Lemmas liefert insbesondere  $\mathbb{F} \cong \mathbb{P}(N_{L/V})$ .

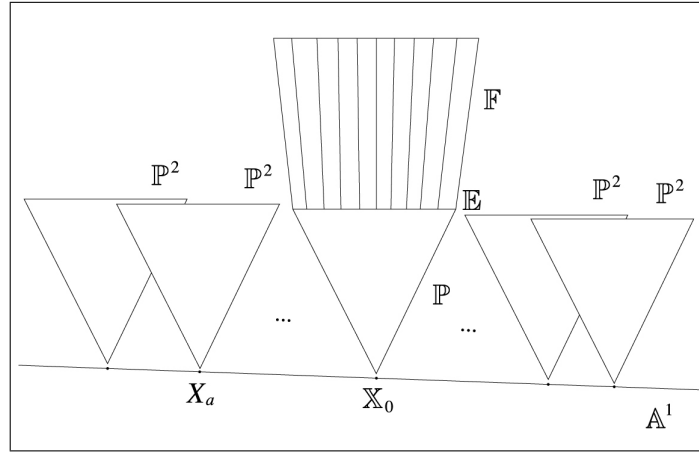


ABBILDUNG 1. die Varietät  $X$

## 2.2. Die Picard-Gruppe der degenerierten Ebene

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wieso die Degeneration der Ebene für uns von Interesse ist. Wir haben nun die Möglichkeit Geradenbündel auf  $\mathbb{X}_0$  zu „zerlegen“.

**Satz 2.4.** Die Picard-Gruppe von  $\mathbb{X}_0$  ist das Faserprodukt von  $\text{Pic}(\mathbb{P})$  und  $\text{Pic}(\mathbb{F})$  über  $\text{Pic}(\mathbb{E})$  bzgl. der Rückzugsabbildungen  $\text{Pic}(\mathbb{P}) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{E})$ ,  $\text{Pic}(\mathbb{F}) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{E})$ .

*Beweis:* Es sei  $\tilde{\mathbb{X}}_0 := \mathbb{P} \dot{\cup} \mathbb{F}$ . Wir betrachten die Abbildungen

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{X}}_0}^*, \quad f \mapsto (f|_{\mathbb{P}}, f|_{\mathbb{F}})$$

$$\psi : \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{X}}_0}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^*, \quad (g, h) \mapsto \frac{g|_{\mathbb{E}}}{h|_{\mathbb{E}}}$$

und erhalten damit die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^* \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{X}}_0}^* \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^* \longrightarrow 1.$$

Diese liefert die folgende lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow H^0(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \rightarrow H^0(\tilde{X}_0, \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}^*) \rightarrow H^0(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^*) \rightarrow \\
&\rightarrow H^1(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \rightarrow H^1(\tilde{X}_0, \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}^*) \rightarrow H^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^*) \rightarrow \\
&\rightarrow H^2(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \rightarrow \dots
\end{aligned}$$

Es gilt  $H^0(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \cong \mathbb{C}^*$ ,  $H^0(\tilde{X}_0, \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}^*) \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ,  $H^0(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^*) \cong \mathbb{C}^*$ . Unter dieser Identifikation leistet die erste Abbildung auf  $H^0$ -Niveau  $z \mapsto (z, z)$ . Die zweite Abbildung auf  $H^0$ -Niveau schickt  $(v, w) \mapsto \frac{v}{w}$  und ist damit offenbar surjektiv. Wir müssen somit den ersten Teil der Sequenz nicht weiter berücksichtigen und erhalten

$$1 \rightarrow H^1(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\tilde{X}_0, \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}^*) \xrightarrow{\psi^*} H^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^*) \rightarrow H^2(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \rightarrow \dots$$

Damit gilt  $H^1(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) \cong \text{im}(\varphi^*) = \ker(\psi^*)$ . Mit  $H^1(\mathbb{X}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{X}_0}^*) = \text{Pic}(\mathbb{X}_0)$ ,  $H^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{E}}^*) = \text{Pic}(\mathbb{E})$ ,  $H^1(\tilde{X}_0, \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}^*) = \text{Pic}(\tilde{X}_0) = \text{Pic}(\mathbb{P}) \times \text{Pic}(\mathbb{F})$  folgt schließlich  $\text{Pic}(\mathbb{X}_0) \cong \ker(\text{Pic}(\mathbb{P}) \times \text{Pic}(\mathbb{F}) \xrightarrow{\psi^*} \text{Pic}(\mathbb{E}))$ . Dabei schickt die Abbildung  $\psi^*$  das Paar  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  von Geradenbündeln über  $\mathbb{P}$  bzw.  $\mathbb{F}$  auf das Geradenbündel  $\mathcal{C}|_{\mathbb{E}} \otimes (\mathcal{D}|_{\mathbb{E}})^\vee$  über  $\mathbb{E}$ . ■

**Korollar und Definition 2.5.** *Sei  $\mathcal{X} \in \text{Pic}(\mathbb{X}_0)$  ein beliebiges Geradenbündel auf  $\mathbb{X}_0$ . Dann existieren  $c, d \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\mathcal{X}_{\mathbb{P}} := \mathcal{X}|_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$  und  $\mathcal{X}_{\mathbb{F}} := \mathcal{X}|_{\mathbb{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(cH - d\mathbb{E})$  gilt. Dabei sei  $H$  der Rückzug einer Geraden  $L \subset \mathbb{P}^2$  auf  $\mathbb{F}$ . Das zugehörige Geradenbündel bezeichnen wir im folgenden mit  $\mathcal{X}(c, c - d)$ .*

*Beweis:* Die Picard-Gruppe von  $\mathbb{P}$  wird vom Rückzug  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$  des Hyperflächenbündels auf  $\mathbb{P}^2$  erzeugt, d.h. jedes Geradenbündel auf  $\mathbb{P}$  ist von der Form  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ , für geeignetes  $d \in \mathbb{Z}$ . Die Picard-Gruppe von  $\mathbb{F}$  wird von dem Rückzug  $H$  einer Geraden  $L$  im  $\mathbb{P}^2$  (aufgefasst als Divisor) und dem exzeptionellen Divisor  $\mathbb{E}$  erzeugt. Es gilt  $H \cdot \mathbb{E} = (\pi^*L) \cdot \mathbb{E} = 0$ . Anhand der Übergangsfunktionen überprüft man nun  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(H)|_{\mathbb{E}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{E}}$  und  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})|_{\mathbb{E}} \cong N_{\mathbb{E}/\mathbb{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{E}}(-1)$ . Mit Satz 2.4 folgt nun für ein Geradenbündel  $\mathcal{X} \in \text{Pic}(\mathbb{X}_0)$ :

$$\mathcal{X}_{\mathbb{P}} := \mathcal{X}|_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) \text{ und } \mathcal{X}_{\mathbb{F}} := \mathcal{X}|_{\mathbb{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(cH - d\mathbb{E}),$$

für geeignete  $c, d \in \mathbb{Z}$ , denn die Einschränkungen von  $\mathcal{X}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$  auf  $\mathbb{E}$  müssen übereinstimmen. ■

### 2.3. Familien von Linearsystemen in $X$ und das Ziel der Degeneration

Wir stellen nun den Bezug zu unserem eigentlichen Problem her. Das Ziel ist, die Dimension eines gegebenen Linearsystems im  $\mathbb{P}^2$  zu bestimmen. Per Konstruktion der Varietät  $X$  ist jede Faser  $X_t$ ,  $t \neq 0$ , isomorph zu  $\mathbb{P}^2$ . Wir können also in allen Fasern außer  $\mathbb{X}_0$  das entsprechende Linearsystem betrachten und erhalten so eine „stetig variierende“ Familie von Linearsystemen über  $\mathbb{A}^1$ . In der Faser  $\mathbb{X}_0$  erhalten wir dann, als „flachen Limes“ dieser Familie von Systemen, ein neues Linearsystem in  $\mathbb{X}_0$ , welches sich dann in zwei Linearsysteme in  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{F}$  „zerlegen“ lässt.

Wir wollen diese Konstruktion nun formalisieren und untersuchen, ob das Linearsystem auf  $\mathbb{X}_0$  dieselbe Dimension wie die Linearsysteme in den anderen Fasern hat. Dazu benötigen wir unter anderem den Begriff der Flachheit und ein Halbstetigkeitstheorem.

**2.3.1. Flache Familien.** Für Details, bezüglich der im folgenden Abschnitt verwendeten Begriffe, verweise ich auf [Har77, Chapter III.9] und [Har77, Chapter III.12]. Wir notieren lediglich kurz eine Proposition, die wir häufiger verwenden werden.

**Proposition 2.6.** *Sei  $f : Y \rightarrow Z$  ein Morphismus zwischen einem Schema  $Y$  und einem regulären Integritätsschema  $Z$  der Dimension 1. Der Morphismus  $f$  ist genau dann flach, wenn jeder assoziierte Punkt  $y \in Y$  auf einen generischen Punkt von  $Z$  abgebildet wird. Wenn  $Y$  reduziert ist, bedeutet dies insbesondere, dass  $Z$  von jeder irreduziblen Komponente von  $Y$  dominiert wird.*

*Beweis:* Siehe [Har77, Chapter III.9, Proposition 9.7]. ■

**Lemma 2.7.** *Die Projektion  $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{A}^1$  ist eine flache Familie von Flächen über  $\mathbb{A}^1$ .*

*Beweis:*  $\mathbb{A}^1$  und  $X$  sind glatte Varietäten und damit offenbar reduziert. Da beide Varietäten irreduzibel sind, ist Proposition 2.6 anwendbar und die Behauptung folgt unmittelbar aus der Surjektivität von  $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ . ■

**Definition 2.8.**  $\mathcal{O}_X(d) := \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$  sei der Rückzug des Geradenbündels  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  unter der Abbildung  $\pi_2 : X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{p_2} \mathbb{P}^2$  und für beliebiges  $k \in \mathbb{Z}$  setzen wir  $\mathcal{O}_X(d, k) := \mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{O}_X(k\mathbb{P})$ .

**Lemma 2.9.** *Das Geradenbündel  $\mathcal{O}_X(d, k)$  ist flach über  $\mathbb{A}^1$ .*

*Beweis:* Die dem Geradenbündel  $\mathcal{O}_X(d, k) \xrightarrow{e} X$  entsprechende Garbe  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_X(d, k)}$  ist ein lokal freier  $\mathcal{O}_X$ -Modul und damit flach über  $X$ . Da  $X$  nach Lemma 2.7 flach über  $\mathbb{A}^1$  ist, folgt die Behauptung aus der Transitivität der Flachheit. (Siehe dazu [Har77, S. 254].) ■

**Lemma 2.10.** *Für  $t \neq 0$  gilt  $\mathcal{O}_X(d)|_{X_t} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  und  $\mathcal{O}_X(d, k)|_{X_t} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ . Weiter gilt  $\mathcal{O}_X(d)|_{\mathbb{X}_0} \cong \mathcal{X}(d, 0)$  und  $\mathcal{O}_X(d, k)|_{\mathbb{X}_0} \cong \mathcal{X}(d, k)$ .*

*Beweis:* Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Isomorphie  $\mathbb{P}^2 \cong X_t$ , für  $t \neq 0$ . Wegen  $\mathcal{O}_X(k\mathbb{P})|_{X_t} = \mathcal{O}_X$  folgt  $\mathcal{O}_X(d, k)|_{X_t} \cong \mathcal{O}_X(d)|_{X_t}$  ( $t \neq 0$ ) und damit die zweite Aussage. Nun zu der Einschränkung auf  $\mathbb{X}_0$ .

Wir konstruieren zunächst einen Divisor  $D$  in  $V$ , dessen Pullback auf  $X$  gerade  $\mathcal{O}_X(d)$  repräsentiert. Dazu wählen wir eine Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  vom Grad  $d$  und setzen  $D := C \times \mathbb{A}^1$ . Die Einschränkung von  $D$  auf  $V_0$  liefert erneut eine Kurve  $C_0$  vom Grad  $d$ , welche die Gerade  $L \subset V_0$ , in der wir  $V$  aufblasen,

in  $d$  Punkten  $q_1, \dots, q_d$  (evtl. mit Multiplizitäten gezählt) schneidet. Durch Pullback des Divisors  $D$  auf die Aufblasung  $X$  von  $V$  in  $L$  erhält man einen Divisor  $D'$ , die totale (= strikte) Transformierte von  $D$ . Dieser schneidet den exzeptionellen Divisor  $\mathbb{F}$  in  $d$  Kopien von  $\mathbb{P}^1$  über den Punkten  $q_1, \dots, q_d$  und  $\mathbb{P}$  wieder in einer Kurve vom Grad  $d$ . Somit ist  $\mathcal{O}_X(d)|_{\mathbb{P}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ .

Die  $d$  Kopien von  $\mathbb{P}^1$  in  $\mathbb{F}$  sind jeweils linear äquivalent zum Divisor  $H - \mathbb{E}$ , denn der Pullback  $H$  einer Geraden  $L \subset \mathbb{P}^2$  (durch den aufzublasenden Punkt) auf  $\mathbb{F}$  enthält als Komponente den exzeptionellen Divisor  $\mathbb{E}$ , den wir folglich subtrahieren müssen. Somit erhalten wir  $\mathcal{O}_X(d)|_{\mathbb{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(dH - d\mathbb{E})$ . Korollar 2.5 liefert also  $\mathcal{O}_X(d)|_{\mathbb{X}_0} \cong \mathcal{X}(d, 0)$ .

Die Aussagen  $\mathcal{O}_X(\mathbb{P})|_{\mathbb{P}} = N_{\mathbb{P}/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$  und  $\mathcal{O}_X(\mathbb{P})|_{\mathbb{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E})$  überprüft man anhand der entsprechenden Übergangsfunktionen. Damit folgt nun

$$\mathcal{O}_X(d, k)|_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d - k)$$

und

$$\mathcal{O}_X(d, k)|_{\mathbb{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(dH - d\mathbb{E}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(k\mathbb{E}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(dH - (d - k)\mathbb{E}).$$

Korollar 2.5 liefert also  $\mathcal{O}_X(d, k)|_{\mathbb{X}_0} \cong \mathcal{X}(d, k)$ . ■

**Bemerkung 2.11.** Man sagt auch,  $\mathcal{O}_X(d, k)$  ist flache Familie von Bündeln über  $\mathbb{A}^1$ . Dabei nennt man das Bündel  $\mathcal{X}(d, k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) über  $\mathbb{X}_0$  flachen Limes der Bündel  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  über den Fasern  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ .

**2.3.2. Linearsysteme in den Fasern von  $\mathbf{X}$ .** Wir haben bisher noch nicht definiert, was *allgemeine Lage* für Punkte in der Nullfaser  $\mathbb{X}_0$  heißen soll. Wie in Abschnitt 3.1 sei  $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$  die Standardüberdeckung des  $\mathbb{P}^2$  und  $\mathcal{U}_i = s_{2,1}(U_i \times \mathbb{A}^1)$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

**Lemma 2.12.** *Sei  $a \neq 0$ . Die Abbildungen ( $i = 0, 1, 2$ )*

$$\begin{aligned} \eta_i &: \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \cap X_a \longrightarrow U_i \\ ([ax : x : ay : y : az : z], [t_0 : t_1]) &\longmapsto [x : y : z], \end{aligned}$$

*verkleben zu einem Isomorphismus  $\eta : X_a \longrightarrow \mathbb{P}^2$  und die Abbildung*

$$\begin{aligned} \iota &: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ ([0 : x : 0 : y : 0 : z], [1 : 0]) &\longmapsto [x : y : z] \end{aligned}$$

*ist ebenfalls ein Isomorphismus.* ■

**Lemma 2.13.** *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &: \pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_1) \setminus \mathbb{E} \longrightarrow U_1 \\ ([0 : 0 : 0 : y : 0 : z], [t_0 : t_1]) &\longmapsto [t_0y : t_1y : t_1z] \end{aligned}$$

*und*

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &: \pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_2) \setminus \mathbb{E} \longrightarrow U_2 \\ ([0 : 0 : 0 : y : 0 : z], [t_0 : t_1]) &\longmapsto [t_0z : t_1y : t_1z] \end{aligned}$$

*verkleben zu einem Isomorphismus  $\vartheta : \mathbb{F} \setminus \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0]\}$ .*



*Beweis:* Die Abbildungen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  sind wohldefiniert und polynomiell. Sei nun  $p \in \pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \setminus \mathbb{E}$  beliebig. Vermöge der Übergangsabbildung  $\sigma_{12}$  von  $\mathbb{F}$  erhalten wir

$$\vartheta_1(p) = [t_0y : t_1y : t_1z] = [(\frac{y}{z}t_0)z : t_1y : t_1z] = \vartheta_2(\sigma_{12}(p)).$$

Damit verkleben  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  zu einem Morphismus  $\vartheta : \mathbb{F} \setminus \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0]\}$ .

Wir müssen noch zeigen, dass  $\vartheta$  ein Isomorphismus ist. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \vartheta_1^{-1} : U_1 &\longrightarrow \pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_1) \setminus \mathbb{E} \\ [x_0, x_1, x_2] &\longmapsto ([0 : 0 : 0 : x_1 : 0 : x_2], [x_0 : x_1]) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{-1} : U_2 &\longrightarrow \pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_2) \setminus \mathbb{E} \\ [x_0, x_1, x_2] &\longmapsto ([0 : 0 : 0 : x_1 : 0 : x_2], [x_0 : x_2]) \end{aligned}$$

sind ebenfalls wohldefiniert und polynomiell. Eine kurze Rechnung zeigt  $\vartheta_i \circ \vartheta_i^{-1} = \text{id}_{U_i}$  und  $\vartheta_i^{-1} \circ \vartheta_i = \text{id}_{\pi^{-1}(L \cap \mathcal{U}_i) \setminus \mathbb{E}}$ ,  $i = 1, 2$ . Für  $q = [x_0 : x_1 : x_2] \in U_1 \cap U_2$  gilt

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{-1}(q) &= ([0 : 0 : 0 : x_1 : 0 : x_2], [x_0 : x_2]) \\ &= ([0 : 0 : 0 : x_1 : 0 : x_2], [\frac{x_1}{x_2}x_0 : x_1]) \\ &= \sigma_{12}([0 : 0 : 0 : x_1 : 0 : x_2], [x_0 : x_1]) = \sigma_{12}(\vartheta_1^{-1}(q)). \end{aligned}$$

Die Abbildungen  $\vartheta_1^{-1}$  und  $\vartheta_2^{-1}$  verkleben also zu einem Morphismus  $\vartheta^{-1} : \mathbb{P}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0]\} \rightarrow \mathbb{F} \setminus \mathbb{E}$ . ■

**Bemerkung 2.14.** Der Isomorphismus  $\vartheta$  setzt sich zu einer birationalen Abbildung  $\vartheta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{P}^2$  mit  $\tilde{\vartheta}|_{\mathbb{E}}(\mathbb{E}) = \{[1 : 0 : 0]\}$  und  $\tilde{\vartheta}^{-1}(\{[1 : 0 : 0]\}) = \mathbb{E}$  fort, welche  $\mathbb{F}$  zur Aufblasung von  $\mathbb{P}^2$  im Punkt  $q_0 = [1 : 0 : 0]$  macht.

**Definition 2.15.** Wir sagen, dass sich die Punkte

- $p_{a,0}, \dots, p_{a,n} \in X_a$  ( $a \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ ) in *allgemeiner Lage* befinden, wenn sich die Punkte  $\eta(p_{a,0}), \dots, \eta(p_{a,n}) \in \mathbb{P}^2$  in allgemeiner Lage befinden,
- $r_0, \dots, r_s \in \mathbb{P}$  in *allgemeiner Lage* befinden, wenn kein Punkt auf dem exzeptionellen Divisor  $\mathbb{E}$  der Aufblasung liegt und sich die Punkte  $\iota(r_0), \dots, \iota(r_s) \in \mathbb{P}^2$  in allgemeiner Lage befinden,
- $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{F}$  in *allgemeiner Lage* befinden, wenn kein Punkt  $q_i$  auf dem exzeptionellen Divisor  $\mathbb{E}$  der Aufblasung liegt und sich die Punkte  $q_0, \vartheta(q_1), \dots, \vartheta(q_m) \in \mathbb{P}^2$  in allgemeiner Lage befinden.
- $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{X}_0$  in *allgemeiner Lage* befinden, wenn gilt:
  - i) die Punkte  $\{p_0, \dots, p_n\} \cap \mathbb{P}$  und  $\{p_0, \dots, p_n\} \cap \mathbb{F}$  befinden sich jeweils in allgemeiner Lage ( $\mathbb{E}$ :  $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ ),
  - ii) die Punkte  $\iota(p_0), \dots, \iota(p_k), \vartheta(p_{k+1}), \dots, \vartheta(p_n) \in \mathbb{P}^2$  sind paarweise verschieden und in allgemeiner Lage.

