

Ein neuer Ansatz zur Harbourne-Hirschowitz-Vermutung

DIPLOMARBEIT
von
FELIX SCHÜLLER



angefertigt im Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus

Köln, im Sommersemester 2007

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei denjenigen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

Bei Herrn Prof. Dr. Kebekus und Herrn Dr. Eckl für die gute Betreuung dieser Arbeit und unseres Hauptstudiums. Insbesondere bei Dr. Eckl dafür, dass er immer die nötige Zeit hatte, alle wichtigen Fragen zu klären, egal wieviele weitere Studenten seinen Rat suchten.

Bei meiner Familie und meiner Freundin für ihre Unterstützung, besonders bei meinem Vater für seine Bereitschaft Tipp- und Rechtschreibfehler zu suchen.

Sowie bei meinen Kommilitoninnen und Kommilitonen sowohl für gemeinsames Lernen während des Studiums, als auch für die Diskussionen zu Probleme mit unseren Arbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Hintergrund	3
2.1	Definitionen	3
2.2	Übergang zu \mathbb{P}^2	8
2.3	Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung	11
2.4	Die Nagata-Vermutung	15
3	Kriterien für Nichtspeziellheit	18
3.1	Vorbemerkungen	18
3.1.1	Lineare Algebra	18
3.1.2	Schnitttheorie	20
3.2	Reduktion	20
3.3	Hilfsmittel	27
3.4	Anwendung auf die Nagata-Vermutung	29
3.5	Implementierung	32
3.6	Probleme des Verfahrens	40
4	Cremonatransformationen	47
4.1	Punkte in $\text{Iso}(\varphi)$	48
4.2	Punkte ausserhalb von $\text{Iso}(\varphi)$	51
5	Ausblick	56
5.1	Determinanten	56
5.2	Rang	60
5.3	Weitere Möglichkeiten	62
	Zeichen	66
	Index	67

1 Einleitung

Ein bekanntes Problem in der Algebraischen Geometrie ist die Frage, wieviele ebene Kurven von gewissen Grad man findet, wenn man sich Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ vorgibt, und fordert, dass die Kurven dort mit gewissen Multiplizitäten $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ verschwinden. Wir bezeichnen den Raum dieser Kurven mit $\mathfrak{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$. Es ergibt sich schnell eine Erwartung an die Dimension dieses Raumes, wenn man die Punkte nur geschickt wählt. Allerdings zeigt sich, dass dies nicht immer möglich ist. Wir betrachten jetzt, für feste m_1, \dots, m_n und D , die Menge aller Linearsysteme $\mathfrak{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$, und betrachten auf dieser Menge die Äquivalenzrelation „dim“. Wir setzen die Restklasse, deren Elemente minimale Dimension haben, als $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$, und fragen uns, ob die Dimension ihrer Elemente mit der von uns erwarteten übereinstimmt. Ist dies nicht der Fall, so nennen wir $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ speziell.

Hauptthema dieser Arbeit ist die von Marcin Dumnicki und Witold Jarnicki in [DJ05] und [Dum06] entwickelte Technik, mit der man die Nichtspeziellheit von allgemeinen Systemen $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ durch Reduktion beweisen kann. Diese Technik basiert auf Erkenntnissen in [Dum05], die sich mit der „multivarianten hermiteschen Interpolation“ in beliebigen Dimensionen befasst. In der vorliegenden Arbeit werden die benötigten Aussagen aus [Dum05] im zweidimensionalen Fall formuliert und bewiesen.