**Satz 2.16.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig aber fest. Es existieren  $n + 1$  irreduzible, paarweise disjunkte Kurven  $C_0, \dots, C_n \subset X$  mit folgenden Eigenschaften. Für alle  $i = 0, \dots, n$  gilt:*

- i) *die Kurve  $C_i$  schneidet alle Fasern  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{A}^1$ , in jeweils genau einem Punkt,*
- ii) *die Schnittpunkte  $p_0, \dots, p_n$  der Kurven  $C_0, \dots, C_n$  mit  $\mathbb{X}_0$  sind in allgemeiner Lage und*
- iii) *es existiert eine Zariski offene Menge  $U \subset \mathbb{A}^1$ , so dass die Schnittpunkte  $p_{0,s}, \dots, p_{n,s}$  der Kurven  $C_0, \dots, C_n$  mit der Faser  $X_s$  in allgemeiner Lage sind, f.a.  $s \in U$ .*

*Beweis:* Sei  $0 < b \leq n$  beliebig. Wir wählen in  $\mathbb{X}_0$  zunächst  $n + 1$  allgemeine Punkte

$$\begin{aligned} p_0 &= ([0 : x_0 : 0 : y_0 : 0 : z_0], [1 : 0]) \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap \mathbb{P} \setminus \mathbb{E}, \\ &\vdots \\ p_{n-b} &= ([0 : x_{n-b} : 0 : y_{n-b} : 0 : z_{n-b}], [1 : 0]) \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap \mathbb{P} \setminus \mathbb{E}, \\ p_{n-b+1} &= ([0 : 0 : 0 : y_{n-b+1} : 0 : z_{n-b+1}], [x_{n-b+1} : 1]) \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap \mathbb{F} \setminus \mathbb{E}, \\ &\vdots \\ p_n &= ([0 : 0 : 0 : y_n : 0 : z_n], [x_n : 1]) \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap \mathbb{F} \setminus \mathbb{E}, \end{aligned}$$

mit komplexen Zahlen  $x_k, y_k, z_k \neq 0$ , so dass für  $k \neq l$  die Gleichungen

$$(3) \quad y_k z_l - y_l z_k \neq 0$$

erfüllt sind ( $k, l = 0, \dots, n$ ) und betrachten folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap X \\ t &\longmapsto ([tx_i : x_i : ty_i : y_i : tz_i : z_i], [\frac{x_i}{y_i} : t]), \\ \psi_j : \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_1) \cap X \\ t &\longmapsto ([t^2 x_j y_j : tx_j y_j : ty_j : y_j : tz_j : z_j], [x_j : 1]), \end{aligned}$$

mit  $i = 0, \dots, n - b$  und  $j = n - b + 1, \dots, n$ . Diese sind wohldefiniert und die Abbildungen  $\mathbb{A}^1 \xrightarrow[\psi_j]{\varphi_i} X \xrightarrow[\pi_1]{\pi_1} \mathbb{A}^1$  sind jeweils die Identität auf  $\mathbb{A}^1$ .

Durch  $C_i := \text{im}(\varphi_i)$ ,  $C_j := \text{im}(\psi_j)$  erhalten wir  $n + 1$  irreduzible Kurven in  $X$ , die jede Faser  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{A}^1$ , in jeweils genau einem Punkt schneiden und wegen der Gleichungen (3) paarweise disjunkt sind.

Per Konstruktion gilt  $\varphi_i(0) = p_i$ ,  $\psi_j(0) = p_j$  und

$$\eta(\varphi_i(1)) = \eta([x_i : x_i : y_i : y_i : z_i : z_i], [\frac{x_i}{y_i} : 1]) = [x_i : y_i : z_i] = \iota(p_i),$$

$$\eta(\psi_j(1)) = \eta([x_j y_j : x_j y_j : y_j : y_j : z_j : z_j], [x_j : 1]) = [x_j y_j : y_j : z_j] = \vartheta(p_j).$$

Die Schnittpunkte der Kurven  $C_k$  mit den Fasern  $\mathbb{X}_0$  und  $X_1$  sind also in allgemeiner Lage.

Die Parametrisierungen  $\varphi_i, \psi_j$  sind stetig und „allgemeine Lage“ ist eine Zariski-offene Bedingung. Es gibt daher eine Zariski-offene Umgebung  $U \subset \mathbb{A}^1$  von  $1 \in \mathbb{A}^1$ , so dass die Schnittpunkte  $p_{0,s}, \dots, p_{n,s}$  der Kurven  $C_0, \dots, C_n$  mit der Faser  $X_s$  in allgemeiner Lage sind, f.a.  $s \in U$ .  $\blacksquare$

Wir fixieren nun  $0 < b \leq n$  und wählen  $n + 1$  allgemeine Punkte  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{X}_0$ , wie im Beweis des vorigen Satzes. Diese können nach besagtem Satz als Grenzwert von jeweils  $n + 1$  Punkten  $p_{0,t}, \dots, p_{n,t} \in X_t$ ,  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ , in allgemeiner Lage aufgefasst werden.

**Definition 2.17.** Für alle  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}_t(d, m_0, n, m)$  das Linearsystem der Kurven vom Grad  $d$  in  $X_t$  mit Vielfachheiten  $m_0$  in  $p_{0,t}$  und  $m$  in  $p_{1,t}, \dots, p_{n,t}$ . Mit  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_0(d, k, m_0, n, b, m)$  bezeichnen wir das Linearsystem der globalen Schnitte von  $\mathcal{X}(d, k)$ , die mit der Ordnung mindestens  $m_0$  in  $p_0$  und  $m$  in  $p_1, \dots, p_n$  verschwinden.

Sei  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  ein Punkt, so dass die Schnittpunkte  $p_{0,t}, \dots, p_{n,t}$  der Faser  $X_t$  mit den Kurven  $C_0, \dots, C_n$  in allgemeiner Lage sind. Wegen der Isomorphie von  $X_t$  zu  $\mathbb{P}^2$ , ist das System  $\mathcal{L}_t(d, m_0, n, m)$  dann isomorph zum System  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  im  $\mathbb{P}^2$ .

**Definition 2.18.** Man sagt, das System  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(d, k, m_0, n, b, m)$  ist eine  $(k, b)$ -*Degeneration* des Systems  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ . Um das System  $\mathcal{L}_0$  aus  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  zu erhalten, führen wir eine  $(k, b)$ -*Degeneration* (der Ebene) durch.

Um Aussagen über die Dimension dieser Systeme machen zu können, führen wir eine zu der in Kapitel 1 analoge Konstruktion durch. Dazu blasen wir  $X$  in den oben genannten Kurven  $C_0, \dots, C_n$  auf und betrachten erneut die Fasern über  $\mathbb{A}^1$ .

**Definition 2.19.** Es sei  $\tilde{X} \xrightarrow{\varsigma} X$  die Aufblasung von  $X$  in den Kurven  $C_0, \dots, C_n$  und  $E_0, \dots, E_n$  die zugehörigen exzeptionellen Divisoren.  $\mathcal{O}(d, k) := \varsigma^*(\mathcal{O}_X(d, k))$  sei der Rückzug des Bündels  $\mathcal{O}_X(d, k)$  auf  $\tilde{X}$  und  $\mathcal{F} := \mathcal{O}(d, k) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-m_0 E_0) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-m E_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-m E_n)$ . Weiter sei  $\varsigma_1 := \pi_1 \circ \varsigma : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{A}^1$  und  $\tilde{X}_t := \varsigma_1^{-1}(t)$ , f.a.  $t \in \mathbb{A}^1$ .

Da die Kurven  $C_0, \dots, C_n$  jede Faser  $X_t$  genau einmal schneiden, ist die Einschränkung der exzeptionellen Divisoren  $E_0, \dots, E_n$  auf eine Faser  $\tilde{X}_t$  jeweils isomorph zu  $\mathbb{P}^1$  und  $\tilde{X}_t$  ist nichts anderes, als die Aufblasung von  $X_t$  in den Punkten  $p_{0,t}, \dots, p_{n,t}$ , mit exzeptionellen Divisoren  $E_{0,t} := E_0|_{\tilde{X}_t}, \dots, E_{n,t} := E_n|_{\tilde{X}_t}$ ,  $t \in \mathbb{A}^1$ . Damit erhalten wir unmittelbar

**Lemma 2.20.** Für  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  ist  $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}|_{\tilde{X}_t} \cong \varsigma^*(\mathcal{O}_{X_t}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}_t}(-m_0 E_{0,t}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}_t}(-m E_{1,t}) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}_t}(-m E_{n,t})$  und  $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{\tilde{X}_0} \cong \varsigma^*(\mathcal{X}(d, k)) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}(-m_0 E_{0,0}) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}(-m E_{n,0})$ . ■

**Korollar 2.21.** Für  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  ist  $\ell_t := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_t(d, m_0, n, m)) = h^0(\tilde{X}_t, \mathcal{F}_t) - 1$  und  $\ell_0 := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_0) = h^0(\tilde{X}_0, \mathcal{F}_0) - 1$ . ■

**Lemma 2.22.** Das Geradenbündel  $\mathcal{F}$  ist flach über  $\mathbb{A}^1$ .

*Beweis:* Völlig analog zu Lemma 2.9. ■

Damit haben wir nun alles beisammen, um die durchgeführten Konstruktionen mit dem angekündigten Halbstetigkeitstheorem zu rechtfertigen, welches wir der Vollständigkeit halber kurz notieren:

**Theorem 2.23** (Halbstetigkeitstheorem). *Sei  $f : Y \rightarrow Z$  ein projektiver Morphismus zwischen zwei Noetherschen Schemata und  $\mathcal{G}$  eine kohärente Garbe auf  $Y$ , welche flach über  $Z$  ist. Dann ist die Funktion*

$$h^i(z, \mathcal{G}) = \dim_{k(z)} H^i(Y_z, \mathcal{G}_z)$$

für alle  $i \geq 0$  eine oberhalbstetige Funktion auf  $Z$ .

*Beweis:* Siehe Hartshorne [Har77, Chapter III.12, Theorem 12.8]. ■

**Korollar 2.24.** *Es gilt  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(d, m_0, n, m)) \leq \ell_0$ . Insbesondere ist das System  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  nicht-speziell, wenn  $\ell_0 = e(d, m_0, n, m)$  gilt.*

*Beweis:*  $\tilde{X}$  und  $\mathbb{A}^1$  sind als quasi-projektive bzw. affine Varietäten offenbar Noethersche Schemata,  $\varsigma_1 : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{A}^1$  ist projektiver Morphismus und die dem Geradenbündel  $\mathcal{F}$  entsprechende Garbe  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  ist kohärent und nach Lemma 2.22 flach über  $\mathbb{A}^1$ . Damit ist die Funktion  $h^0(y, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{X}_y, \mathcal{F}_y) = \ell_y + 1$  oberhalbstetig auf  $\mathbb{A}^1$ , bezüglich der Zariski-Topologie. Das heißt, für fast alle (bis auf endlich viele) Punkte  $t \in \mathbb{A}^1$  gilt  $\ell_0 \geq \ell_t$ . Wir hatten in der Konstruktion von  $\tilde{X}$  und  $\mathcal{F}$  sichergestellt, dass auf einer Zariski-offenen Menge  $U \subset \mathbb{A}^1$  für die Linearsysteme  $\mathcal{L}_s(d, m_0, n, m)$  die Bedingung  $\ell_s = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  gilt, für alle  $s \in U$ . Es gilt also  $\ell_0 \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ . Mit  $\ell_0 \geq \ell \geq e(d, m_0, n, m) = \ell_0$  folgt die zweite Behauptung. ■

Wir sehen also, dass die Berechnung von  $\ell_0$  unter Umständen genügt, um die Dimension von  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  zu bestimmen und wenden uns nun diesem Problem zu.

**2.3.3. Das  $(k, b)$ -degenerierte System  $\mathcal{L}_0$ .** Wir betrachten zunächst die Einschränkung des Systems  $\mathcal{L}_0$  auf  $\mathbb{P}$  bzw.  $\mathbb{F}$ .

**Lemma 2.25.** *Sei  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(d, k, m_0, n, b, m)$  die  $(k, b)$ -Degeneration des Systems  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ . Dann gilt  $\mathcal{L}_0|_{\mathbb{P}} \cong \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$  und  $\mathcal{L}_0|_{\mathbb{F}} \cong \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$ .*

*Beweis:*  $\mathcal{L}_0$  besteht, per Definition, aus globalen Schnitten von  $\mathcal{X}(d, k)$ , die in den Punkten  $p_0, \dots, p_n$  mindestens die geforderten Vielfachheiten haben. Da die  $n - b + 1$  Punkte  $p_0, \dots, p_{n-b}$  nach Voraussetzung in  $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^2$  liegen und  $\mathcal{X}(d, k)|_{\mathbb{P}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d - k)$  gilt, ist die Einschränkung von  $\mathcal{L}_0$  auf  $\mathbb{P}$  durch das System  $\mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$  gegeben.

Die Einschränkung auf  $\mathbb{F}$  besteht nach analoger Betrachtung aus globalen Schnitten von  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(dH - (d - k)\mathbb{E})$ , die in den  $b$  Punkten  $p_{n-b+1}, \dots, p_n \in \mathbb{F}$  Vielfachheit mindestens  $m$  haben.  $\mathbb{F}$  ist isomorph zu der Aufblasung  $\mu : \text{Bl}_1(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^2$  von  $\mathbb{P}^2$  im Punkt  $q_0 \in \mathbb{P}^2$ . Die globalen Schnitte des Systems  $\mathcal{L}_0|_{\mathbb{F}}$  haben also, aufgefasst als Divisoren aus  $|dL| \subset \mathbb{P}^2$ , im Punkt  $q_0$  mindestens Vielfachheit  $(d - k)$  und in den übrigen  $b$  Punkten mindestens Vielfachheit  $m$ . ■

**Definition 2.26.** Die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} := \mathcal{L}_0|_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} := \mathcal{L}_0|_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$  nennen wir die Systeme auf  $\mathbb{P}$  bzw.  $\mathbb{F}$ .

Wir werfen nun einen genaueren Blick auf die Schnitte in  $\mathcal{L}_0$ . Für einen Schnitt  $s \in \mathcal{L}_0 \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{X}_0, \mathcal{X}(d, k)))$  gibt es folgende drei Möglichkeiten:

1. Auf  $\mathbb{P}$  liefert  $s|_{\mathbb{P}}$  einen Divisor  $D_{\mathbb{P}} \in |(d - k)H|$  und auf  $\mathbb{F}$  liefert  $s|_{\mathbb{F}}$  einen Divisor  $D_{\mathbb{F}} \in |dH - (d - k)\mathbb{E}|$ , die jeweils den Vielfachheitsbedingungen genügen und unter Einschränkung den selben Divisor auf  $\mathbb{E}$  liefern, also auf  $\mathbb{E}$  übereinstimmen.
2. Auf  $\mathbb{P}$  liefert  $s|_{\mathbb{P}}$  einen Divisor  $D_{\mathbb{P}} \in \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$ , aber  $s|_{\mathbb{F}} \equiv 0$ . Dann muss der exzeptionelle Divisor  $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}$  im Träger von  $D_{\mathbb{P}}$  enthalten sein, also  $\mathbb{E} \subset \text{supp}(D_{\mathbb{P}})$ . Wir notieren dies mit  $D_{\mathbb{P}} \in \mathbb{E} + \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m)$ .
3. Auf  $\mathbb{F}$  liefert  $s|_{\mathbb{F}}$  einen Divisor  $D_{\mathbb{F}} \in \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$ , aber  $s|_{\mathbb{P}} \equiv 0$ . Dann muss der exzeptionelle Divisor  $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$  im Träger von  $D_{\mathbb{F}}$  enthalten sein, also  $\mathbb{E} \subset \text{supp}(D_{\mathbb{F}})$ . Wir notieren dies mit  $D_{\mathbb{F}} \in \mathbb{E} + \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)$ .

Sind alle Schnitte des Systems  $\mathcal{L}_0$  vom zweiten Typ bzw. vom dritten Typ, erhält man  $\ell_0$  offenbar durch die Dimension des eingeschränkten Systems auf den irreduziblen Komponenten von  $\mathbb{X}_0$ . Wir haben also (siehe [CM98, Lemma 2.1])

**Lemma 2.27.** *Seien  $d, m_0, m, n, b \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig aber fest. Dann gilt:*

- i)  $\ell(d - k, m_0, n - b, m) < 0 \Rightarrow \ell_0 = \ell(d, d - k + 1, b, m)$
- ii)  $\ell(d, d - k, b, m) < 0 \Rightarrow \ell_0 = \ell(d - k - 1, m_0, n - b, m)$ .

■

Diese beiden Fälle sind jedoch sehr speziell. Für den allgemeinen Fall benötigen wir noch ein paar Vorbereitungen.

**Definition 2.28.** Mit  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{F}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{E}}(d - k)|$  bezeichnen wir die Einschränkung der Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  bzw.  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  auf den exzeptionellen Divisor  $\mathbb{E}$ .

Durch die Restriktionsabbildung auf  $\mathbb{E}$  werden genau die Divisoren aus  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  bzw.  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  auf den Nulldivisor abgebildet, die  $\mathbb{E}$  als Komponente enthalten.

Das heißt

$$\begin{aligned} \ker(\rho_{\mathbb{E}}^{\mathbb{P}} : \mathcal{L}_{\mathbb{P}} &\rightarrow \text{Cl}(\mathbb{E})) = \{D \in \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m) \mid \mathbb{E} \in \text{supp}(D)\} \\ &\cong \{\mathbb{E} + D \mid D \in \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m)\} \\ &\subset \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m), \\ \ker(\rho_{\mathbb{E}}^{\mathbb{F}} : \mathcal{L}_{\mathbb{F}} &\rightarrow \text{Cl}(\mathbb{E})) = \{D \in \mathcal{L}(d, d - k, b, m) \mid \mathbb{E} \in \text{supp}(D)\} \\ &\cong \{\mathbb{E} + D \mid D \in \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)\} \\ &\subset \mathcal{L}(d, d - k, b, m). \end{aligned}$$

Wir erhalten also Isomorphismen

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} &\cong \ker(\rho_{\mathbb{E}}^{\mathbb{P}} : \mathcal{L}_{\mathbb{P}} \rightarrow \text{Cl}(\mathbb{E})) \cong \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m) \text{ und} \\ \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} &\cong \ker(\rho_{\mathbb{E}}^{\mathbb{F}} : \mathcal{L}_{\mathbb{F}} \rightarrow \text{Cl}(\mathbb{E})) \cong \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m). \end{aligned}$$

**Definition 2.29.** Die Systeme  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} := \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m)$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} := \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)$  bezeichnen wir als *Kernsysteme* unter der Restriktion auf den exzeptionellen Divisor  $\mathbb{E}$ . Wir bezeichnen außerdem mit

$v = v(d, m_0, n, m)$	die virtuelle Dimension des allgemeinen Systems $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ ,
$v_{\mathbb{P}} = v(d - k, m_0, n - b, m)$	die virtuelle Dimension des Systems $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$ auf $\mathbb{P}$ ,
$v_{\mathbb{F}} = v(d, d - k, b, m)$	die virtuelle Dimension des Systems $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$ auf $\mathbb{F}$ ,
$\hat{v}_{\mathbb{P}} = v(d - k - 1, m_0, n - b, m)$	die virtuelle Dimension des Kernsystems $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m)$ auf $\mathbb{P}$ ,
$\hat{v}_{\mathbb{F}} = v(d, d - k + 1, b, m)$	die virtuelle Dimension des Kernsystems $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)$ auf $\mathbb{F}$ ,
$\ell = \ell(d, m_0, n, m)$	die Dimension des allgemeinen Systems $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ ,
$\ell_{\mathbb{P}} = \ell(d - k, m_0, n - b, m)$	die Dimension des Systems $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$ auf $\mathbb{P}$ ,
$\ell_{\mathbb{F}} = \ell(d, d - k, b, m)$	die Dimension des Systems $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$ auf $\mathbb{F}$ ,
$\hat{\ell}_{\mathbb{P}} = \ell(d - k - 1, m_0, n - b, m)$	die Dimension des Kernsystems $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m)$ auf $\mathbb{P}$ ,
$\hat{\ell}_{\mathbb{F}} = \ell(d, d - k + 1, b, m)$	die Dimension des Kernsystems $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)$ auf $\mathbb{F}$ ,
$r_{\mathbb{P}} = \ell_{\mathbb{P}} - \hat{\ell}_{\mathbb{P}} - 1$	die Dimension des eingeschränkten Systems $\mathcal{B}_{\mathbb{P}}$ und mit
$r_{\mathbb{F}} = \ell_{\mathbb{F}} - \hat{\ell}_{\mathbb{F}} - 1$	die Dimension des eingeschränkten Systems $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ .

**Lemma 2.30.** *Es gelten folgende Gleichungen:*

- i)  $v_{\mathbb{P}} + v_{\mathbb{F}} = v + d - k$
- ii)  $\hat{v}_{\mathbb{P}} + v_{\mathbb{F}} = v - 1$
- iii)  $v_{\mathbb{P}} + \hat{v}_{\mathbb{F}} = v - 1$

*Beweis:* Alle drei Aussagen folgen unmittelbar durch Einsetzen und Nachrechnen. ■

**Satz 2.31.** *Es gilt  $\ell_0 = \dim(\mathcal{B}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{B}_{\mathbb{F}}) + \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 2$ .*

*Beweis:* (nach [CM98, S. 198]) Wir haben bereits gesehen, dass  $\mathcal{L}_0$  das Faserprodukt von  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  über  $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}(d - k)$  ist. Bezeichnen wir mit  $W, W_{\mathbb{P}}$  und  $W_{\mathbb{F}}$  die entsprechenden Vektorräume<sup>1</sup>, d.h.  $\mathcal{L}_0 = \mathbb{P}(W^*)$ ,  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(W_{\mathbb{P}}^*)$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathbb{P}(W_{\mathbb{F}}^*)$ , so ist  $W = W_{\mathbb{P}} \times_{H^0(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{E}}(d - k))} W_{\mathbb{F}}$ , also mit anderen Worten

$$W = \{(u, w) \in W_{\mathbb{P}} \times W_{\mathbb{F}} \mid u|_{\mathbb{E}} = w|_{\mathbb{E}}\}.$$

<sup>1</sup>Für einen Vektorraum  $V$  bezeichnen wir  $V \setminus \{0\}$  mit  $V^*$ .

Sei nun  $W_{\mathbb{E}}$  der zu  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  gehörige Vektorraum, d.h.  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}} = \mathbb{P}(W_{\mathbb{E}}^*)$ . Dann ist ein Element aus  $W$  eindeutig bestimmt durch die Wahl eines Elementes  $v \in W_{\mathbb{E}}$  und der Wahl von Urbildern,  $u \in W_{\mathbb{P}}$  und  $w \in W_{\mathbb{F}}$  von  $v$  unter der jeweiligen Restriktionsabbildung. Nach Dimensionsformel der linearen Algebra haben die Fasern von  $v$  unter der Restriktion die Dimension  $1 + \hat{\ell}_{\mathbb{P}}$  bzw.  $1 + \hat{\ell}_{\mathbb{F}}$ .

Damit erhalten wir  $\dim(W) = \dim(\mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) + (1 + \hat{\ell}_{\mathbb{P}}) + (1 + \hat{\ell}_{\mathbb{F}})$  und schließlich durch Projektivierung die Behauptung. ■

Die Bestimmung von  $\ell_0$  hängt damit explizit von der Bestimmung von  $\dim(\mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}})$  ab. Der Schnitt der eingeschränkten Systeme  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  kann jedoch zunächst beliebige Dimension haben. Dies ist glücklicherweise nicht der Fall, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

## 2.4. Die Transversalität der eingeschränkten Systeme und $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_0$

Wir werden nun zeigen, dass sich die Systeme  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ , aufgefasst als lineare Unterräume der Divisoren vom Grad  $d - k$  über  $\mathbb{E}$ , quasi-transversal schneiden. Dazu zeigen wir ein allgemeineres Resultat, welches ursprünglich von A. Hirschowitz mit dem Fixpunktsatz von Borel bewiesen wurde. Der hier geführte Beweis von Miranda und Ciliberto (vgl. [CM98, S. 199]) nutzt aus, dass ein Linearsystem nur endlich viele Fixpunkte besitzt. Wir präzisieren dies nun.

**Definition 2.32.** Sei  $V$  ein Vektorraum der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  über einem Körper  $k$ , der Charakteristik Null. Weiter seien  $U$  und  $W$  zwei Untervektorräume von  $V$ . Man sagt,  $U$  und  $W$  schneiden sich *quasi-transversal*, wenn gilt

$$\dim U + \dim W \geq n \Rightarrow U + W = V \text{ und}$$

$$\dim U + \dim W < n \Rightarrow U \cap W = \{0\}.$$

Man sagt, zwei Linearsysteme  $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathbb{P}(V^*)$  schneiden sich *quasi-transversal*, falls sich die zugehörigen Vektorräume quasi-transversal schneiden.

Dies bedeutet, dass der Schnitt der Untervektorräume  $U$  und  $W$  minimale Dimension hat. Die Dimensionsformel für lineare Unterräume liefert also im ersten Fall  $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - n$  und im zweiten Fall  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$ .

Wir definieren nun kurz, was wir unter dem Wendepunkt eines Linearsystems verstehen wollen. Um den Aufwand möglichst gering zu halten, verwenden wir anstelle der eigentlichen Definition eine in [Mir95] gegebene äquivalente Charakterisierung. Für eine ausführliche Einführung verweise ich auf [Mir95, Kapitel VII.4, S. 233–236].

**Definition 2.33.** Sei  $Y$  eine algebraische Kurve,  $D$  ein Divisor auf  $Y$  und  $Q \subset |D|$  ein Linearsystem auf  $Y$  mit zugehörigem Vektorraum  $V$ . Ein Punkt  $p \in Y$ , mit lokaler Koordinate  $z$ , heißt *Wendepunkt* von  $Q$ , wenn für jede Basis  $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$  von  $V$  die Determinante der *Wronskimatrix*

$$M_z(g_1, \dots, g_{r+1})(z) := \begin{pmatrix} g_1(z) & g_1'(z) & g_1^{(2)}(z) & \cdots & g_1^{(r)}(z) \\ g_2(z) & g_2'(z) & g_2^{(2)}(z) & \cdots & g_2^{(r)}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{r+1}(z) & g_{r+1}'(z) & g_{r+1}^{(2)}(z) & \cdots & g_{r+1}^{(r)}(z) \end{pmatrix}$$

in  $p$  verschwindet. Dabei sei  $g_i := z^{v_D(p)} \cdot f_i$  ( $i = 1, \dots, r+1$ ) und  $v_D(p)$  die Vielfachheit, mit der  $D$  den Punkt  $p$  enthält.

Die Determinante  $W_z(g_1, \dots, g_{r+1})(z) := \det M_z(g_1, \dots, g_{r+1})$  heißt *Wronskideterminante* und definiert hier eine Potenzreihe in  $z$ , da die Funktionen  $g_1, \dots, g_{r+1}$  per Definition ebenfalls Potenzreihen im lokalen Parameter  $z$  sind. Somit ist die Wronskideterminante entweder identisch Null, oder Sie besitzt eine diskrete Nullstellenmenge. Es folgt daher

**Lemma 2.34.** *Ein Linearsystem  $Q$  auf einer algebraischen Kurve  $Y$  hat nur endlich viele Wendepunkte.*

*Beweis:* Da die Wronskimatrix (bis auf den Faktor  $z^{v_D(p)}$ ) aus der Basis des zugehörigen Vektorraums gebildet wird, sind ihre Zeilen linear unabhängig und die Wronskideterminante ist nicht identisch Null. Mit der Vorüberlegung folgt die Behauptung. ■

Mit dieser kurzen Vorbereitung können wir nun einen vergleichsweise elementaren Beweis der folgenden Behauptung geben.

**Proposition 2.35.** *Sei  $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  die Automorphismengruppe von  $\mathbb{P}^1$  und  $\mathcal{D}$  das Linearsystem der Divisoren vom Grad  $d$  über  $\mathbb{P}^1$ . Dann existiert zu zwei beliebigen, nicht-trivialen Unterräumen  $V$  und  $W$  von  $\mathcal{D}$  ein Element  $g \in G$ , so dass sich  $V$  und  $gW$  quasi-transversal schneiden.*

**Bemerkung 2.36.**  $G$  wirkt in natürlicher Weise auf  $\mathcal{D}$  und auf beliebig-dimensionale, lineare Unterräume von  $\mathcal{D}$ .

*Beweis von Proposition 2.35:* Wir identifizieren im Folgenden  $V$  und  $W$  mit ihren zugehörigen Vektorräumen und bemerken, dass es genügt, die Aussage für den Fall zu beweisen, dass  $V$  und  $W$  komplementäre Dimensionen haben: Angenommen die Dimension von  $V$  ist zu niedrig. Dann erhalten wir durch Hinzunahme von geeigneten Elementen zur Basis von  $V$  einen neuen linearen Teilraum  $V'$  mit der gewünschten Dimension, der  $V$  enthält.

Gilt nun  $V' \cap W = \{0\}$ , folgt natürlich auch  $V \cap W = \{0\}$ . Ist die Dimension von  $V$  zu groß, so genügt es, die Behauptung für einen geeigneten linearen Teilraum von  $V$  der Dimension  $d - \dim W + 1$  zu zeigen.

Seien also  $\dim V = k + 1$  und  $\dim W = d - k$ .

Wir führen den Beweis per Widerspruch und nehmen an, dass für alle  $g \in G$  der Schnitt  $V \cap gW$  nicht trivial ist.



Wir wählen nun beliebige Koordinaten  $[x : y]$  auf  $\mathbb{P}^1$  und betrachten für  $t \in \mathbb{C}^*$  den Automorphismus  $g_t \in G$  mit  $[x : y] \mapsto [tx : t^{-1}y]$ .

Weiter wählen wir nun beliebige Basen  $\{v_0, \dots, v_k\}$  für  $V$  und  $\{w_{k+1}, \dots, w_d\}$  für  $W$ . Bezüglich der gewählten Koordinaten finden wir für die Basiselemente

Darstellungen  $v_i = \sum_{j=0}^d a_{ij}x^jy^{d-j}$  und  $w_i = \sum_{j=0}^d b_{ij}x^jy^{d-j}$ . Demnach haben die

Basiselemente von  $g_tW$  die Darstellung  $g_tw_i = \sum_{j=0}^d t^{2j-d}b_{ij}x^jy^{d-j}$ .

Seien nun  $A$  die  $(k+1) \times (d+1)$ -Matrix, bestehend aus den Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $B_t$  die  $(d-k) \times (d+1)$ -Matrix, bestehend aus den Koeffizienten  $t^{2j-d}b_{ij}$  und  $C_t$  die  $(d+1) \times (d+1)$ -Matrix  $\begin{pmatrix} A \\ B_t \end{pmatrix}$ . Da der Schnitt von  $V$  und  $g_tW$  nach Annahme nicht trivial ist, muss  $\det C_t = 0$  gelten. Da diese Determinante ein Laurent-Polynom in  $t$  ist, müssen alle Koeffizienten von  $t$  in  $\det C_t$  Null sein.

Nach dem Entwicklungssatz von Laplace ist  $\det C_t = \sum M_{k+1}M_{d-k}$ . Dabei wird über alle  $(k+1) \times (k+1)$  Minoren von  $C_t$  summiert. Besteht der Minor  $M_{k+1}$  aus den Zeilen  $i_0, \dots, i_k$  und Spalten  $j_0, \dots, j_k$ , so erhält man den Minor  $M_{d-k}$  aus  $C_t$  durch Streichen der Zeilen  $i_0, \dots, i_k$  und Spalten  $j_0, \dots, j_k$ .

Da die höchsten Potenzen von  $t$  in den letzten  $d-k$  Spalten von  $B_t$  auftauchen, erhält man den Leitkoeffizienten von  $\det C_t$  aus dem Produkt der Minoren  $M$  und  $M'$ , bestehend aus den ersten  $k+1$  Spalten von  $A$  bzw. den letzten  $d-k$  Spalten von  $B_1$ .<sup>2</sup>

Da dieser Koeffizient Null ist, muss entweder der erste Minor von  $A$ , oder der letzte Minor von  $B_1$  Null sein.

Im ersten Fall gibt es ein Polynom in  $V$ , dessen erste  $k+1$  Koeffizienten Null sind. Demnach verschwindet dieses Polynom im Punkt  $[0 : 1]$  mit Ordnung mindestens  $k+1$ . Das heißt, die Wronskimatrix hat einen nicht trivialen Kern und das Linearsystem  $V$  hat per Definition einen Wendepunkt in  $[0 : 1]$ .

Im zweiten Fall erhält man völlig analog, dass der Punkt  $[0 : 1]$  ein Wendepunkt des Linearsystems  $W$  ist.

Da wir zuvor ein beliebiges Koordinatensystem auf  $\mathbb{P}^1$  gewählt hatten, muss eines der beiden Systeme unendlich viele Wendepunkte besitzen.  $\zeta$  ■

**Korollar 2.37.** *Die eingeschränkten Systeme  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  schneiden sich quasi-transversal.*

*Beweis:* Zunächst gilt, dass die Minimalität der Schnittdimension von  $V$  und  $gW$  in Proposition 2.35 eine algebraische Bedingung ist und somit auf einer Zariski-offenen Menge von  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  gilt. Diese ist nach Proposition 2.35 nicht leer. Es gilt also für fast alle  $g \in G$ , dass sich  $V$  und  $gW$  quasi-transversal schneiden.

Wir bemerken zudem, dass ein beliebiger Automorphismus einer Geraden in der projektiven Ebene zu einem Automorphismus von ganz  $\mathbb{P}^2$  anhebt, der

<sup>2</sup>Die Koeffizienten von  $B_1$  sind die Koeffizienten des ursprünglichen linearen Teilraumes  $W$ .

diese Gerade invariant lässt. Zur Erinnerung: Das System  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  auf  $\mathbb{P}$  besteht aus Kurven vom Grad  $d-k$ , die die  $n-b+1$  allgemeinen Punkte  $p_0, \dots, p_{n-b}$  mit Vielfachheit  $m_0$  bzw.  $m$  schneiden. Wir wählen also einen Automorphismus  $g$  von  $\mathbb{E}$ , so dass sich  $g\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  quasi-transversal schneiden und die Anhebung  $g'$  von  $g$  die Punkte  $p_0, \dots, p_{n-b}$  in allgemeiner Lage belässt. Das bedeutet,  $g'\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  ist wieder von der Form  $\mathcal{L}(d-k, m_0, n-b, m)$ . Da  $g\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  die Einschränkung von  $g'\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  auf  $\mathbb{E}$  ist, folgt die Behauptung. ■

Damit können wir also o.B.d.A. annehmen, dass wir die allgemeinen Punkte so gewählt haben, dass sich die eingeschränkten Systeme quasi-transversal schneiden und erhalten nun explizite Formeln für  $\ell_0$ .

**Korollar 2.38.** *Ist  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \leq d - k - 1$ , so ist*

$$\ell_0 = \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1.$$

*Ist  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \geq d - k - 1$ , so ist*

$$\ell_0 = \ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} - d + k.$$

*Beweis:* Ist  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \leq d - k - 1$ , so folgt aus der Transversalität von  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  mit der Dimensionsformel für lineare Unterräume, dass  $\dim(\mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) = -1$  ist. Mit Satz 2.31 folgt nun unmittelbar die erste Behauptung.

Für  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \geq d - k - 1$  folgt mit der selben Argumentation  $\dim(\mathcal{R}_{\mathbb{P}} \cap \mathcal{R}_{\mathbb{F}}) = r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - d + k$ . Satz 2.31 liefert demnach

$$\begin{aligned} \ell_0 &= r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} - d + k + \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 2 \\ &= (r_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + 1) + (r_{\mathbb{F}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1) - d + k \\ &= \ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} - d + k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Wir fassen nochmal zusammen.

Um zu beweisen, dass ein gegebenes System  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  nicht-speziell ist, versuchen wir natürliche Zahlen  $k, b \in \mathbb{N}$  zu finden, so dass für das  $(k, b)$ -degenerierte System  $\mathcal{L}_0(d, k, m_0, n, b, m)$  die Gleichung  $\ell_0 = e(d, m_0, n, m)$  erfüllt ist. Mit dem Halbstetigkeitstheorem bzw. Korollar 2.24 folgt dann die Behauptung.

Dabei erfolgt die Berechnung von  $\ell_0$  durch rekursives Anwenden der bewiesenen Formeln für die jeweiligen Systeme.

Wie dies genau funktioniert, sehen wir im nächsten Kapitel.

## Die Rekursion für homogene Linearsysteme

Um effizient die Dimension eines Systems  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  bestimmen zu können, benötigen wir noch ein paar Vorbereitungen.

Dies ist notwendig, damit wir nicht immer iterativ alle möglichen  $(k, b)$ -Degenerationen des Systems betrachten müssen, was für große  $d$  und  $n$  viel Aufwand bedeutet.

### 3.1. Hilfsmittel zur Untersuchung auf Speziellheit

Die ersten beiden Lemmata des Abschnitts sind direkte Folgerungen aus den letzten Erkenntnissen des zweiten Kapitels.

**Lemma 3.1.** *Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ein quasi-homogenes Linearsystem. Angenommen es existiert eine  $(k, b)$ -Degeneration  $\mathcal{L}_0(d, k, m_0, n, b, m)$  des Systems  $\mathcal{L}$  mit  $0 < k < d$  und  $0 < b < n$ , so dass gilt:*

- i) *das auf  $\mathbb{P}$  eingeschränkte System  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k, m_0, n - b, m)$  ist nicht-speziell und  $v_{\mathbb{P}} = v(d - k, m_0, n - b, m) \geq -1$ ,*
- ii) *das auf  $\mathbb{F}$  eingeschränkte System  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$  ist nicht-speziell und  $v_{\mathbb{F}} = v(d, d - k, b, m) \geq -1$ ,*
- iii)  *$\hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} = \ell(d - k - 1, m_0, n - b, m) + \ell(d, d - k + 1, b, m) \leq v(d, m_0, n, m) - 1$ .*

*Dann ist  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  nicht-speziell, mit virtueller Dimension  $v(d, m_0, n, m) \geq -1$ .*

**Bemerkung 3.2.** Der Punkt *iii)* ist automatisch erfüllt, wenn beide Kernsysteme nicht-speziell sind, mit virtueller Dimension  $v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}), v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) \geq -1$ . Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.30.

*Beweis von Lemma 3.1:* (nach [CM98, S. 201]) Die Voraussetzungen *i)* und *ii)* bedeuten, dass  $\ell_{\mathbb{P}} = v_{\mathbb{P}}$  und  $\ell_{\mathbb{F}} = v_{\mathbb{F}}$  gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} &= \ell_{\mathbb{P}} - \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} - \hat{\ell}_{\mathbb{F}} - 2 \\ &= v_{\mathbb{P}} - \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + v_{\mathbb{F}} - \hat{\ell}_{\mathbb{F}} - 2 \\ &\stackrel{\text{iii)}}{\geq} v_{\mathbb{P}} + v_{\mathbb{F}} - 1 - v \\ &= d - k - 1, \quad \text{nach Lemma 2.30 i).} \end{aligned}$$

Mit Korollar 2.38 und Lemma 2.30 i) erhalten wir

$$\ell_0 = \ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} - d + k = v_{\mathbb{P}} + v_{\mathbb{F}} - d + k = v(d, m_0, n, m).$$

Die Behauptung folgt also mit Korollar 2.24 aus  $v \leq e \leq \ell_0 = v$ . ■

**Lemma 3.3.** *Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  ein quasi-homogenes Linearsystem. Angenommen es existiert eine  $(k, b)$ -Degeneration  $\mathcal{L}_0(d, k, m_0, n, b, m)$  des Systems  $\mathcal{L}$  mit  $0 < k < d$  und  $0 < b < n$ , so dass gilt:*

- i) *das Kernsystem  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - k - 1, m_0, n - b, m)$  auf  $\mathbb{P}$  ist leer,*
- ii) *das Kernsystem  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)$  auf  $\mathbb{F}$  ist leer und*
- iii)  *$\ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} = \ell(d - k, m_0, n - b, m) + \ell(d, d - k, b, m) \leq d - k - 1$ .*

*Dann ist  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  nicht-speziell und damit leer.*

**Bemerkung 3.4.** Der Punkt *iii)* ist automatisch erfüllt, wenn die eingeschränkten Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  nicht-speziell sind, mit virtueller Dimension  $v(\mathcal{L}_{\mathbb{P}}), v(\mathcal{L}_{\mathbb{F}}) \geq -1$  und  $v(\mathcal{L}) \leq -1$  gilt. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.30.

*Beweis von Lemma 3.3:* (nach [CM98, S. 201]) Die Voraussetzungen *i)* und *ii)* bedeuten, dass  $\hat{\ell}_{\mathbb{P}} = \hat{\ell}_{\mathbb{F}} = -1$  gilt. Somit erhalten wir  $r_{\mathbb{P}} = \ell_{\mathbb{P}}, r_{\mathbb{F}} = \ell_{\mathbb{F}}$  und daher nach Voraussetzung  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} = \ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} \leq d - k - 1$ .

Mit Korollar 2.38 folgt

$$\ell_0 = \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1 = -1.$$

Die Behauptung folgt also mit Korollar 2.24 aus  $v \leq e \leq \ell_0 = v$ . ■

Wir werden in der Regel  $(k, b)$ -Degenerationen mit  $k$  in der Nähe von  $m$  wählen, um die Dimension eines Systems  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  zu bestimmen. Dadurch erhalten wir auf  $\mathbb{F}$  ein System der Form  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  mit  $m_0$  in der Nähe von  $d - m$ . Diese Systeme lassen sich oft durch Anwendung von sog. Cremona- oder quadratischen Transformationen berechnen.

**3.1.1. Cremona-Transformationen.** Eine Cremona-Transformation  $\varphi$ , ist eine birationale Abbildung  $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ , welche aus der folgenden Konstruktion hervor geht.

Seien  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$  drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen und  $L_{ij} \subset \mathbb{P}^2$  die Gerade durch die Punkte  $P_i$  und  $P_j$ . Durch Aufblasen der Punkte  $P_1, P_2, P_3$  und Niederblasen der strikten Transformationen  $L'_1, L'_2, L'_3$  von  $L_1, L_2$  und  $L_3$ , wird dann eine birationale Abbildung  $\varphi$  von  $\mathbb{P}^2$  in sich induziert, welche wir als Cremona-Transformation bezeichnen. Siehe dazu auch Abbildung 3.1.1.

Für genauere Informationen verweise ich auf [Har77, Chapter V.4], oder [Sha94, Chapter IV.4]. Wir notieren aber, wieso diese Transformation nützlich für uns ist.

**Lemma 3.5.** *Sei  $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  die in den Punkten  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$  zentrierte Cremona-Transformation und  $C \subset \mathbb{P}^2$  eine irreduzible Kurve vom Grad  $d$  mit Multiplizitäten  $m_1, m_2, m_3$  in  $P_1, P_2$  und  $P_3$ . Falls  $C$  keine der drei Geraden  $L_{ij}$  durch  $P_i$  und  $P_j$  ist, hat die strikte Transformation  $C'$  von  $C$  unter  $\varphi$  Grad  $2d - m_1 - m_2 - m_3$  und Multiplizitäten  $d - m_2 - m_3$  in  $Q_1$ ,  $d - m_1 - m_3$  in  $Q_2$  und  $d - m_1 - m_2$  in  $Q_3$ . (Siehe Abbildung 3.1.1.)*

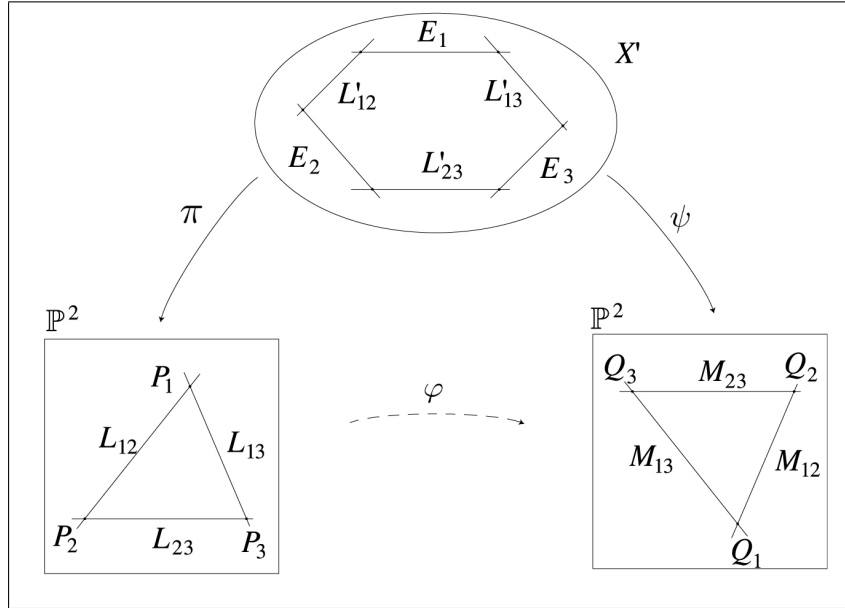


ABBILDUNG 1. die quadratische Transformation des  $\mathbb{P}^2$

*Beweis:* Wir skizzieren kurz den Beweis, der im wesentlichen durch Ausrechnen von Schnittzahlen erfolgt. Dabei gehen wir nicht ins Detail und betrachten deshalb zur Veranschaulichung die Abbildung 3.1.1.

Da die Kurve  $C$  irreduzibel ist, enthält sie die Gerade  $L_{ij}$  nicht als Komponente. Nach dem Satz von Bézout schneidet  $C$  die Gerade  $L_{ij}$  außer in  $P_i$  und  $P_j$  noch insgesamt mit Vielfachheit  $d - m_i - m_j$ .

Die strikte Transformation  $\tilde{C}$  von  $C$  schneidet also die exzeptionellen Divisoren  $E_i$  jeweils mit Vielfachheit  $m_i$  und die strikten Transformationen der Geraden  $L_{ij}$  mit Vielfachheit  $d - m_i - m_j$ . Nach dem Niederblasen dieser Geraden erhalten wir aus  $\tilde{C}$  eine Kurve  $C'$ , die in den Punkten  $Q_i$  Vielfachheit  $d - m_j - m_k$  hat und die Gerade  $M_{ij}$  mit Vielfachheit  $m_k$  schneidet, mit  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ . Mit dem Satz von Bézout folgt die Behauptung. ■

**Korollar 3.6.** *Das vorige Lemma gilt auch für reduzible Kurven, sofern diese keine der drei Geraden  $L_{12}, L_{13}, L_{23}$  als Komponente enthält. Die obigen Formeln gelten dann jeweils entsprechend für die einzelnen Komponenten und man erhält insgesamt wieder eine reduzible Kurve mit den oben beschriebenen Eigenschaften.* ■

Wir werden uns diese Eigenschaft nun im folgenden Abschnitt zu Nutze machen, indem wir quasi-homogene Linearsysteme auf „einfachere“ quasi-homogene Linearsysteme gleicher Dimension zurückführen.

Dies ist auch dann möglich, wenn es Kurven  $C \in \mathcal{L}$  gibt, welche die Geraden  $L_{12}, L_{13}, L_{23}$  mit Vielfachheiten  $k_{12}, k_{13}, k_{23} \geq 0$  enthalten:

### 3.1.2. Cremona-Transformationen und Linearsysteme.

**Proposition 3.7.** *Seien  $d, n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ,  $d \geq 2m$  beliebig. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den quasi-homogenen Linearsystemen  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, d - m, n, m)$  und  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d - m, d - 2m, n - 2, m)$ . Es gilt  $v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}')$ .*

*Beweis:* Wir setzen  $P_3 := p_0$ ,  $P_1 := p_i$  und  $P_2 := p_j \neq p_i$ , mit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Kurven des Systems  $\mathcal{L}$  in den Punkten  $P_3$  und  $P_1, P_2$  genau die Vielfachheit  $d - m$  bzw.  $m$  haben. Enthält andernfalls eine Kurve  $C \in \mathcal{L}$  den Punkt  $P_1$  mit Vielfachheit  $m_1 > m$ , so muss die Gerade  $L_{0i}$  durch  $p_0$  und  $p_i$  nach Satz von Bézout eine Komponente mit Vielfachheit  $m_i - m$  von  $C$  sein. Wir können diese Geraden dann durch Geraden ersetzen, welche  $p_0$  aber nicht  $p_i$  enthalten. Die anderen Möglichkeiten behandelt man analog.

Durch Anwendung der in  $P_1, P_2, P_3$  zentrierten Cremona-Transformation  $\varphi$  erhalten wir Kurven vom Grad  $d' = 2d - 2m - (d - m) = d - m$  mit Multiplizitäten  $m'_0 = d - m - m = d - 2m$  im Punkt  $Q_3$  bzw.  $m'_1 = m'_2 = d - m - (d - m) = 0$  in den Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$ . In den Punkten  $\varphi(p_k)$ ,  $k \neq 0, i, j$ , ist die Multiplizität der Kurven wieder  $m$ . Da die allgemeine Lage der Punkte (des ursprünglichen Systems) durch  $\varphi$  nicht zerstört wird, erhalten wir das System  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d - m, d - 2m, n - 2, m)$ .

Enthält eine Kurve  $C \in \mathcal{L}$  die drei Geraden  $L_{ij}$  mit Vielfachheiten  $k_{ij} \geq 0$ , so betrachten wir die Kurve  $C' := C - k_{12}L_{12} - k_{13}L_{13} - k_{23}L_{23}$ . Die Kurve  $C'$  hat dann Grad  $d' = d - k_{12} - k_{13} - k_{23}$  und Vielfachheiten  $m_1 = m - k_{12} - k_{13}$  in  $P_1$ ,  $m_2 = m - k_{12} - k_{23}$  in  $P_2$  und  $m_3 = d - m - k_{13} - k_{23}$  in  $P_3$ . Die Transformation von  $C'$  hat dann in den Punkten  $Q_1, Q_2, Q_3$  die Vielfachheiten  $d' - m_2 - m_3 = k_{23}$ ,  $d' - m_1 - m_3 = k_{13}$ ,  $d' - m_1 - m_2 = d - 2m + k_{12}$  und hat Grad  $2d' - m_1 - m_2 - m_3 = d - m$ . Die Transformation von  $C'$  ist also ebenfalls ein Element des Systems  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d - m, d - 2m, n - 2, m)$ . Die Cremona-Transformation  $\varphi$  liefert daher eine Bijektion zwischen den Systemen  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$ . Die Aussage  $v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}')$  erhält man durch eine einfache Rechnung. Siehe dazu auch [CM98, Abschnitt 1]. ■

**Proposition 3.8.** *Seien  $d, n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ,  $d \geq 2m$  beliebig. Dann gibt es eine Bijektion zwischen dem Linearsystem  $\mathcal{L}(d, d - m - 1, n, m)$  und dem Teilsystem  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d - m + 1, (d - 2m)p_0 + m \sum_{i=1}^{n-2} p_i + p_{n-1} + p_n)$  von  $\mathcal{L}(d - m + 1, d - 2m, n - 2, m)$  mit zwei zusätzlichen einfachen Basispunkten. Es gilt  $v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}')$ .*

*Beweis:* Setze  $P_3 := p_0$  und ohne Einschränkung  $P_1 := p_{n-1}$ ,  $P_2 := p_n$ . Wir können ähnlich wie im vorigen Lemma argumentieren und annehmen, dass die Kurven des Systems  $\mathcal{L}(d, d - m - 1, n, m)$  entweder in  $P_1, P_2$  Vielfachheit  $m$  und in  $P_3$  höchstens Vielfachheit  $d - m$  oder in  $P_1, P_2$  höchstens Vielfachheit  $m + 1$  und Vielfachheit  $d - m - 1$  in  $P_3$  haben. Für Kurven die genau die entsprechenden Vielfachheiten haben geht der Beweis genau wie zuvor.

Hat eine Kurve  $C \in \mathcal{L}(d, d - m - 1, n, m)$  nun in  $P_3$  Vielfachheit  $d - m$  und in  $P_1, P_2$  jeweils Vielfachheit  $m$ , so hat ihre Transformation Grad  $d - m$ ,

Vielfachheit  $d - 2m$  in  $Q_3$  und Vielfachheit 0 in  $Q_1$  und  $Q_2$ . Indem wir die Gerade durch  $Q_1$  und  $Q_2$  als Komponente zur Transformation von  $C$  hinzufügen, erhalten wir eine Kurve mit den geforderten Eigenschaften.

Im zweiten Fall hat die Transformation von  $C$  Grad  $d - m - 1$ , Vielfachheit  $d - 2m - 2$  in  $Q_3$  und Vielfachheit 0 in  $Q_1$  und  $Q_2$ . Indem wir die zwei Geraden durch  $Q_1$  und  $Q_3$  bzw. durch  $Q_2$  und  $Q_3$  als Komponenten zur Transformation von  $C$  hinzufügen, erhalten wir wieder eine Kurve mit den geforderten Eigenschaften. Die Aussage  $v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}')$  erhält man durch eine einfache Rechnung.  $\blacksquare$

**3.1.3. Die Anwendung von Cremona-Transformationen.** Wir stellen einige Hilfsmittel zur Betrachtung quasi-homogener Systeme zusammen.

**Lemma 3.9.** *Seien  $0 \leq m \leq d$ ,  $\mathcal{L} := \mathcal{L}(d, d - m, n, m)$  und  $\ell := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ . Dann gilt:*

- i) *Ist  $m = 0$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-speziell und  $\ell = v(d, d, n, 0) = d$ .*
- ii) *Ist  $m = 1$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-speziell und  $\ell = e(d, d - 1, n, 1) = \max\{-1, 2d - n\}$ .*
- iii) *Ist  $n = 0$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-speziell und  $\ell = v(d, d - m, 0, m) = d + dm - \frac{m^2 - m}{2}$ .*
- iv) *Ist  $n = 1$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-speziell und  $\ell = v(d, d - m, 1, m) = d + m(d - m)$ .*
- v) *Ist  $n = 2$  und  $m \leq d \leq 2m$ , so ist  $\ell = \frac{1}{2}(d - m)(d - m + 3)$ . In diesem Fall ist  $\mathcal{L}$  speziell, wenn  $d \leq 2m - 2$  ist und nicht-speziell, falls  $d = 2m - 1$  oder  $d = 2m$  ist.*
- vi) *Ist  $n = 2$  und  $d \geq 2m + 1$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-speziell und  $\ell = dm + d - \frac{3m^2 + m}{2}$ .*
- vii) *Ist  $n \geq 2$  und  $d \geq 2m$ , so ist  $\ell = \ell(d - m, d - 2m, n - 2, m)$ .*
- viii) *Ist  $2 \leq m \leq d \leq 2m - 1$  und  $n \geq 3$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-speziell und leer, also  $\ell = -1$ .*

*Beweis:* (nach [CM98, S. 209]) Die Aussagen i), iii), iv), v) und vi) erhält man nach Lemma 1.10, indem man die (maximal) drei Punkte in die Koordinatenpunkte der Ebene legt und homogene Monome zählt. Genauso folgt, dass das System  $\mathcal{L}(d, d - 1, 0, 1)$  nicht-speziell ist und Dimension  $2d$  hat. Mit dem verallgemeinerten Multiplicity One Lemma (Korollar 1.21) folgt die Aussage ii). Aussage vii) folgt mit Hilfe einer Cremona-Transformation in den Punkten  $p_0, p_i, p_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ).

Aussage viii) erfordert etwas mehr Aufwand. Angenommen es gilt  $n \geq 3$ ,  $d < 2m$  und das System  $\mathcal{L}$  ist nicht leer. Dann liegt die Gerade  $L_{ij}$  durch die zwei Punkte  $p_i$  und  $p_j$ , für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$  im fixen Divisor des Systems. Es sei  $L'_{ij}$  die strikte transformierte der Geraden  $L_{ij}$ .

Es gilt  $\mathcal{L}.L'_{ij} = d - 2m < 0$  und  $(L'_{ij})^2 = -1$ . Gilt  $n \geq 4$ , so werden die Geraden  $L_{12}$  und  $L_{34}$  zu  $(-1)$ -Kurven auf der Aufblasung der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.  $\zeta$  zu Lemma 1.27 ii). Das System muss in diesem Fall leer sein.

Sei also nun  $n = 3$ . Die drei Geraden durch die drei Punkte spalten erneut jeweils mit Vielfachheit  $2m - d$  ab und wir erhalten das Residuensystem  $\mathcal{L}(4d - 6m, d - m, 3, 2d - 3m)$ . Falls  $2d < 3m$  gilt, ist dies offenbar leer.

Wenn  $2d \geq 3m$  gilt, erhalten wir  $\mathcal{L}(4d - 6m, d - m, 3, 2d - 3m).L'_{0i} = (4d - 6m) - (d - m) - (2d - 3m) = d - 2m < 0$  und die drei Geraden, durch  $p_0$  und jeweils einen der übrigen drei Punkte, spalten mit Vielfachheit  $2m - d$  vom Residuensystem ab. Wir erhalten daher als zweites Residuensystem  $\mathcal{L}(7d - 12m, 4d - 7m, 3, 3d - 5m)$ , sofern alle Einträge nicht negativ sind. Im Fall  $7d < 12m$  wäre das Residuensystem und damit auch  $\mathcal{L}$  leer. Ist  $7d \geq 12m$ , so gilt auch  $3d \geq 5m$ . Wir wenden uns also  $m_0 = 4d - 7m$  zu. Ist  $4d < 7m$ , so ist das zweite Residuensystem leer. Für  $4d = 7m$  ist das zweite Residuensystem von der Form  $\mathcal{L}(7d - 12m, 0, 3, 3d - 5m)$ . Die drei Geraden durch die drei verbleibenden Punkte spalten erneut ab und lassen  $\mathcal{L}(10d - 18m, 0, 3, 5d - 9m)$  als Residuensystem zurück. Dies ist aber leer, denn  $4d \leq 7m \Rightarrow 5d < 9m$ .

Es bleibt der Fall  $4d > 7m$ , in dem alle Parameter des zweiten Residuensystems echt positiv sind. Wir betrachten nun den Quotienten  $r = \frac{d}{m}$  und fassen die bisherigen Ergebnisse nochmal zusammen. Ist  $r \leq \frac{7}{4}$ , so ist unser ursprüngliches System leer. Ist hingegen  $r > \frac{7}{4}$ , so gilt  $\ell(d, d - m, 3, m) = \ell(7d - 12m, 4d - 7m, 3, 3d - 5m)$ .

Dieses Residuensystem ist wieder von der ursprünglichen Form ( $m_0 = d - m$ ) und der Quotient aus Grad und Vielfachheit ist  $s(r) = \frac{7r-12}{3r-5}$ . Für  $r < \frac{13}{7}$  ist  $s(r) < \frac{7}{4}$  und das System ist nach Vorüberlegung leer.

Die Idee ist nun, diese Schritte zu iterieren und man stellt fest, dass es für jedes  $r < 2$  einen Iterationsschritt  $n \in \mathbb{N}$  geben muss, so dass  $s^{(n)}(r) < \frac{7}{4}$  ist:

$s$  bildet das Intervall  $I_1 := (\frac{7}{4}, 2)$  bijektiv auf das Intervall  $I_2 := (1, 2)$  ab und für jedes  $r \in I_1$  gilt  $s(r) < r$ . Würde dieses Iterationsverfahren stets Werte oberhalb von  $\frac{7}{4}$  liefern, müsste es gegen einen Fixpunkt von  $s$  konvergieren. Der einzige Fixpunkt von  $s$  ist jedoch 2. ■

**Proposition 3.10.** *Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, d - m, n, m)$  mit  $2 \leq m \leq d$ . Mittels Division mit Rest schreiben wir  $d = qm + \mu$ , mit  $0 \leq \mu \leq m - 1$  und  $n = 2h + \varepsilon$ , mit  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ . Dann gilt:*

- i) *Ist  $q \geq h + 1$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-spezial und nicht leer.*
- ii) *Gilt  $q = h$  und  $\varepsilon = 1$ , so ist das System  $\mathcal{L}$  nicht-spezial und leer.*
- iii) *Gilt  $q = h$ ,  $\varepsilon = 0$  und  $\mu = m - 1$ , so ist  $\mathcal{L}$  nicht-spezial und nicht leer.*
- iv) *Gilt  $q = h$ ,  $\varepsilon = 0$  und  $\mu \leq m - 2$ , so ist das System  $\mathcal{L}$  speziell und  $\ell = \frac{\mu(\mu+3)}{2}$ .*
- v) *Ist  $q \leq h - 1$ , so ist das System  $\mathcal{L}$  nicht-spezial und leer.*

*Beweis:* (nach [CM98, S. 211]) Im ersten Fall erhalten wir nach Proposition 3.7 durch  $h$ -fache Anwendung von quadratischen Transformationen das System  $\mathcal{L}(d - hm, d - (h + 1)m, \varepsilon, m)$ . Dies ist nach Lemma 3.9 *iii)* bzw. *iv)* nicht-spezial und nicht leer.



Ist  $q \leq h$ , so erhalten wir durch  $(q-1)$ -fache Anwendung von quadratischen Transformationen das System  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\mu+m, \mu, 2(h-q) + \varepsilon + 2, m)$ . Gilt nun  $\varepsilon = 1$  oder  $q < h$ , so ist  $2(h-q) + \varepsilon + 2 \geq 3$  und wegen  $0 \leq \mu \leq m-1$  ist  $m \leq \mu+m \leq 2m-1$ . Das System  $\mathcal{L}'$  ist also nach Lemma 3.9 viii) nicht-spezial und leer.

Im Fall  $q = h, \varepsilon = 0$  ist  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\mu+m, \mu, 2, m)$  und Lemma 3.9 v) liefert die fehlenden Behauptungen iii) und iv). ■

**Korollar 3.11.** *Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, d-m+s, n, m)$  mit  $s \geq 1$ . Wenn wir  $\mathcal{L}' := \mathcal{L}(d-sn, d-sn-m+s, n, m-s)$  setzen, ist  $\ell = \ell'$  und  $\mathcal{L}$  ist nicht-spezial, es sei denn es gilt*

- i)  $s \geq 2$  und  $\mathcal{L}'$  ist nicht-spezial und nicht leer, oder
- ii)  $\mathcal{L}'$  ist spezial.