Die Frage der (Nicht-)Speziellheit von allgemeinen Systemen führt direkt auf die Vermutungen von Harbourne-Hirschowitz und Nagata. Es ist bekannt, dass sich aus diesen Vermutungen, falls sie wahr sind, Aussagen über die (Nicht-)Speziellheit von bestimmten allgemeinen Systemen treffen lassen. Um Dumnickis Reduktionstechniken sinnvoll anwenden zu können, diskutieren wir in Kapitel 2 zuerst einmal die beiden Vermutungen, sowie gerne und häufig zitierte Folgerungen aus ihnen. Dabei wird für die bekannte Tatsache, dass die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung die Nagata-Vermutung impliziert, ein neuer Beweis gegeben, der einen Satz aus [Eck05] nutzt. Desweiteren ergibt sich aus einer möglichen Formulierung der Nagata-Vermutung die Definition der „Seshadri-Konstanten“

In Kapitel 3 wird die angesprochene Reduktionstechnik vorgestellt, und ein neuer Beweis für die bekannte Tatsache, dass die Nagata-Vermutung für Quadratzahlen gilt, gegeben. Da ein Beweis der Nagata-Vermutung auch mit den neuen Techniken ausser Reichweite erscheint, ist das Ziel der restlichen Arbeit Abschätzungen für Seshadri-Konstanten zu finden.

Da die Reduktionstechnik als Algorithmus aufgefasst werden kann, lag es nahe, diesen tatsächlich zu implementieren. Allerdings beinhaltet dieser Algorithmus Probleme, die für einen Computer nicht leicht zu lösen sind, und die Programmläufe zeigen dann tatsächlich sehr schlechte Laufzeiten.

Daher folgt in Kapitel 4 der Versuch, die Systeme mittels Cremonatransformationen zu vereinfachen. Im allgemeinen misslingt dies, aber wir erhalten als Nebenprodukt die Aussage, dass gewisse Systeme entweder speziell sind, oder es für sie keine „schöne“ Punkte in allgemeiner Lage gibt.

Einer Anregung von Marcin Dumnicki folgend, wird in Kapitel 5 eine Methode entwickelt, bei der das System zuerst reduziert wird, um dann die Nichtspeziellheit mit „klassischen“ Mitteln (Determinanten bzw. Rangberechnung) zu zeigen.

2 Hintergrund

2.1 Definitionen

Sind für $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche Menge $D \subset \mathbb{N}^2$, Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ und Gewichte $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ gegeben, so kann man die Frage nach der Anzahl verschiedene Kurven, die durch Polynome $f = \sum_{\beta \in D} c_\beta X^\beta \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ gegeben sind, und für die f in den Punkten p_i jeweils mindestens mit Multiplizität m_i verschwindet, stellen. Im Folgenden wollen wir das Problem formalisieren. Dabei soll für die gesamte Arbeit folgende Notation gelten:

Notation: Im Folgenden sei $0 \in \mathbb{N}$, sowie für $n \in \mathbb{N}$ immer $I_n := \{1, \dots, n\}$. Ausserdem verwenden wir die Multiindexschreibweise mit den üblichen Vereinbarungen, d.h. es soll für $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ gelten, dass $|(\alpha, \beta)| := \alpha + \beta$ und $X^{(\alpha, \beta)} := x_1^\alpha x_2^\beta$ ist.

Die Menge aller Polynome, die die oben skizzierten Bedingungen erfüllen können wir als Vektorraum auffassen:

Definition 2.1: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir definieren:

$$L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) := \left\{ f = \sum_{\beta \in D} c_\beta X^\beta \in \mathbb{C}[x_1, x_2] \mid \forall j \in I_n \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| < m_j \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial X^\alpha}(p_j) = 0 \right\}$$

Dieser Vektorraum ist isomorph zum Kern einer Matrix, die aus den Ableitungen der Monome ausgewertet an den Punkten besteht. Für einen Punkt hat diese folgendes Aussehen:

Definition 2.2: Sei $m, l \in \mathbb{N}$ und $\{\beta_1, \dots, \beta_l\} =: D \subset \mathbb{N}^2$. Wir definieren:

$$\partial^m D : \mathbb{C}^2 \rightarrow M\left(\binom{m+1}{2}, l, \mathbb{C}\right)$$

$$p \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial^{|(0,0)|} X^{\beta_1}}{\partial X^{(0,0)}}(p) & \dots & \frac{\partial^{|(0,0)|} X^{\beta_l}}{\partial X^{(0,0)}}(p) \\ \frac{\partial^{|(1,0)|} X^{\beta_1}}{\partial X^{(1,0)}}(p) & \dots & \frac{\partial^{|(1,0)|} X^{\beta_l}}{\partial X^{(1,0)}}(p) \\ \frac{\partial^{|(0,1)|} X^{\beta_1}}{\partial X^{(0,1)}}(p) & \dots & \frac{\partial^{|(0,1)|} X^{\beta_l}}{\partial X^{(0,1)}}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{|(0,m-1)|} X^{\beta_1}}{\partial X^{(0,m-1)}}(p) & \dots & \frac{\partial^{|(0,m-1)|} X^{\beta_l}}{\partial X^{(0,m-1)}}(p) \end{pmatrix}$$

Für mehrere Punkte müssen wir die Matrizen der einzelnen Punkte untereinander schreiben:

Definition 2.3: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir definieren:

$$M_D^{(m_1, \dots, m_n)} : (\mathbb{C}^2)^n \rightarrow M\left(\sum_{i \in I_n} \binom{m_i + 1}{2}, \#D, \mathbb{C}\right)$$

$$(p_1, \dots, p_n) \mapsto \begin{pmatrix} (\partial^{m_1} D)(p_1) \\ \vdots \\ (\partial^{m_n} D)(p_n) \end{pmatrix}$$

Lemma 2.4: Seien $l, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ und $\{\beta_1, \dots, \beta_l\} =: D \subset \mathbb{N}^2$. Dann ist $L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ ein \mathbb{C} -Vektorraum und es gilt:

$$L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \cong \text{Kern}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n))$$

Inbesondere haben beide Vektorräume also die gleiche Dimension.

Beweis.

$$\Phi : \text{Kern}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n)) \rightarrow L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$$

$$(c_1, \dots, c_l) \mapsto \sum_{i=1}^l c_i X^{\beta_i}$$

ist offenbar ein Isomorphismus. □

Da die Multiplikation mit einem Skalar die Nullstellenmenge eines Polynoms nicht verändert, und wir nur an unterschiedlichen Kurven interessiert sind, gehen wir zur Projektivierung über:

Definition 2.5: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir definieren:

$$\mathfrak{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) := \mathbb{P}(L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) &= \dim(L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) - 1 \\ &= \dim(\text{Kern}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n))) - 1 \\ &= \#D - \text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n)) - 1 \end{aligned}$$

Da $\text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n))$ durch das Verschwinden von Minoren bestimmt wird, ist $\text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n))$ polynomial in $p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{n,1}, p_{n,2}$. Also ist $\dim(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)) : (\mathbb{C}^2)^n \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\}$ von unten halbstetig in der Zariski-Topologie, d.h. für alle $l \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ ist die Menge

$$\{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{C}^2)^n \mid \dim(\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) \leq l\}$$

Zariski-offen.

Desweiteren ist $\dim(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n))$ beschränkt, nimmt also, da diskret, Maximum und vor allem Minimum an. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.6: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir sagen: p_1, \dots, p_n befinden sich in *allgemeiner Lage* (bezüglich D und m_1, \dots, m_n), falls $\dim(\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) = \min_{q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C}^2} \dim(\mathcal{L}_D(m_1 q_1, \dots, m_n q_n))$ gilt.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n) \subset (\mathbb{C}^2)^n$ die Menge aller Punkte, die sich bezüglich D und m_1, \dots, m_n in allgemeiner Lage befinden. Weiter definieren wir für $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < n$, und $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{C}^2$, $\mathcal{A}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r, m_{r+1}, \dots, m_n) \subset (\mathbb{C}^2)^{n-r}$ als die Mengen aller $(p_{r+1}, \dots, p_n) \in (\mathbb{C}^2)^{n-r}$, so dass $(p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$ gilt.