*Beweis:* (nach [CM98, S. 211]) Wir bezeichnen mit  $L_i \subset \mathbb{P}^2$  die Gerade durch die zum System  $\mathcal{L}$  gehörigen Punkte  $p_0$  und  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Wegen  $m_0 + m = d - m + s + m = d + s$  und  $s \geq 1$  folgt iterativ mit dem Satz von Bézout, dass jede Kurve  $C \in \mathcal{L}$  die  $n$  Geraden  $L_1, \dots, L_n$  mit Multiplizität  $s$  als Komponente enthalten muss. Wir können daher anstelle von  $\mathcal{L}$  das oben definierte System  $\mathcal{L}'$  betrachten, welches durch Entfernen der (mehrfachen) Geraden  $L_i$  entsteht.

Eine einfache Rechnung ergibt  $v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}')$  für  $s = 1$  und  $v(\mathcal{L}) < v(\mathcal{L}')$  für  $s \geq 2$ .

Ist das System  $\mathcal{L}'$  also spezial, oder  $s \geq 2$  und das System  $\mathcal{L}'$  nicht leer, so muss  $\mathcal{L}$  (wegen  $\ell = \ell'$ ) spezial sein. Ist das System  $\mathcal{L}'$  nicht-spezial und  $s = 1$ , so ist auch  $\mathcal{L}$  nicht-spezial. ■

**Proposition 3.12.** *Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, d-m-1, n, m)$  mit  $2 \leq m \leq d-1$ . Mittels Division mit Rest schreiben wir  $d = q(m-1) + \mu$ , mit  $0 \leq \mu \leq m-2$  und  $n = 2h + \varepsilon$ , mit  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ . Dann ist das System  $\mathcal{L}$  nicht-spezial, es sei denn, es gilt entweder*

- i)  $q = h+1, \mu = \varepsilon = 0$  und  $(m-1)(m+2) \geq 4h$ , dann ist  $\ell = \frac{1}{2}(m-1)(m+2) - 2h$ , oder
- ii)  $q = h, \varepsilon = 0$  und  $4q \leq \mu(\mu+3)$ , dann ist  $\ell = \frac{1}{2}\mu(\mu+3) - 2q$ .

*Beweis:* (nach [CM98, S. 212]) Durch Anwendung einer Cremona-Transformation auf das System  $\mathcal{L}(d, d-m-1, n, m)$ , erhalten wir nach Proposition 3.8 ein Teilsystem von  $\mathcal{L}(d-m+1, d-2m, n-2, m)$ , welches zwei allgemeine, einfache Basispunkte besitzt.

Dies ist wieder von der ursprünglichen Form. Wenden wir also  $k$  Cremona-Transformationen auf das ursprüngliche System an, so erhalten wir ein Teilsystem von  $\mathcal{L}(d-k(m-1), d-(k+1)(m-1)-2, n-2k, m)$ , welches  $2k$  allgemeine, einfache Basispunkte besitzt, sofern  $d-(k+1)(m-1)-2 \geq 0$  und  $n \geq 2k$  gilt. Wir starten nun eine umfangreiche Fallunterscheidung:

**1. Fall:**  $q \geq h + 1$  und  $\mu \geq 2$  oder  $q \geq h + 2$ .

Wir können  $h$  Cremona-Transformationen anwenden und erhalten ein Teilsystem  $\mathcal{L}'$  von  $\mathcal{L}(d-h(m-1), d-(h+1)(m-1)-2, \varepsilon, m)$ , mit  $2h$  allgemeinen, einfachen Basispunkten. Wir wenden zunächst Lemma 3.9 iii), iv) auf das System  $\mathcal{L}(d-h(m-1), d-(h+1)(m-1)-2, \varepsilon, m+1)$  an und erhalten, dass dieses System nicht-speziell und nicht leer ist. Nach Lemma 1.22 ii) ist  $\mathcal{L}(d-h(m-1), d-(h+1)(m-1)-2, \varepsilon, m)$  ebenfalls nicht-speziell und das verallgemeinerte Multiplicity One Lemma (Korollar 1.21) zeigt, dass auch  $\mathcal{L}'$  nicht-speziell ist.

**2. Fall:**  $q = h + 1$  und  $\mu \leq 1$ .

Sei zunächst  $m = 2$ . Für  $\mu = 0$  erhalten wir nach Ausführung von  $(h-2)$  Cremona-Transformationen das System  $\mathcal{L}(3, 0, 4+\varepsilon, 2)$ , welches nach Proposition 1.32 nicht-speziell ist. Für  $\mu = 1$  erhalten wir nach Anwendung von  $(h-1)$  Cremona-Transformationen das System  $\mathcal{L}(3, 0, 2+\varepsilon, 2)$ , welches ebenfalls nach Proposition 1.32 nicht-speziell ist. Sei also nun  $m \geq 3$ .

Nach  $(h-1)$ -facher Anwendung von Cremona-Transformationen, erhalten wir ein Teilsystem von  $\mathcal{L}(d-(h-1)(m-1), d-h(m-1)-2, 2+\varepsilon, m) = \mathcal{L}(2m-2+\mu, m-3+\mu, 2+\varepsilon, m)$  mit  $2h-2$  allgemeinen, einfachen Basispunkten.

Nach dem Satz von Bézout enthält jede Kurve des Systems die Gerade (falls  $\varepsilon = 0$ ) bzw. die drei Geraden (falls  $\varepsilon = 1$ ), welche zwei der  $2+\varepsilon$  Punkte  $p_1, \dots, p_{2+\varepsilon}$  verbinden, mit Vielfachheit  $2-\mu$ . Im Falle  $\mu = 0$  ist das System also nach Lemma 1.27 iv) speziell, sofern es nicht leer ist. Ist das Residuensystem hingegen leer, so muss nach Lemma 1.27 auch das ursprüngliche System leer und wegen  $-1 = \ell(d, d-m-1, n, m) \geq e(d, d-m-1, n, m) \geq -1$  folglich nicht-speziell sein.

Achtung, im folgenden analysieren wir erneut das Residuensystem von  $\mathcal{L}$ , nicht das System  $\mathcal{L}'$  (Siehe Kapitel 1.)

*Fall a):*  $\mu = \varepsilon = 0$ . Das Residuensystem  $\mathcal{L}(2m-4, m-3, 2, m-2)$  transformiert zu  $\mathcal{L}(m-1, 0, 2, 1)$ , welches nach Korollar 1.21 nicht-speziell ist. Folglich gilt: das ursprüngliche System ist genau dann nicht leer, wenn eine Kurve vom Grad  $m-1$  mit  $2h$  einfachen Basispunkten existiert  $\Leftrightarrow (m-1)(m+2) \geq 4h$ .

*Fall b):*  $\mu = 0$  und  $\varepsilon = 1$ . Das System ist leer und daher nicht-speziell. Für  $m = 3$  ist das ursprüngliche System von der Form  $\mathcal{L}(4, 0, 3, 3)$  und daher nach Proposition 1.32 nicht speziell. Für  $m \geq 4$  erhalten wir aus dem Residuensystem  $\mathcal{L}(2m-8, m-3, 3, m-4)$  nach einer Cremona-Transformation das System  $\mathcal{L}(m-4, m-3, 3, 0)$ , welches offensichtlich ( $m_0 > d$ ) leer ist.

*Fall c):*  $\mu = \varepsilon = 1$ . Das Residuensystem ist von der Form  $\mathcal{L}(2m-4, m-2, 3, m-2)$ . Dies transformiert zu  $\mathcal{L}(m-2, 0, 1, m-2)$ , welches nicht-speziell und nicht leer ist. Die virtuellen Dimensionen des ursprünglichen Systems und des Residuensystems stimmen nach Lemma 1.27 iii) überein, weil  $\mu = 1$  ist. Somit stimmen auch die Dimension und die virtuelle Dimension des ursprünglichen Systems überein und dies ist folglich ebenfalls nicht-speziell.

*Fall d):*  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ . Das Residuensystem  $\mathcal{L}(2m - 2, m - 2, 2, m - 1)$  transformiert in das nicht-spezielle System  $\mathcal{L}(m, 0, 2, 1)$ . Mit der gleichen Argumentation wie im Fall *c)* folgt die Behauptung.

**3. Fall:**  $q \leq h$  und  $\mu = 1$ . Wegen  $m \leq d - 1$  gilt  $q \geq 2$ . Wir führen  $(q - 2)$  Cremona-Transformationen durch und erhalten das System  $\mathcal{L}(d - (q - 2)(m - 1), d - (q - 1)(m - 1) - 2, n - 2(q - 2), m) = \mathcal{L}(2m - 2 + \mu, m - 3 + \mu, 2(h - q) + 4 + \varepsilon, m)$ . Wir argumentieren wie im Beweis von Lemma 3.9 viii) und erhalten, dass das System leer und folglich (s.o.) nicht-speziell ist.

**4. Fall:**  $q \leq h$  und  $\mu = 0$ .

*Fall a):*  $m \geq 3$ . Wir können wie im 3. Fall argumentieren und erhalten, dass das System leer und deshalb nicht-speziell ist.

*Fall b):*  $m = 2$ . Wir erhalten nach  $(q - 3)$  Cremona-Transformationen das System  $\mathcal{L}(3, 0, 2(h - q) + 6 + \varepsilon, 2)$ . Für  $h = q$  folgt mit Proposition 1.32, dass das System nicht-speziell und leer ist. Mit Lemma 1.22 folgt dieses Resultat auch für  $h > q$ .

**5. Fall:**  $q \leq h$  und  $\mu \geq 2$ .

Durch  $(q - 1)$ -fache Anwendung der Cremona-Transformation erhalten wir ein Teilsystem  $\mathcal{L}(\mu + m - 1, \mu - 2, 2(h - q) + \varepsilon + 2, m)$ , mit  $2q - 2$  allgemeinen, einfachen Basispunkten.

*Fall a):*  $\mu \geq 2$ ,  $h > q$ . Wir argumentieren wie im Beweis von Lemma 3.9, viii). Das System ist dann leer und nicht-speziell.

*Fall b):*  $\mu \geq 2$ ,  $h = q$  und  $\varepsilon = 1$ . Die drei Geraden durch je zwei der drei Punkte  $p_1, p_2, p_3$  liegen im fixen Divisor des Systems; jeweils mit Multiplizität  $m - \mu + 1$ . Das Residuensystem ist dann von der Form  $\mathcal{L}(4\mu - 2m - 4, \mu - 2, 3, 2\mu - m - 2)$ . Ist  $2m \geq 4\mu - 3$ , so muss das System leer sein, weil das Residuensystem sonst negativen Grad hätte. Andernfalls transformiert dies zu einem System der Form  $\mathcal{L}(2\mu - m - 2, \mu - 2, 3, 0)$ , welches wegen  $\mu \leq m - 2$  ebenfalls leer ist.

*Fall c):*  $\mu \geq 2$ ,  $h = q$  und  $\varepsilon = 0$ . Die Gerade durch die verbleibenden zwei Punkte liegt mit Vielfachheit  $m - \mu + 1 \geq 3$  im fixen Divisor des Systems. Das Residuensystem ist dann von der Form  $\mathcal{L}(2\mu - 2, \mu - 2, 2, \mu - 1)$ , mit  $2q - 2$  zusätzlichen allgemeinen, einfachen Basispunkten. Eine letzte Transformation liefert das System  $\mathcal{L}(\mu, 0, 2, 1)$ , mit zusätzlich  $2q - 2$  allgemeinen, einfachen Basispunkten, d.h. das System  $\mathcal{L}(\mu, 0, 2q, 1)$ . Dieses System ist nach dem Multiplicity One Lemma nicht-speziell und genau dann nicht leer, wenn  $\mu(\mu + 3) \geq 4q$  gilt. Das Ausgangssystem ist also nach Lemma 1.27 iv) für  $\mu(\mu + 3) \geq 4q$  speziell und für  $\mu(\mu + 3) < 4q$  nicht-speziell und leer. ■

Unsere Vorgehensweise ist bei den folgenden Beweisen immer gleich und kann durch einen einfachen Algorithmus beschrieben werden:

### 3.2. Die einfache Rekursion

Wir wollen nachweisen, dass ein gegebenes homogenes Linearsystem  $\mathcal{L}(d, 0, m, n)$  nicht-spezial ist und seine Dimension angeben.

Dazu wählen wir  $k \in \{1, \dots, m, m+1\}$ ,  $b \in \{1, \dots, n-1\}$  und führen eine  $(k, b)$ -Degeneration durch. Wir betrachten für  $k$  keine größeren Werte, da wir für Berechnungen mit  $k > m+1$  keine direkten Hilfsmittel zur Verfügung haben.

Man kann leider nicht voraussagen welche Wahl von  $k$  und  $b$  zum Ziel führt und muss unter Umständen alle Möglichkeiten durchlaufen.

---



---

#### ALGORITHMUS 3.2.1. Einfache Rekursion

```

Data : homogenes Linearsystem  $\mathcal{L}(d, 0, m, n)$  mit  $d > m$ 
Result :  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(d, 0, m, n))$ , falls Rekursion erfolgreich.

for int  $b = 1, \dots, n - 1$  do
  for int  $k = m + 1, \dots, 1$  do
    /* Bestimme Systeme und Kernsysteme auf  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{F}$  */
     $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} := \mathcal{L}(d - k, 0, n - b, m)$ ,  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} := \mathcal{L}(d - k - 1, 0, n - b, m)$ ;
     $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} := \mathcal{L}(d, d - k, b, m)$ ,  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} := \mathcal{L}(d, d - k + 1, b, m)$ ;

    Prüfe mit Proposition 1.32 oder Lemma 1.22 ob  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  speziell sind;
    if  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nicht-spezial then
       $\hat{\ell}_{\mathbb{P}} := e(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}})$ ,  $\ell_{\mathbb{P}} := e(\mathcal{L}_{\mathbb{P}})$ ;

      /* Bestimme, wenn möglich,  $\ell_{\mathbb{F}} := \dim(\mathcal{L}_{\mathbb{F}})$  und  $\hat{\ell}_{\mathbb{F}} := \dim(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}})$  */
      /* Lemma 1.22 erspart unter Umständen eine Berechnung */
      for  $\mathcal{L}_{\text{help}} = \mathcal{L}_{\mathbb{F}}, \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  do
        if  $m_0(\mathcal{L}_{\text{help}}) = d - m$  then
          | Benutze Proposition 3.10 oder Lemma 3.9;
        else if  $m_0(\mathcal{L}_{\text{help}}) > d - m$  then
          | Benutze Korollar 3.11 ;
        else
          | Benutze Proposition 3.12;

      if Berechnung von  $\hat{\ell}_{\mathbb{F}}$  und  $\ell_{\mathbb{F}}$  erfolgreich then
         $r_{\mathbb{P}} := \ell_{\mathbb{P}} - \hat{\ell}_{\mathbb{P}} - 1$ ,  $r_{\mathbb{F}} := \ell_{\mathbb{F}} - \hat{\ell}_{\mathbb{F}} - 1$ ;
        if  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} < d - k - 1$  then
          |  $\ell_0 := \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1$ ;
        else
          |  $\ell_0 := \ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} - d + k$ ;
        if  $\ell_0 = e(\mathcal{L}(d, 0, m, n))$  then
          | return  $(k, b, \ell_0)$ ;
        else
          | ;

      else
        | ;

    else
      | ;
  return FAIL;

```

---

Wir werden im folgenden stets eine geeignete  $(k, b)$ -Degeneration angeben und wie oben nachweisen, dass das Verfahren mit den gewählten Parametern ein korrektes Ergebnis liefert.

### 3.3. Erste Beispiele

Nachdem wir obige Werkzeuge bereitgestellt haben, wollen wir diese auch zur Anwendung bringen und ein paar Beispiele betrachten.

**Beispiel 3.13.** Das System  $\mathcal{L}(4m, 0, 16, m)$  ist für alle  $m \in \mathbb{N}$  nicht-spezial und leer.

*Beweis:* Wir führen eine  $(m, 7)$ -Degeneration der Ebene durch und erhalten die Systeme

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(3m, 0, 9, m), \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(3m-1, 0, 9, m), \mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(4m, 3m, 7, m) \text{ und } \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(4m, 3m+1, 7, m).$$

Nach Theorem 1.31 sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nicht speziell und eine einfache Rechnung liefert damit  $\ell_{\mathbb{P}} = 0$  und  $\hat{\ell}_{\mathbb{P}} = -1$ .

Das System  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  ist nach Proposition 3.10 nicht-spezial und  $v(\mathcal{L}_{\mathbb{F}}) \leq -1$ .  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  ist also leer und Lemma 1.22 liefert, dass auch  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nicht-spezial und leer ist. Mit Lemma 3.3 und Bemerkung 3.4 folgt schließlich die Behauptung.  $\blacksquare$

**Satz 3.14.** Sei  $4 \leq n \in \mathbb{N}$  eine beliebige Quadratzahl. Dann ist jedes homogene System der Form  $\mathcal{L}(m\sqrt{n}, 0, n, m)$  nicht-spezial und für  $n \geq 16$  gilt  $\ell(m\sqrt{n}, 0, n, m) = -1$ .

*Beweis:* Wir beweisen den Satz mit Induktion über  $n$ . Den Induktionsanfang liefert Proposition 1.32 zusammen mit Theorem 1.31 für  $n = 4$  und  $n = 9$ . Für  $n = 16$  wurde die Behauptung in Beispiel 3.13 nachgewiesen.

Sei also nun  $25 \leq n \in \mathbb{N}$  eine beliebig aber fest gewählte Quadratzahl und die Behauptung für alle kleineren Quadratzahlen bereits gezeigt.

Wir führen eine  $(k, b)$ -Degeneration der Ebene mit  $k = m - 1$ ,  $b := 2\sqrt{n} - 1$  durch und erhalten die Systeme

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - m + 1, 0, n - b, m), \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d - m, 0, n - b, m), \\ \mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - m + 1, b, m) \text{ und } \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d, d - m + 2, b, m).$$

Es gilt  $n - b = n - (2\sqrt{n} - 1) = (\sqrt{n} - 1)^2$  und  $\sqrt{n} - 1 \in \mathbb{N}$ . Das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  ist also nach Induktionsvoraussetzung nicht speziell und wegen  $n \geq 25$  leer. Mit Lemma 1.22 folgt, dass auch  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  nicht-spezial ist. Eine einfache Rechnung liefert  $\ell_{\mathbb{P}} = 4$  für  $n = 25$ ,  $\ell_{\mathbb{P}} = 2$  für  $n = 36$  und  $\ell_{\mathbb{P}} = -1$  für  $n \geq 49$ .

Da die Vielfachheit  $m_0$  des Systems  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  von der Form  $m_0 = d - m + \alpha$  mit  $\alpha = 1$  ist, verwenden wir Korollar 3.11 und betrachten das System

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(d - b, d - b - m + 1, b, m - 1).$$

Da  $b$  per Definition ungerade ist, folgt mit Proposition 3.10, dass  $\mathcal{L}'$  nicht-spezial ist. Daher ist  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  nicht-spezial und wegen  $n \geq 25$  ist  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  leer. Nach Lemma 1.22 ist auch das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nicht speziell und leer. Es gilt also in jedem Fall  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \leq d - k - 1 = d - m$  und  $\ell_0 = \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1 = -1 = v(\mathcal{L})$ . Die Behauptung folgt somit aus Korollar 2.24.  $\blacksquare$

**Korollar 3.15.** *Das homogene System  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  ist für  $n \in \{4, 9\}$  und  $d \geq m\sqrt{n}$  nicht-spezial mit  $\ell(d, 0, n, m) > -1$  und für jede Quadratzahl  $n > 9$  und  $d \leq m\sqrt{n}$  leer.*

*Beweis:* Die Behauptung folgt aus Theorem 1.31 bzw. aus dem vorherigen Satz zusammen mit Lemma 1.22.  $\blacksquare$

**Bemerkung 3.16.** In den nächsten Beispielen sind wir an Aussagen für beliebig große Vielfachheiten  $m \in \mathbb{N}$  interessiert. Wir werden daher das asymptotische Verhalten der Systeme in Abhängigkeit von  $m$  studieren und daher in unseren Betrachtungen lineare Terme in  $m$  vernachlässigen. Um dies anzuzeigen, werden wir das Symbol  $\asymp$  in unseren Berechnungen benutzen.

**Beispiel 3.17.** Für  $n \in \{10, 11\}$  sei  $\alpha > \frac{7}{2}$  und für  $n = 12$  sei  $\alpha > \frac{11}{3}$ . Dann ist das System  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d_{\alpha, m}, 0, n, m)$  für  $d_{\alpha, m} := \lceil \alpha m \rceil$  und hinreichend großes  $m \in \mathbb{N}$  nicht-spezial.

*Beweis:* Sei  $m \in \mathbb{N}$  zunächst beliebig. Wir führen eine  $(k, b)$ -Degeneration der Ebene mit  $k = m$ ,  $b = 5$  durch und erhalten die Systeme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{P}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha, m} - m, 0, n - 5, m), \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d_{\alpha, m} - m - 1, 0, n - 5, m), \\ \mathcal{L}_{\mathbb{F}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha, m}, d_{\alpha, m} - m, 5, m) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d_{\alpha, m}, d_{\alpha, m} - m + 1, 5, m). \end{aligned}$$

Für  $n \in \{10, 11\}$  sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nach Proposition 1.32 nicht-spezial, falls  $d_{\alpha, m} - m - 1 > \frac{1}{2}(5m - 2)$  gilt.

Für  $n = 12$  sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nach Proposition 1.32 nicht-spezial, falls  $d_{\alpha, m} - m - 1 > \frac{1}{3}(8m - 2)$  gilt.

Nach Wahl von  $\alpha$  sind jeweils beide Ungleichungen für hinreichend großes  $m$  erfüllt.

Die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  ist für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned} v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) &= \frac{(d_{\alpha, m} - m - 1)(d_{\alpha, m} - m + 2)}{2} - (n - 5) \frac{m(m+1)}{2} \\ &\asymp \frac{d_{\alpha, m}^2 - 2md_{\alpha, m} + m^2 - nm^2 + 5m^2}{2} \\ &\geq \frac{m^2}{2}(\alpha^2 - 2\alpha + 6 - n) \\ &= \frac{m^2}{2}((\alpha - 1)^2 + 5 - n) > 0, \quad \text{nach Wahl von } \alpha. \end{aligned}$$

Damit sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nach Lemma 1.22 nicht-spezial und nicht leer.

Das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  ist von der Form  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  mit  $m_0 = d - m + 1$ . Korollar 3.11 folgend, betrachten wir also das System

$$\mathcal{L}' := \mathcal{L}(d_{\alpha, m} - 5, d_{\alpha, m} - m + 4, 5, m - 1).$$

Nach Proposition 3.10 ist dies in jedem Fall nicht spezial und nach Korollar 3.11 ist somit auch  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nicht-spezial.

Die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  ist für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned} v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) &= \frac{(d_{\alpha,m})(d_{\alpha,m}+3)}{2} - \frac{(d_{\alpha,m}-m+1)(d_{\alpha,m}-m+2)}{2} - 5\frac{m(m+1)}{2} \\ &\asymp \frac{2md_{\alpha,m}-6m^2}{2} \\ &= md_{\alpha,m} - 3m^2 \\ &\geq \alpha m^2 - 3m^2 > 0, \text{ nach Wahl von } \alpha. \end{aligned}$$

Damit sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nach Lemma 1.22 nicht-speziell und nicht leer. Lemma 3.1 liefert daher die Behauptung.  $\blacksquare$

**Beispiel 3.18.** Für  $n = 13$  sei  $\alpha > \frac{23}{6}$  und für  $n \in \{14, 15\}$  sei  $\alpha \geq 4$ . Dann ist das System  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, 0, n, m)$  für  $d_{\alpha,m} := \lceil \alpha m \rceil$  und hinreichend großes  $m \in \mathbb{N}$  nicht-speziell.

*Beweis:* Für  $n = 13$  und  $n = 14$  führen wir eine  $(k, b)$ -Degeneration mit  $k = m + 1$ ,  $b = 5$  durch und erhalten die Systeme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{P}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha,m} - m - 1, 0, n - 5, m), \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m} - m - 2, 0, n - 5, m), \\ \mathcal{L}_{\mathbb{F}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, d_{\alpha,m} - m - 1, 5, m) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, d_{\alpha,m} - m, 5, m). \end{aligned}$$

Für  $n = 14$  sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nach Proposition 1.32 nicht-speziell.

Für  $n = 13$  sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nach Proposition 1.32 nicht-speziell, falls  $d_{\alpha,m} - m - 2 > \frac{1}{3}(8m - 2)$  gilt.

Nach Wahl von  $\alpha$  ist die Ungleichung für hinreichend großes  $m$  erfüllt.

Die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  ist für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned} v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) &= \frac{(d_{\alpha,m}-m-2)(d_{\alpha,m}-m+1)}{2} - (n-5)\frac{m(m+1)}{2} \\ &\asymp \frac{d_{\alpha,m}^2 - 2md_{\alpha,m} + m^2 - nm^2 + 5m^2}{2} \\ &\geq \frac{m^2}{2}(\alpha^2 - 2\alpha + 6 - n) \\ &= \frac{m^2}{2}((\alpha - 1)^2 + 5 - n) > 0, \text{ nach Wahl von } \alpha. \end{aligned}$$

Damit sind die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nach Lemma 1.22 nicht-speziell und nicht leer.

Das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  ist nach Proposition 3.10 in jedem Fall nicht-speziell. Die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned} v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) &= \frac{(d_{\alpha,m})(d_{\alpha,m}+3)}{2} - \frac{(d_{\alpha,m}-m)(d_{\alpha,m}-m+1)}{2} - 5\frac{m(m+1)}{2} \\ &\asymp \frac{2md_{\alpha,m}-6m^2}{2} \\ &= md_{\alpha,m} - 3m^2 \\ &\geq \alpha m^2 - 3m^2 > 0, \text{ nach Wahl von } \alpha. \end{aligned}$$

Die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  sind also beide nicht-speziell und nicht leer.

Für  $n = 15$  führen wir eine  $(k, b)$ -Degeneration mit  $k = m + 1$ ,  $b = 6$  durch und erhalten die Systeme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{P}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha,m} - m - 1, 0, 9, m), \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m} - m - 2, 0, 9, m), \\ \mathcal{L}_{\mathbb{F}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, d_{\alpha,m} - m - 1, 6, m) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, d_{\alpha,m} - m, 6, m). \end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation folgt wie zuvor, dass die Systeme  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nicht-spezial und nicht leer sind.

Das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  ist wegen  $d_{\alpha,m} > 4m$  nach Proposition 3.10 nicht-spezial und nicht leer, denn mit der dort verwendeten Notation gilt  $q = h+1$ . Lemma 1.22 liefert daher erneut zusammen mit Lemma 3.1 die Behauptung. ■



## Grenzwertbetrachtungen für eine feste Anzahl von Punkten

### 4.1. Ausblick und Motivation

Rick Miranda und Ciro Ciliberto haben mit Hilfe ihrer Rekursion zeigen können, dass die Harbourne-Hirschowitz - Vermutung für jedes homogene Linear-system  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$ , mit  $m \leq 12$  wahr ist. (Siehe [CM00, S. 4046–4050].) Wir wollen dies jedoch nicht ausführen und wenden uns einer weiteren berühmten Vermutung zu.

**Vermutung 4.1** (Nagata-Vermutung). *Sei  $C \subset \mathbb{P}^2$  eine ebene Kurve vom Grad  $d$ , welche  $n > 9$  allgemeine Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  mit Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  enthält. Dann gilt  $d > \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_i$ .*

Nagata hat diese Vermutung in Zusammenhang mit seiner Arbeit an Hilberts 14. Problem aufgestellt und für den Fall bewiesen, dass  $n > 9$  eine Quadratzahl ist.

**Theorem 4.2.** *Sei  $3 < k \in \mathbb{N}$  und  $C \subset \mathbb{P}^2$  eine ebene Kurve vom Grad  $d$ , welche  $n = k^2$  allgemeine Punkte  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$  mit Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  enthält. Dann gilt  $d > \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_i$ .*

*Beweis:* Siehe [Nag65, Proposition 1, S.23] ■

Die obige Formulierung der Nagata-Vermutung ist klassisch. Sie wird aber oft auch für  $n \geq 9$  Punkte in der Sprache von Divisoren formuliert:

**Vermutung 4.3.** *Es sei  $\nu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  die Aufblasung von  $\mathbb{P}^2$  in  $n \geq 9$  allgemeinen Punkten  $p_1, \dots, p_n$ . Weiter sei  $E_i$  der exzeptionelle Divisor über dem Punkt  $p_i$  und  $H$  sei der Rückzug einer Geraden  $L \subset \mathbb{P}^2$  auf  $\mathbb{P}^1$ . Dann ist der Divisor  $H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_i$  auf  $\mathbb{P}^1$  nef.*

**Lemma 4.4.** *Die Vermutung 4.3 ist für  $n > 9$  äquivalent zur Nagata-Vermutung.*

*Beweis:* : Angenommen der Divisor  $H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_i$  auf der Aufblasung  $\nu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  von  $\mathbb{P}^2$  in  $n > 9$  allgemeinen Punkten  $p_1, \dots, p_n$  ist nef. Sei nun  $C$  eine ebene Kurve vom Grad  $d$ , welche den Punkt  $p_i$  mit Vielfachheit  $m_i$  enthält, f.a.  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist der Divisor  $C' := \nu^*(C) - \sum_{i=1}^n m_i E_i$  ein effektiver Divisor auf  $\mathbb{P}^1$  und es gilt

$$0 \leq C' \cdot (H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_i) = C' \cdot H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n C' \cdot E_i = d - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_i.$$

Es gilt sogar  $d > \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_i$ . Ist  $n > 9$  keine Quadratzahl, so folgt dies aus  $d, m_i \in \mathbb{N}$ , f.a.  $i = 1, \dots, n$ . Wenn  $n > 9$  eine Quadratzahl ist, folgt die Behauptung aus Theorem 4.2.

Wir nehmen nun an, dass die (erste Version der) Nagata Vermutung gilt. Sei  $D$  ein beliebiger effektiver Divisor auf  $\mathbb{P}^l$  und  $d := D.H$ ,  $m_i := D.E_i$ , f.a.  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist  $\nu_*(D)$  eine Kurve vom Grad  $d$ , die die Punkte  $p_i$  mit Vielfachheit  $m_i$  enthält ( $i = 1, \dots, n$ ) und es folgt

$$D.(H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_i) = D.H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n D.E_i = d - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_i > 0. \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 4.5.** Mit dem obigen Lemma und Theorem 4.2 sieht man, dass der Divisor  $H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_i$  für Quadratzahlen  $n > 9$  nef ist. Dies gilt auch für  $n = 9$ . Man kann dies, wie auch für Quadratzahlen  $n > 9$ , direkt zeigen und wir geben kurz die

*Beweisidee:* Für  $n = 9$  Punkte wird das Linearsystem  $\mathcal{L}(3m, 0, 9, m)$  von einer eindeutig bestimmten  $m$ -fachen Kubik erzeugt. Im Fall  $n > 9$  bläst man  $\mathbb{P}^2$  in den  $n = d^2$  Schnittpunkten zweier ebener Kurven vom Grad  $d$  auf. Der Divisor  $dH - E_1 - \dots - E_{d^2}$  ist dann global erzeugt und daher nef. Wieder liefert ein Halbstetigkeitsargument die Behauptung. (Siehe z. B. [Laz04, S. 272–273].)  $\blacksquare$

Die zweite Formulierung der Nagata-Vermutung führt unmittelbar auf die sog. Seshadri-Konstanten (siehe [Laz04]).

**Definition 4.6.** Es sei  $L$  ein amples Geradenbündel auf der irreduziblen, projektiven Varietät  $X$  und  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  die Aufblasung von  $X$  in  $n$  Punkten  $x_i \in X$ , mit exzeptionellem Divisor  $E_i$  über dem Punkt  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist die *Seshadri-Konstante* von  $L$  in  $x_1, \dots, x_n$  definiert durch

$$\varepsilon(L, x_1, \dots, x_n) := \max\{\varepsilon \geq 0 \mid \pi^*L - \varepsilon \sum_{i=1}^n E_i \text{ ist nef}\}.$$

Es sei noch bemerkt, dass die Zahl  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  eine obere Schranke für die Seshadri-Konstante  $\varepsilon(L, x_1, \dots, x_n)$  ist.<sup>1</sup>

Wir stellen nun den Zusammenhang zu den vorigen Kapiteln her:

**Theorem 4.7.** *Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung (Vermutung 1.29) impliziert die Nagata-Vermutung.*

*Beweis:* Siehe [CM01, Theorem 7.1].  $\blacksquare$

Die Beispiele des vorigen Abschnitts lassen also erkennen, dass diese Arbeit eigentlich durch die Tatsache motiviert ist, dass die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung die Nagata-Vermutung impliziert.

<sup>1</sup>Für Details verweise ich auf [Laz04, Chapter 5.1, S. 269–277].

Thomas Eckl hat in dem Artikel (Preprint) [Eck05] gezeigt, dass man die Harbourne-Hirschowitz -Vermutung nicht für jedes Tripel  $(d, n, m)$  beweisen muss, um die Nagata-Vermutung zu erhalten.

Es genügt, für festes  $n > 9$  eine Folge von Paaren  $(d_i, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $\frac{d_i^2}{m_i^2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} n$  zu finden, so dass  $\mathcal{L}(d_i, 0, n, m_i)$  für alle  $i$  nicht leer und nicht-spezial ist. Wir zitieren die genaue Aussage.

**Theorem 4.8.** *Sei  $n > 9$  eine natürliche Zahl,  $1 \geq a \in \mathbb{R}_+$  und  $(d_i, m_i)$  eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass  $\frac{d_i^2}{m_i^2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2} \geq 1$  und die Linearsysteme  $\mathcal{L}(d_i, 0, n, m_i + 1)$  nicht-spezial und nicht leer sind. Dann ist der Divisor  $H - a\sqrt{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^n E_j$  nef auf  $\tilde{X}$ .*

*Insbesondere ist die Nagata-Vermutung für  $n$  allgemeine Punkte in  $\mathbb{P}^2$  wahr, wenn  $a = 1$  gilt.*

*Beweis:* Siehe [Eck05, Theorem 5.2]. ■

Es ist also naheliegend zu prüfen, ob die Ciliberto-Miranda -Rekursion nicht ein geeignetes Mittel ist, solch eine Folge zu finden. Leider wird sich herausstellen, dass sich die Rekursion in der vorgestellten Form nur bis zu einer bestimmten Grenze dazu eignet. Dies liefert jedoch wenigstens eine untere Schranke für die Seshadri-Konstanten.

## 4.2. Die Grenzen der Ciliberto-Miranda-Rekursion

*„Der Wissenschaftler findet seine Belohnung in dem,  
was Poincaré die Freude am Verstehen nennt,  
nicht in den Anwendungsmöglichkeiten seiner Erfindung.“*  
Albert Einstein

Wie wir bereits gesehen haben, funktioniert die Rekursion für homogene Linearsysteme  $\mathcal{L}(m\sqrt{n}, 0, n, m)$  mit einer Quadratzahl  $n \geq 4$ . Leider sind diese Systeme für  $n \geq 16$  leer und daher eher uninteressant.

Wenn  $n$  keine Quadratzahl ist, lässt sich die Dimension von Systemen  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  mit  $\frac{d}{m} \approx \sqrt{n}$  meistens leider nicht mit der Rekursion berechnen. Es ist daher interessant zu untersuchen, wie nah der Quotient  $\frac{d}{m}$  des Systems  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$ , für festes  $n > 9$  an  $\sqrt{n}$  liegen darf, ohne dass die Rekursion fehl schlägt.

Wir betrachten dazu Systeme der Form  $\mathcal{L}(\lceil \alpha m \rceil, 0, n, m)$ , mit einem Korrekturparameter  $\mathbb{R} \ni \alpha \geq \sqrt{n}$ , welcher in direktem Zusammenhang zu den Seshadri-Konstanten steht. Die folgende Definition gibt eine untere Schranke für  $\alpha$ , in Abhängigkeit von  $n$  an.

**Definition 4.9.** Für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  setzen wir  $b_n := \lfloor 2\sqrt{n} - 1 \rfloor$ . Die Folge  $(\beta_n)_{n \geq 10}$  definieren wir für  $n \geq 17$  rekursiv durch

$$\beta_n := \beta_{(n-b_n)} + 1,$$

mit den Startwerten  $\beta_{10} := \frac{7}{2}$ ,  $\beta_{11} := \frac{7}{2}$ ,  $\beta_{12} := \frac{11}{3}$ ,  $\beta_{13} := \frac{23}{6}$ ,  $\beta_{14} := 4$ ,  $\beta_{15} := 4$  und  $\beta_{16} := 4$ .

Wir zeigen jetzt, dass die Rekursion für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b_n$  ungerade,  $\alpha > \beta_n$  und hinreichend große Vielfachheit  $m \in \mathbb{N}$  stets zum Ziel führt.

**Lemma 4.10.** *Sei  $n \geq 10$  eine beliebige natürliche Zahl und  $n'$  die kleinste Quadratzahl mit  $n' \geq n$ . Dann gilt*

$$\frac{1}{2}(b_n + 1) \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{n - b_n} + 1 \leq \beta_n \leq \sqrt{n'}.$$

*In der Ungleichungskette gilt genau dann überall Gleichheit, wenn  $n$  eine Quadratzahl ist.*

*Beweis:* Nachrechnen! ■

**Lemma 4.11.** *Seien  $10 \leq n \in \mathbb{N}$  keine Quadratzahl und  $c \in \mathbb{N}$  beliebig aber fest. Dann gilt für  $\alpha > \beta_n$  und hinreichend großes  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichung*

$$\lceil \beta_{n-b_n} m \rceil < \lceil \alpha m \rceil - m - c.$$

*Beweis:* Es gilt für hinreichend großes  $m \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon := \alpha - \beta_n > 0$ :

$$\begin{aligned} \lceil \alpha m \rceil - m - c &= \lceil \alpha m - m - c \rceil \\ &= \lceil (\beta_n + \varepsilon)m - m - c \rceil \\ &= \lceil (\beta_{n-b_n} + 1 + \varepsilon)m - m - c \rceil \\ &= \lceil \beta_{n-b_n} m + \varepsilon m - c \rceil > \lceil \beta_{n-b_n} m \rceil. \end{aligned}$$
■

**Theorem 4.12.** *Sei  $10 \leq n \in \mathbb{N}$  keine Quadratzahl, so dass  $b_n$  ungerade ist und  $\beta_n < \alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist jedes homogene System  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  mit  $d \geq d_{\alpha, m} := \lceil \alpha m \rceil$  für hinreichend großes  $m \in \mathbb{N}$ , nicht-speziell und nicht leer.*

*Beweis:* Wegen Lemma 1.22 genügt es die Behauptung für das homogene System  $\mathcal{L}(d_{\alpha, m}, 0, n, m)$  zu beweisen. Sei dazu  $m \in \mathbb{N}$  zunächst beliebig. Für  $n \leq 15$  wurde die Behauptung bereits in Beispiel 3.17 gezeigt. Dies liefert den Anfang für die folgende Induktion. Sei also  $n \geq 17$  keine Quadratzahl und die Behauptung für alle  $\mathbb{N} \ni n' < n$  bereits gezeigt.

Wir führen nun eine  $(k, b)$ -Degeneration der Ebene mit  $k = m$ ,  $b = b_n$  durch und erhalten die Systeme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{P}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha, m} - m, 0, n - b_n, m), \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d_{\alpha, m} - m - 1, 0, n - b_n, m), \\ \mathcal{L}_{\mathbb{F}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha, m}, d - m, b_n, m) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d_{\alpha, m}, d - m + 1, b_n, m). \end{aligned}$$

Für hinreichend großes  $m$  gilt nach Lemma 4.11  $d_{\alpha, m} - m - 1 > \lceil \beta_{n-b_n} m \rceil$  und das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  somit nach Induktionsvoraussetzung nicht-speziell. Nach Lemma 4.10 ist  $\alpha > \sqrt{n - b_n} + 1$ . Daher ist die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) &= \frac{(d_{\alpha,m}-m-1)(d_{\alpha,m}-m+2)}{2} - (n-b_n)\frac{m(m+1)}{2} \\
&\asymp \frac{d_{\alpha,m}^2 - 2md_{\alpha,m} + m^2 - nm^2 + b_n m^2}{2} \\
&= \frac{(d_{\alpha,m}-m)^2 - (n-b_n)m^2}{2} \\
&\geq \frac{(\alpha m - m)^2 - (n-b_n)m^2}{2} \\
&\geq \frac{(m(\sqrt{n-b_n+1})-m)^2 - (n-b_n)m^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  sind also nach Lemma 1.22 nicht-spezial und nicht leer.

Das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  führen wir (mittels Korollar 3.11) zurück auf das System  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}((d_{\alpha,m} - sb_n), (d_{\alpha,m} - sb_n) - (m-1), b_n, (m-1))$ , mit  $s = 1$ . Da  $b$  nach Voraussetzung ungerade ist, muss  $\mathcal{L}'$  nach Proposition 3.10 nicht-spezial sein und wegen  $s = 1$  ist auch  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nicht-spezial. Nach Lemma 4.10 ist  $\alpha > \frac{b_n+1}{2}$ . Daher ist die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}) &= \frac{d_{\alpha,m}(d_{\alpha,m}+3)}{2} - \frac{(d_{\alpha,m}-m+1)(d_{\alpha,m}-m+2)}{2} - b_n \frac{m(m+1)}{2} \\
&\asymp \frac{2md_{\alpha,m} - (b_n+1)m^2}{2} \\
&\geq \frac{2\alpha m^2 - (b_n+1)m^2}{2} \\
&\geq \frac{m^2}{2} (2\frac{b_n+1}{2} - (b_n+1)) = 0.
\end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  sind also nach Lemma 1.22 nicht-spezial und nicht leer.

Lemma 3.1 liefert schließlich die Behauptung. ■

Auf die Voraussetzung, dass  $b_n$  ungerade ist, kann verzichtet werden. Dafür muss man jedoch in einigen Fällen die untere Schranke für  $\alpha$  erhöhen.

**Theorem 4.13.** *Sei  $10 \leq n \in \mathbb{N}$  keine Quadratzahl, so dass  $b_n$  gerade ist und  $\max\{\beta_n, \frac{b_n+2}{2}\} < \alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist jedes homogene System  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$  mit  $d \geq d_{\alpha,m} := \lceil \alpha m \rceil$  für hinreichend großes  $m \in \mathbb{N}$ , nicht-spezial und nicht leer.*

*Beweis:* Wir starten wie zuvor. Wegen Lemma 1.22 genügt es die Behauptung für das homogene System  $\mathcal{L}(d_{\alpha,m}, 0, n, m)$  zu beweisen. Sei dazu  $m \in \mathbb{N}$  zunächst beliebig. Für  $n \leq 15$  wurde die Behauptung bereits in Beispiel 3.18 gezeigt. (Beachte:  $b_n$  gerade  $\Rightarrow n$  keine Quadratzahl.) Dies liefert den Anfang für die folgende Induktion. Sei also  $n \geq 17$  keine Quadratzahl und die Behauptung für alle  $\mathbb{N} \ni n' < n$  bereits gezeigt, welche keine Quadratzahlen sind.

Wir führen nun eine  $(k, b)$ -Degeneration der Ebene mit  $k = m + 1$ ,  $b = b_n$  durch und erhalten die Systeme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbb{P}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha,m} - m - 1, 0, n - b_n, m), \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m} - m - 2, 0, n - b_n, m), \\
\mathcal{L}_{\mathbb{F}} &= \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, d - m - 1, b_n, m) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}(d_{\alpha,m}, d - m, b_n, m).
\end{aligned}$$

Für hinreichend großes  $m$  gilt nach Lemma 4.11  $d_{\alpha,m} - m - 2 > \lceil \beta_{n-b_n} m \rceil$  und das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  ist somit nach Induktionsvoraussetzung nicht-spezial. Nach Lemma 4.10 ist  $\alpha > \sqrt{n - b_n} + 1$ . Daher ist die virtuelle Dimension von  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  für hinreichend großes  $m$  gegeben durch

$$\begin{aligned} v(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}) &= \frac{(d_{\alpha,m} - m - 2)(d_{\alpha,m} - m + 1)}{2} - (n - b_n) \frac{m(m+1)}{2} \\ &> \frac{d_{\alpha,m}^2 - 2md_{\alpha,m} + m^2 - nm^2 + b_n m^2}{2} \\ &= \frac{(d_{\alpha,m} - m)^2 - (n - b_n)m^2}{2} \\ &\geq \frac{(\alpha m - m)^2 - (n - b_n)m^2}{2} \\ &\geq \frac{(m(\sqrt{n - b_n} + 1) - m)^2 - (n - b_n)m^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$  sind also nach Lemma 1.22 nicht-spezial und nicht leer.

Auf das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  können wir diesmal sofort Proposition 3.10 anwenden.

Da  $b_n$  nach Voraussetzung gerade ist, gilt mit der dort verwendeten Notation  $b_n = 2h + \varepsilon$ , mit  $h = \frac{b_n}{2} \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon = 0$ . Die Voraussetzung  $\alpha > \max\{\beta_n, \frac{b_n+2}{2}\}$  kommt nun mit  $d_{\alpha,m} = \lceil \alpha m \rceil > \lceil \frac{b_n+2}{2} m \rceil = \frac{b_n+2}{2} m = (h+1)m$  zum Einsatz. Das heißt,  $d_{\alpha,m} = qm + \mu$ , mit  $q \geq h + 1$ . Daher ist  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nach Proposition 3.10 nicht-spezial und nicht leer.

Mit Lemma 1.22 erhält man nun, dass  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  ebenfalls nicht-spezial und nicht leer ist.

Lemma 3.1 liefert also erneut die Behauptung. ■

**Definition 4.14.** Sei  $n > 9$  eine beliebige natürliche Zahl. Die reellen Zahlen  $\beta_n$  und  $\gamma_n := \max\{\beta_n, \frac{b_n+2}{2}\}$  bezeichnen wir als *untere Rekursionsschranken*. Die reelle Zahl

$$\varepsilon_n := \begin{cases} \frac{1}{\beta_n} & , \text{ falls } b_n \text{ ungerade ist} \\ \frac{1}{\gamma_n} & , \text{ falls } b_n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

bezeichnen wir als *Approximationsschranke* der Rekursion.

**Korollar 4.15.** Sei  $n > 9$  eine beliebige natürliche Zahl. Dann liefert die Approximationsschranke  $\varepsilon_n$  eine untere Schranke für die Seshadri-Konstante  $\varepsilon(L, p_1, \dots, p_n)$ , also  $\varepsilon(L, p_1, \dots, p_n) \geq \varepsilon_n$ .

*Beweis:* Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  beliebig. Die Folge  $(\frac{m-1}{\lceil \alpha m \rceil})_{m \geq 2}$  konvergiert offenbar gegen  $\frac{1}{\alpha}$ , denn

$$\left| \frac{1}{\alpha} - \frac{m-1}{\lceil \alpha m \rceil} \right| = \left| \frac{\lceil \alpha m \rceil - \alpha m}{\alpha \lceil \alpha m \rceil} + \frac{\alpha}{\lceil \alpha m \rceil} \right| \leq \frac{1}{\alpha \lceil \alpha m \rceil} + \frac{\alpha}{\lceil \alpha m \rceil} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Theorem 4.8 liefert zusammen mit den Theoremen 4.12 und 4.13 für  $n > 9$  und alle  $\alpha > \frac{1}{\varepsilon_n}$ , dass der Divisor  $\nu^*(L) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n E_i$  auf der Aufblasung  $\nu : \mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{P}^2$  nef ist. Es folgt  $\varepsilon(L, p_1, \dots, p_n) \geq \frac{1}{\alpha}$  und mit  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_n}$  schließlich die Behauptung. ■

Die letzten Beweise haben keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Dies liegt natürlich daran, dass die unteren Schranken für  $\alpha$  gerade so gewählt wurden, dass die Rekursion funktioniert. Nun könnte man annehmen, dass mit mehr Aufwand eventuell eine Verbesserung der Schranken erzielt werden kann. Dies ist jedoch nicht möglich.

**Bemerkung 4.16.** Die unteren Schranken  $\beta_n$  und  $\gamma_n$  sind für eine allgemeine Aussage mit den hier vorgestellten Methoden nicht zu verbessern.

Wir illustrieren kurz die Gründe dafür:

Nach Korollar 2.38 erhält man die Dimension  $\ell_0$  der  $(k, b)$ -Degeneration  $\mathcal{L}_0$  des Systems  $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$  durch  $\ell_0 = \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1$ , für  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \leq d - k - 1$  und durch  $\ell_0 = \ell_{\mathbb{P}} + \ell_{\mathbb{F}} - d + k$ , für  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} \geq d - k - 1$ .

**Beobachtung 4.17.** Mit Lemma 2.30 erhält man  $v(d, m_0, n, m) > \hat{v}_{\mathbb{P}} + \hat{v}_{\mathbb{F}} + 1$  und  $v(d, m_0, n, m) = v_{\mathbb{P}} + v_{\mathbb{F}} - d + k$ . Die Rekursion funktioniert im zweiten Fall mit  $v(d, m_0, n, m) > -1$  also genau dann, wenn die Systeme auf  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{F}$  jeweils nicht-spezial und nicht leer sind.

**Lemma 4.18.** *Ist  $v(d, m_0, n, m) > -1$  und  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} < d - k - 1$ , so müssen entweder die Systeme  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  speziell sein, oder die Rekursion scheitert.*

*Beweis:* Angenommen die Systeme  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  und  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  sind nicht-spezial. Falls  $\hat{v}_{\mathbb{P}}, \hat{v}_{\mathbb{F}} \geq -1$  gilt, ist  $\ell(d, m_0, n, m) \geq v(d, m_0, n, m) > \hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} + 1 = \ell_0$  und für  $\hat{v}_{\mathbb{P}}, \hat{v}_{\mathbb{F}} < -1$  folgt  $\ell \geq v(d, m_0, n, m) > -1 = \ell_0$ , jeweils im Widerspruch zu Korollar 2.24. Wir nehmen nun ohne Einschränkung an, dass  $\hat{v}_{\mathbb{P}} \geq -1$  und  $\hat{v}_{\mathbb{F}} < -1$  gilt. Dann ist  $\ell_0 = \hat{\ell}_{\mathbb{P}} - 1 + 1 = \hat{\ell}_{\mathbb{P}}$ . Wegen  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} < d - k - 1$  gilt  $\hat{\ell}_{\mathbb{P}} + \hat{\ell}_{\mathbb{F}} > v(d, m_0, n, m) - 1$ . Dies haben wir im Beweis von Lemma 3.1 nachgewiesen. Es folgt  $v(d, m_0, n, m) - 1 < \ell_0 - 1 \Rightarrow v(d, m_0, n, m) < \ell_0$ . ■

Eine  $(k, b)$ -Degeneration mit  $r_{\mathbb{P}} + r_{\mathbb{F}} < d - k - 1$  führt daher für Systeme mit nicht-negativer virtueller Dimension meist nicht zum Erfolg.

Wir interessieren uns aber gerade für Systeme mit nicht-negativer virtueller Dimension und folgen deshalb der Strategie aus Lemma 3.1 mit einer zunächst beliebigen  $(k, b)$ -Degeneration:

- Die Forderung, dass  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  nicht-spezial ist, führt automatisch auf die Definition von  $(\beta_n)_{n \geq 10}$  mit den Startwerten aus Definition 4.9 und  $\beta_n := \beta_{n-b} + 1$ , für  $n \geq 17$ . Für  $\alpha = \beta_n$  ist  $d_{\alpha, m} - m - 1 = \lceil \beta_{n-b} m \rceil - 1 < \lceil \beta_{n-b} m \rceil$  und das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{P}}$  somit speziell.  $\alpha$  muss demnach echt größer als  $\beta_n$  sein.
- Damit das System  $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbb{F}}$  nicht-spezial und nicht leer ist, muss für gerades  $b$  nach Proposition 3.10  $d_{\alpha, m} \geq \frac{b}{2}m + m - 1 = \frac{b+2}{2}m - 1$  gelten. Dies liefert für  $\alpha$  die Bedingung  $\alpha > \frac{b+2}{2} - \frac{2}{m}$ . Es muss also mindestens  $\alpha \geq \frac{b+2}{2}$  gelten.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich die zuvor angegebenen Grenzen durch Wahl von geeigneten Parametern  $k$  und  $b$  verkleinern lassen.

**Beobachtung 4.19.** Für  $k$  kommen nur die Werte  $m - 1, m$  und  $m + 1$  in Frage. Ist  $k > m + 1$ , so haben wir bisher keine Hilfsmittel zur Untersuchung der Systeme auf  $\mathbb{F}$  bereitgestellt. Für  $k \leq m - 1$  haben wir nur Korollar 3.11 zur Verfügung. Im Fall  $k < m - 1$  sind die Systeme auf  $\mathbb{F}$  aber meist speziell. Das Korollar liefert daher nur in Einzelfällen ein konkretes Ergebnis.

Welche Werte kommen nun für  $b$  in Frage?

**Beobachtung 4.20.** Wählt man  $b > b_n$  in der  $(k, b)$ -Degeneration, so scheidet die Berechnung in der Regel an den Systemen auf  $\mathbb{F}$ . Man kann dann (unabhängig von  $k$ ) nicht mehr garantieren, dass diese Systeme nicht-spezial oder nicht leer sind. Um dies zu vermeiden, müsste man  $\alpha$  entsprechend vergrößern. Verkleinert man  $b$ , so erhöhen sich  $\beta_n$  und  $\gamma_n$  offensichtlich, unabhängig von  $k$ .

**Bemerkung 4.21.** Um der Schranke  $\frac{b_n+2}{2}$  in Theorem 4.13 aus dem Wege zu gehen, hätten wir (analog zu Beispiel 3.18) im Beweis eine  $(m + 1, b_n - 1)$ -Degeneration ausführen können.  $b_n - 1$  ist dann ungerade und Proposition 3.10 hätte in jedem Fall geliefert, dass  $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$  nicht-spezial ist. Dies liefert jedoch trotzdem keine Verbesserung für unsere untere Schranke.

*Beweis:* Die kleinste natürliche Zahl  $n \geq 17$  mit  $b_n$  gerade ist  $n = 21$ . Es gilt  $\beta_{21-b_{n+1}} + 1 = \beta_{14} + 1 = 5 = \frac{b_{21}+2}{2}$ . ■

Für  $n = 13, 14$  war dies unproblematisch, da man mit Hilfe von Proposition 1.32 direkt Aussagen über die Spezialität der Systeme auf  $\mathbb{P}$  machen konnte.

**Beobachtung 4.22.** Alternativ bleibt nur die Wahl  $b = n - q$ , wobei  $q$  eine Quadratzahl ist. In diesem Fall drohen aber die Systeme auf  $\mathbb{P}$  leer zu sein. Um dies zu vermeiden, muss der Grad des Systems entsprechend hoch sein und man erhält, wie zuvor, die selben Schranken  $\beta_n, \gamma_n$ .

Trotzdem kann man in einzelnen Fällen eventuell durch iteratives Anwenden der Rekursion auf die entstehenden Systeme oder individuelle Wahl der unteren Schranke bzw. von  $k$  und  $b$ , eine Verbesserung erreichen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Ciliberto-Miranda -Rekursion eine hilfreiche Methode ist, um die Dimension von zahlreichen Linearsystemen zu bestimmen. Im entscheidenden Bereich genügt sie jedoch, zumindest in der hier vorgestellten Form, nicht. Dafür sind in jedem Fall Zusatzüberlegungen bzw. Adaptionen oder Ergänzungen nötig.

Nachdem wir aufgezeigt haben, wofür sich die Rekursion nicht eignet, betrachten wir nun zum Abschluß noch Ergebnisse in tabellarischer Form.

### 4.3. Einige Tabellen

Diese Ergebnisse hat eine in C++ implementierte Version der Rekursion für Linearsysteme der Form  $\mathcal{L}(d, 0, n, m)$ , mit  $d = \lceil m\sqrt{n} \rceil$ ,  $m = 2, \dots, 50$  und  $n = 10, \dots, 15$  geliefert. Dabei wurden solange alle möglichen Werte für  $k$  und  $b$  durchlaufen, bis ein Ergebnis vorlag. Ist ein Wert für  $m$  in den folgenden Tabellen nicht gelistet, so war die Rekursion für dieses System nicht erfolgreich.



<b>d</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>dim</b>	<b>(k,b)</b>	<b>d</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>dim</b>	<b>(k,b)</b>	<b>d</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>dim</b>	<b>(k,b)</b>
7	10	2	5	(2,7)	7	11	2	2	(2,7)	7	12	2	-1	(3,7)
10	10	3	5	(2,5)	10	11	3	-1	(2,5)	11	12	3	5	(3,6)
13	10	4	4	(5,6)	14	11	4	9	(3,5)	14	12	4	-1	(6,8)
16	10	5	2	(6,6)	17	11	5	5	(4,5)	18	12	5	9	(4,5)
23	10	7	19	(8,6)	20	11	6	-1	(8,7)	25	12	7	14	(5,5)
26	10	8	17	(9,6)	24	11	7	16	(6,5)	28	12	8	2	(6,5)
29	10	9	14	(11,6)	27	11	8	9	(10,7)	32	12	9	20	(7,5)
32	10	10	10	(11,6)	34	11	10	24	(8,5)	46	12	13	35	(10,5)
35	10	11	5	(13,6)	37	11	11	14	(9,5)	49	12	14	14	(11,5)
38	10	12	-1	(14,6)	44	11	13	33	(11,5)	63	12	18	27	(14,5)
42	10	13	35	(15,6)	57	11	17	27	(14,5)					
45	10	14	30	(16,6)	64	11	19	54	(16,5)					
48	10	15	24	(17,6)										
<b>d</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>dim</b>	<b>(k,b)</b>	<b>d</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>dim</b>	<b>(k,b)</b>	<b>d</b>	<b>n</b>	<b>m</b>	<b>dim</b>	<b>(k,b)</b>
8	13	2	5	(3,6)	8	14	2	2	(3,7)	8	15	2	-1	(4,10)
11	13	3	-1	(3,7)	12	14	3	6	(3,5)	12	15	3	0	(4,9)
15	13	4	5	(4,7)	15	14	4	-1	(3,5)	16	15	4	2	(3,6)
19	13	5	14	(4,6)	19	14	5	-1	(4,6)	20	15	5	5	(4,6)
22	13	6	2	(4,5)	23	14	6	5	(5,6)	24	15	6	9	(6,7)
26	13	7	13	(6,6)	27	14	7	13	(7,7)	28	15	7	14	(7,7)
33	13	9	9	(10,7)	30	14	8	-1	(9,7)	31	15	8	-1	(9,7)
37	13	10	25	(11,7)	42	14	11	21	(12,7)	35	15	9	-1	(10,7)
40	13	11	2	(8,5)	53	14	14	14	(15,7)	39	15	10	-1	(11,7)
55	13	15	35	(17,7)	57	14	15	30	(16,7)	43	15	11	-1	(11,7)
					60	14	16	-1	(18,7)	47	15	12	5	(12,7)
					87	14	23	51	(25,7)	51	15	13	12	(13,7)
					98	14	26	35	(28,7)	55	15	14	20	(14,7)
					102	14	27	63	(29,7)	59	15	15	29	(15,7)
										62	15	16	-1	(17,7)
										66	15	17	-1	(18,7)
										90	15	23	45	(24,7)
										113	15	29	29	(30,7)
										117	15	30	45	(31,7)
										121	15	31	62	(32,7)
										124	15	32	-1	(34,7)
										128	15	33	-1	(35,7)
										132	15	34	-1	(36,7)
										183	15	47	99	(49,7)



## ANHANG A

# C++ -Quellcode des Programms

### A.1. Die Main-Funktion

```
1 #include<iostream>
  #include<fstream>
3 #include<cmath>

5 using namespace std;

7 //-----
  //Deklaration der verwendeten Funktionen
9
  int casecheck(int u, int v, int w, int x);
11 //prueft welche Proposition geeignet ist und berechnet
  //wenn moeglich die Dimension des Systems
13
  int virt(int u, int v, int w, int x);
15 //berechnet die virtuelle Dimension eines Systems

17 int expect(int u, int v, int w, int x);
  //berechnet die erwartete Dimension eines Systems
19
  int homcheck(int u, int v, int w, int x);
21 //prueft ob eine homogenes System speziell ist

23 int p412(int u, int v, int w, int x);
  //wendet Proposition 4.12 auf das System an
25
  int c411(int u, int v, int w, int x);
27 //wendet Korollar 4.11 auf das System an

29 int p411(int u, int v, int w, int x);
  //wendet Proposition 4.10 auf das entstehende System
31 //aus Korollar 4.11 an

33 int p410(int u, int v, int w, int x);
  //wendet Proposition 4.10 auf das System an
35
  int l49(int u, int v, int w, int x);
37 //wendet Lemma 4.9 auf das System an

39 ofstream output("table.tex");
  //Ausgabe der Daten in Datei table.tex
41 //-----

43 int main()
  { //Einlesen der erforderlichen Daten
45   int num = 10; //Hilfsvariablen
     int a = 2; int j = 2; int m = 0;
47   cout << "Dieses Programm ist zur Bestimmung von Linearsystemen
     der Form" << endl;
49   cout << "L(d,0,n,m) bestimmt, wobei d die naechst groessere
     natuerliche" << endl;
51   cout << "Zahl von dem Produkt von m mit der Wurzel aus n ist.\n"<<endl;
     cout << "Bitte geben Sie die Anzahl von Punkten ein: << endl;
53   cin >> num;
     cout << "\nFuer eine Berechnung mit einem festen m, bestaetigen Sie
55     bitte mit f,"<<endl;
```

```

57     cout << "fuer mehrere Berechnungen mit 1<m=a,...,m=j bestaetigen Sie
        bitte mit i: ";
58     char tem = 'e';
59     while(tem != 'f' && tem != 'i')
        cin >> tem;
60     if(tem == 'f')
61     {
62         cout << "\nBitte geben Sie die gewuenschte Vielfachheit m ein: ";
63         cin >> m;
64         a = m; j = m;
65         cout << "\n";
66     }
67     else if(tem == 'i')
68     {
69         cout << "\nBitte geben Sie die linke Grenze a ein: ";
70         cin >> a;
71         cout << "\nBitte geben Sie die rechte Grenze b ein: ";
72         cin >> j;
73         cout << "\n";
74     }
75     else
76     ;
77
78 //-----
79     int deg = 0;
80     int lp = 0; int lph = 0; int lf = 0; int lfh = 0; int l0 = 0;
81     //Hilfsvariablen
82
83     //Ausgabe in Datei table.tex
84     output << "\\begin{tabular}[t]{c}{c}{c}{c}{c}{c}\\hline" << endl;
85     output << "\\textbf{d}&\\textbf{n}&\\textbf{m}&\\textbf{dim}&
        \\textbf{(k,b)}\\hline\\hline"<<endl;
86
87     //fuehren die Rekursion nun fuer alle geforderten m durch
88     for(m = a; m <= j; ++m)
89     {
90         deg = (m*sqrt(num)+1); //Grad der Kurven
91         bool success = false; //Rekursion erfolgreich?
92
93         for(int k=m-1;k<deg;k++) //Durchlaufen nun Moeglichkeiten
94         { //fuer die Rekursionsparameter k
95             for(int b=1; b<num; b++) //und b
96             {
97                 lp = casecheck(deg-k,0,num-b,m); //berechne System
98                 //auf P
99                 if(lp == -1) //leer?
100                 lph = -1; //---> dann auch
101                 //das Kernsystem
102             else //andernfalls
103                 lph = casecheck(deg-k-1,0,num-b,m);
104                 //berechne
105                 //Kernsystem auf P
106             if(lp == -10 && lph != -10)//Kernsystem nicht-speziiell?
107                 lp = expect(deg-k,0,num-b,m);//--->System auf P auch
108             else
109                 ;
110
111                 lf = casecheck(deg, deg-k, b,m); //berechne System
112                 // auf F
113                 if(lf == -1) //leer?
114                 lfh = -1; //---> dann auch
115                 //das Kernsystem
116             else //andernfalls
117                 lfh = casecheck(deg, deg-k+1,b,m);
118                 //berechne
119                 //Kernsystem auf F
120             if(lf == -10 && lfh != -10)//Kernsystem nicht-speziiell?
121                 lf = expect(deg,deg-k,b,m);//System auf F auch
122             else
123                 ;
124
125

```

```

127     if(lp == -10 || lph == -10 || lf == -10 || lfh == -10)
128     {//eines der Systeme speziell
129         ;!-->keine Ausgabe und weiter
130     }
131     else //andernfalls
132     {
133         //berechne Dimension l0 des degenerierten Systems
134         int rp = lp-lph-1; int rf = lf-lfh-1;
135         int help = deg-k-1;
136
137         if(rp+rf < help)
138             l0 = lph + lfh +1;
139         else
140             l0 = lp + lf -deg +k;
141
142         int help2 = expect(deg,0,num,m);
143
144         if(help2 == 10) //l0 = erwartete Dimension?
145         {!-->Rekursion erfolgreich -->Ausgabe
146             output <<deg<<"&"<<num<<"&"<<m<<"&"<<l0
147                 <<"("&<<k<<"<<b<<"\\\\"<< endl;
148             success = true; !-->fertig
149             k = deg;
150             break;
151         }
152         else //andernfalls
153             ; !-->keine Ausgabe und weiter
154     }
155 }
156 }
157 //-----
158 if(success == false) //noch nicht fertig
159 {
160     for(k=m-2;k>0;k--) //nochmal fuer alle 0 < k < m-1
161     {
162         for(int c=1; c<num; c++)
163         {
164             lp = casecheck(deg-k,0,num-c,m);
165             if(lp == -1)
166                 lph = -1;
167             else
168                 lph = casecheck(deg-k-1,0,num-c,m);
169             if(lp== -10 && lph != -10)
170                 lp = expect(deg-k,0,num-c,m);
171             else
172                 ;
173             lf = casecheck(deg, deg-k, c,m);
174             if(lf == -1)
175                 lfh = -1;
176             else
177                 lfh = casecheck(deg, deg-k+1,c,m);
178             if(lf == -10 && lfh != -10)
179                 lf = expect(deg,deg-k,c,m);
180             else
181                 ;
182             if(lp == -10 || lph == -10 || lf == -10 || lfh == -10)
183                 ;
184             else
185             {
186                 int rp = lp-lph-1; int rf = lf-lfh-1;
187                 int help = deg-k-1;
188
189                 if(rp+rf < help)
190                     l0 = lph + lfh +1;
191                 else
192                     l0 = lp + lf -deg +k;
193             }
194             int help2 = expect(deg,0,num,m);
195

```

```

197         if(help2 == 10)
198         {
199             output <<deg<<"&"<<num<<"&"<<m<<"&"<<10
200                 << "&(" << k <<","<<c<<")\\\\"<< endl;
201             success = true;
202             k = 0;
203             break;
204         }
205         else
206             ;
207     }
208 }
209 else
210     ;
211 }
212 }
213 output << "\\end{tabular}"; //letzte Ausgabe in Datei table.tex
214 char temp = 'p';
215 while(temp != 'q')
216 {
217     cout << "\nDruecken Sie q und anschliessend 'Eingabe'
218         zum verlassen des Programms.";
219     cin >> temp;
220 }
221 return 0; //Ergebnisse in Datei tabular.tex
}

```

## A.2. Die Hilfsfunktionen

---

### Berechnung der virtuellen Dimension

```

int virt(int u, int v, int w, int x)
2 {
3     int h = 0.5*u*(u+3)-0.5*v*(v+1)-w*0.5*x*(x+1);
4     return h;
5 }

```

---

### Berechnung der erwarteten Dimension

```

1 int expect(int u, int v, int w, int x)
2 {
3     int h = 0.5*u*(u+3)-0.5*v*(v+1)-w*0.5*x*(x+1);
4     if(h < -1)
5         h=-1;
6     return h;
7 }

```

---

### Test eines homogenen Systems auf Speziellheit

```

1 int homcheck(int u, int v, int w, int x)
2 {
3     int dim = -1;
4     if(w == 2 && x <= u && u <= 2*x-2)
5         dim=-10; //System ist speziell (-10 ist Hilfswert)
6     else if(w == 3 && 0.5*3*x <= u && u <= 2*x-2)
7         dim=-10; //System ist speziell
8     else if(w == 5 && 2*x <= u && u <= 0.5*(5*x-2))
9         dim=-10; //System ist speziell
10    else if(w == 6 && 12*x/5 <= u && u <= 0.5*(5*x-2))
11        dim=-10; //System ist speziell
12    else if(w == 7 && 21*x/8 <= u && u <= (8*x-2)/3)
13        dim=-10; //System ist speziell
14    else if(w == 8 && 48*x/17 <= u && u <= (17*x-2)/6)
15        dim=-10; //System ist speziell
16    else //System nicht-spezial
17        dim = expect(u,v,w,x);
18    return dim;
19 }

```

---

**Berechnung der Dimension mit Hilfe der Propositionen, etc.**

```

1 int casecheck(int u, int v, int w, int x)
  {
3   int dim = -10;

5   if(v==0)
      {
7       if(w<=9)
          dim = homcheck(u,v,w,x);
9       else
          ;
11      }
13     else if(v>u || x>u)
        {
15         dim = -1;
17        }
19     else if(v == u-x-1)
        {
21         dim = p412(u,v,w,x);
23        }
25     else if(v == u-x && 0 <= x && x <= u)
        {
27         dim = l49(u,v,w,x);
29        }
31     else if(v == u-x && 2 <= x && x <= u)
        {
33         dim = p410(u,v,w,x);
35        }
37     else if(v > u-x)
        {
39         dim = c411(u,v,w,x);
41        }
43     else
45         ;
47     return dim;
49 }

```

---

**Anwendung der Proposition 4.10**

```

int p410(int u, int v, int w, int x) {
2   int q=u/x; int mu=u-q*x; int h=w/2; int eps=w-2*h; int dim=-1;
   //bestimme die Werte q, mu, eps und h fuer Fallunterscheidung
4   if(q >= (h+1))
       dim = expect(u,v,w,x); //System nicht-speziell
6   else if(q == h && eps == 1)
       dim = -1; //System nicht-speziell und leer
8
10  else if(q == h && eps == 0 && mu == x-1)
      {
12     dim=(x-1)*(x+2)*0.5; //System nicht-speziell und nicht leer
       if(dim < -1)
14         dim = -1;
16      }
18  else if(q == h && eps == 0 && mu <= x-2)
      {
20     dim = mu*(mu+3)*0.5; //System speziell, aber Dim ist bekannt
22      }
24  else if(q <= h-1)
26     dim = -1; //System nicht-speziell und leer
28  else
29     ;
31  return dim;
33 }

```

---

**Anwendung der Proposition 4.12**

```

int p412(int u, int v, int w, int x) {
2   int q=u/(x-1); int mu=u-q*x; int h=w/2; int eps=w-2*h; int dim=-1;
   //bestimme die Werte q, mu, eps und h fuer Fallunterscheidung
4   if(q == h+1 && mu == 0 && eps == 0 && (x-1)*(x+2) >= 4*h)
   {
6       dim = (x-1)*(x+2)*0.5-2*h;
       //System speziell, aber Dim ist bekannt
8   }
   else if(q == h && eps == 0 && 4*q <= mu*(mu+3))
10  {
       dim = mu*(mu+3)*0.5-2*q;
12     //System speziell, aber Dim ist bekannt
   }
14  else
   {
16     dim = u*(x+2)-(w+1)*x*(x+1)*0.5;
       if(dim < -1)
18         dim = -1; //System nicht-spezial
   }
20
   return dim;
22 }

```

---

**Anwendung des Korollars 4.11**

```

int c411(int u, int v, int w, int x) {
2   int dim=-1;
   int k=v-u+x;
4
   int hsys[4]; //bestimme Hilffsystem aus Korollar
6   hsys[0]=u-k*w; hsys[1]=u-k*w-x+k; hsys[2]=w; hsys[3]=x-k;
8
   if(hsys[0]>0 && hsys[1]>=0 && hsys[3]>=2)
       dim = p411(hsys[0], hsys[1], hsys[2], hsys[3]);
10     //verwende Adaption von Prop. 4.10 (s.u.)
   else if(hsys[0]>0 && hsys[1]>=0 && hsys[3]==0)
12     dim = hsys[0];
14
   else if(hsys[0]>0 && hsys[1]>=0 && hsys[3]==1)
   {
16     if(2*u-w >= -1)
           dim = 2*u-w; //System nicht-spezial
18     else
           dim=-1; //System leer
20   }
   else
22     dim = -10; //System speziell
24
   if(k >= 2 && dim > -1 && dim > -10)
       dim = -10; //System speziell
26
   else if(dim == -10)
28     dim = -10; //System speziell
30
   return dim;
}

```



---

**Anwendung der Proposition 4.10 für Korollar 4.11**

```

1 int p411(int u, int v, int w, int x) {
2   int q=u/x; int mu=u-q*x; int h=w/2; int eps=w-2*h; int dim=-1;
3
4   if(q >= (h+1))
5   {
6     dim = expect(u,v,w,x); //System nicht-spezial
7   }
8   else if(q == h && eps == 1)
9     dim = -1; //System leer
11  else if(q == h && eps == 0 && mu == x-1)
12  {
13    dim=(x-1)*(x+2)*0.5; //System nicht-spezial
14    if(dim < -1)
15      dim = -1;
16  }
17  else if(q == h && eps == 0 && mu <= x-2)
18    dim=-10; //System speziell (Adaption zu 4.10)
19
20  else if(q <= h-1)
21    dim = -1; //System leer
22
23  else
24    ;
25
26  return dim;
27 }

```

---

**Anwendung des Lemmas 4.9**

```

1 int l49(int u, int v, int w, int x) {
2   // nur Fallunterscheidungen
3   int h = u;
4   if(x == 0)
5     ;
6   else if(x == 1)
7   {
8     if(2*u-w >= -1)
9       h = 2*u-w;
10    else
11      h=-1;
12  }
13  else if(w == 0)
14    h = u+u*x-0.5*x*x+0.5*x;
15  else if(w == 1)
16    h = u+x*(u-x);
17  else if(w == 2 && x <= u && u <= 2*x)
18    h = (u-x)*(u-x+3)*0.5;
19  else if(w == 2 && u >= 2*x+1)
20    h= u*x+u-3*x*x*0.5-0.5*x;
21  else if(w >= 2 && u >= 2*x)
22    h = l49(u-x, u-2*x, w-2, x);
23  else if(2 <= x && x <= u && u <= 2*x-1 && w >= 3)
24    h = -1;
25  if(h < -1)
26    h = -1;
27  return h;
28 }

```



## Literaturverzeichnis

- [CM98] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. Degenerations of planar linear systems. *J. Reine Angew. Math.*, 501:191–220, 1998.
- [CM00] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(9):4037–4050, 2000.
- [CM01] C. Ciliberto and R. Miranda. The Segre and Harbourne-Hirschowitz conjectures. In *Applications of algebraic geometry to coding theory, physics and computation (Eilat, 2001)*, volume 36 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 37–51. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [Eck05] Thomas Eckl. *Seshadri constants via lelong numbers*. math.AG/0508561, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 2005. Preprint.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Nag61] Masayoshi Nagata. On rational surfaces. II. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 33:271–293, 1960/1961.
- [Nag65] Masayoshi Nagata. *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.
- [Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.



## Symbolverzeichnis

$X, V$	projektive Varietäten , 13
$\mathbb{P}$	Komponente der Nullfaser $X_0$ , 14
$\mathbb{F}$	Komponente der Nullfaser $X_0$ , 14
$\mathbb{E}$	exzeptioneller Divisor der Aufblasung $X$ , 14
$\mathbb{X}_0$	degenerierte Ebene , 15
$X_a$	Faser über dem Punkt $a \in \mathbb{A}^1$ , 14
$\mathcal{O}_X(d, k)$	flache Familie von Geradenbündeln über $\mathbb{A}^1$ , 17
$\mathcal{O}_X(d)$	Rückzug des Geradenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ , 17
$\mathcal{L}(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$	Linearsystem ebener Kurven (e. K.) , 3
$\mathcal{L}(d, 0, n, m)$	homogenes Linearsystem e. K. , 3
$\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$	quasi-homogenes Linearsystem e. K. , 3
$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}(d, k, m_0, n, b, m)$	$(k, b)$ -Degeneration des Systems $\mathcal{L}(d, m_0, n, m)$ , 21
$\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$	Einschränkung des Systems $\mathcal{L}_0$ auf $\mathbb{P}$ , 23
$\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$	Einschränkung des Systems $\mathcal{L}_0$ auf $\mathbb{F}$ , 23
$\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$	Einschränkung des Systems $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ auf $\mathbb{E}$ , 23
$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$	Einschränkung des Systems $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ auf $\mathbb{E}$ , 23
$v(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$	virtuelle Dimension eines Linearsystems e. K. , 3
$e(d, \sum_{i=0}^n m_i p_i)$	erwartete Dimension eines Linearsystems e. K. , 3
$v(\mathcal{L})$	die virtuelle Dimension eines Geradenbündels $\mathcal{L}$ , 7
$e(\mathcal{L})$	die erwartete Dimension eines Geradenbündels $\mathcal{L}$ , 7
$\mathbb{P}^2$	projektive Ebene , 1
<b>Pic</b> (.)	Picard-Gruppe , 15
$\mathcal{O}(d, k)$	Rückzug des Bündels $\mathcal{O}_X(d, k)$ , 21
$\mathcal{X}(d, k)$	flacher Limes der Bündel über den Fasern $X_t$ , 18
$\chi(\mathcal{L})$	Euler-Charakteristik eines Geradenbündels $\mathcal{L}$ , 7
$p_a$	arithmetisches Geschlecht , 7
$g_{\mathcal{L}}$	Geschlecht des Linearsystems $\mathcal{L}$ , 8
$l_0$	Dimension des $(k, b)$ -Degenerierten Systems , 21
$v = v(d, m_0, n, m)$	die virtuelle Dimension des allgemeinen Systems , 24
$v_{\mathbb{P}} = v(d - k, m_0, n - b, m)$	die virtuelle Dimension des Systems auf $\mathbb{P}$ , 24
$v_{\mathbb{F}} = v(d, m_0 - k, b, m)$	die virtuelle Dimension des Systems auf $\mathbb{F}$ , 24
$\hat{v}_{\mathbb{P}} = v(d - k - 1, m_0, n - b, m)$	die virtuelle Dimension des Kernsystems auf $\mathbb{P}$ , 24
$\hat{v}_{\mathbb{F}} = v(d, m_0 - k + 1, b, m)$	die virtuelle Dimension des Kernsystems auf $\mathbb{F}$ , 24
$l = l(d, m_0, n, m)$	die Dimension des allgemeinen Systems , 24
$l_{\mathbb{P}} = l(d - k, m_0, n - b, m)$	die Dimension des Systems auf $\mathbb{P}$ , 24
$l_{\mathbb{F}} = l(d, m_0 - k, b, m)$	die Dimension des Systems auf $\mathbb{F}$ , 24
$\hat{l}_{\mathbb{P}} = l(d - k - 1, m_0, n - b, m)$	die Dimension des Kernsystems auf $\mathbb{P}$ , 24
$\hat{l}_{\mathbb{F}} = l(d, m_0 - k + 1, b, m)$	die Dimension des Kernsystems auf $\mathbb{F}$ , 24
$r_{\mathbb{P}} = l_{\mathbb{P}} - \hat{l}_{\mathbb{P}} - 1$	die Dimension des eingeschränkten Systems $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$ , 24
$r_{\mathbb{F}} = l_{\mathbb{F}} - \hat{l}_{\mathbb{F}} - 1$	die Dimension des eingeschränkten Systems $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ , 24
$\asymp$	Symbol für asymptotische Betrachtungen , 40
$\lceil a \rceil$	$\min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\}$ , Aufrundung von $a \in \mathbb{R}$ , 40
$\varepsilon(L, x_1, \dots, x_n)$	Seshadri-Konstante , 44
$\lfloor a \rfloor$	$\max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a\}$ , Abrundung von $a \in \mathbb{R}$ , 45
$\beta_n, \gamma_n$	untere Rekursionsschranken , 48
$\varepsilon_n$	Approximationsschranke der Rekursion , 48



## Index

- (−1)-Klasse
  - quasi-homogene, 10
- (−1)-Kurve, 10
- Übergangsfunktion, 14–16
  
- Adjunktionsformel, 8
- Aufblasung, 5, 13, 14, 30, 44
  
- blow-up
  - siehe Aufblasung, 5
  
- Ciliberto, Ciro, 2, 43
- Cremona-Transformation, 30, 32–37
  
- Degeneration, 21
- Dimensionsformel, 25, 28
- Divisor
  - effektiver, 7
  - exzeptioneller, 5, 14, 16, 21, 23, 24
  - kanonischer, 7
  
- Ebene
  - degenerierte, 15
  - projektive, 1
- Eckl, Thomas, 45
- Entwicklungssatz von Laplace, 27
  
- Fixpunkt, 25, 34
- Fixpunktsatz von Borel, 25
- flach
  - Geradenbündel, 17, 21
- flache Familie
  - von Bündeln, 18
  - von Flächen, 17
  
- Garbe, 22
- Geradenbündel, 6, 15, 21
- Geschlecht
  - arithmetisches, 7
  - eines Linearsystems, 8
  
- Halbstetigkeitstheorem, 22, 28
- Harbourne, Brian, 2
- Harbourne-Hirschowitz-Vermutung, 12, 43
- Hilbert, David, 43
  
- Hirschowitz, André, 2
  
- Kernsysteme
  - Definition, 24
  - Dimension, 24
  - virtuelle Dimension, 24
  
- lineare Äquivalenz, 7
- Linearsystem, 26
  - (−1)-spezielles, 10, 12
  - Basispunkt eines, 8, 35–37
  - degeneriertes, 21
  - eingeschränktes, 23
    - Dimension, 24
    - virtuelle Dimension, 24
  - vollständiges, 5
  - Wendepunkt eines, 26
- Linearsystem ebener Kurven, 21
  - virtuelle Dimension, 29, 30
  - Dimension, 5, 22, 24, 28
  - erwartete Dimension, 3
  - Folge von, 39–41, 45–47
  - homogenes, 3
  - nicht-spezielles, 5, 22, 29, 30, 33–35
  - quasi-homogenes, 3
  - spezielles, 5, 33–35
  - virtuelle Dimension, 3, 24
  
- Miranda, Rick, 2, 43
- Multiplicity One Lemma, 8
  
- Nagata, Masayoshi, 43
- Nagata-Vermutung, 43, 44
- Niederblasung, 30, 31
  
- Picard-Gruppe, 15
- Pullback
  - siehe Rückzug
  - einer Geraden, 5
- Punkte in allgemeiner Lage, 4
  
- quadratische Transformation
  - siehe Cremona-Transformation, 30
- Quadratzahl, 12, 43, 45
- quasi-transversal, 25, 27

## Rückzug

einer Geraden, 5, 7, 16

eines Geradenbündels, 16, 21

## Rekursion, 38

Residuensystem, 12, 34, 36, 37

Restriktionsabbildung, 23

## Satz

von Bézout, 9

von Riemann-Roch für Flächen, 7

Schnitt, 21, 23

Schnittzahl, 7, 31

Selbstschnitt eines Linearsystems, 7

Serre-Dualität, 7

Seshadri-Konstante, 44

Wronskideterminante, 26

Wronskimatrix, 26, 27



## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 14. März 2006

---

(Sammy Barkowski)