Bemerkung 2.7: Wie oben gesehen ist $\mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$ offen und nicht leer, für $r \in I_n$ ist $\mathcal{A}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r, m_{r+1}, \dots, m_n) \subset (\mathbb{C}^2)^{n-r}$ auch offen, kann aber leer sein.

Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Betrachten wir auf der Menge $\{\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \mid (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{C}^2)^n\}$ die Äquivalenzrelation „dim“, also $\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \sim \mathcal{L}_D(m_1 p'_1, \dots, m_n p'_n)$ genau dann, wenn $\dim(\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) = \dim(\mathcal{L}_D(m_1 p'_1, \dots, m_n p'_n))$ gilt. Dann existiert für jedes $l \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ eine, möglicherweise leere, Äquivalenzklasse, also können wir auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Ordnung definieren. Nach unseren bisherigen Beobachtungen gibt es also eine wohldefinierte „kleinste“ nichtleere Äquivalenzklasse, und diese ist nicht immer die zu -1 gehörende. Da wir speziell an der Dimension der Elemente dieser Äquivalenzklasse interessiert sind, definieren wir diese Äquivalenzklasse als $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)$. Genauer:

Definition 2.8: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Dann nennen wir

$$\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n) := \{\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \mid (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)\}$$

ein *ein allgemeines System von Kurven*. Weiter definieren wir für beliebige Punkte $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$:

$$\dim(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)) := \dim(\mathcal{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n))$$

Dies ist nach Konstruktion wohldefiniert.

Zur Notationsvereinfachung definieren wir noch:

Definition 2.9: Für $n, m_1, \dots, m_n, d \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$D_d := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid |(\alpha, \beta)| \leq d\}$$

und

$$\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n) := \mathfrak{L}_{D_d}(m_1, \dots, m_n).$$

Als erstes Beispiel betrachten wir $\mathfrak{L}_2(1, 1)$. Wir sehen mit $p_1 = (p_{11}, p_{12})$ und $p_2 = (p_{21}, p_{22})$ aus \mathbb{C}^2 :

$$M_{D_2}^{(1,1)}((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22})) = \begin{pmatrix} 1 & p_{11} & p_{12} & p_{11}p_{12} & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ 1 & p_{21} & p_{22} & p_{21}p_{22} & p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

d.h. für geeignete Wahlen von p_1 und p_2 ist $\text{Rang}(M_{D_2}^{(1,1)}(p_1, p_2)) = 2$, also erhalten wir mit $\#D_2 = 6$:

$$\dim(\mathfrak{L}_2(1, 1)) = \#D_2 - \text{Rang}(M_{D_2}^{(1,1)}(p_1, p_2)) - 1 = 3$$

Intuitiv erwarten wir, dass wir für jedes Linearsystem $\mathfrak{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r)$ durch geeignete Wahl von p_1, \dots, p_r erreichen können, dass

$$\text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_r)}(p_1, \dots, p_r)) \stackrel{\text{erw.}}{=} \min\{\#D, \sum_{i \in I_r} \binom{m_i + 1}{2}\},$$

also

$$\dim(\mathfrak{L}_D(m_1 p_1, \dots, m_r p_r)) \stackrel{\text{erw.}}{=} \max\{\#D - 1 - \sum_{i \in I_r} \binom{m_i + 1}{2}, -1\}$$

gilt.

Betrachten wir also als zweites Beispiel $\mathfrak{L}_2(2, 2)$. Dann gilt

$$M_{D_2}^{(2,2)}((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22})) = \begin{pmatrix} 1 & p_{11} & p_{12} & p_{11}p_{12} & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ 0 & 1 & 0 & p_{12} & 2p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_{11} & 0 & 2p_{12} \\ 1 & p_{21} & p_{22} & p_{21}p_{22} & p_{21}^2 & p_{22}^2 \\ 0 & 1 & 0 & p_{22} & 2p_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_{21} & 0 & 2p_{22} \end{pmatrix}$$

Falls $(p_{11}, p_{12}) = (p_{21}, p_{22})$ ist, gilt offenbar $\text{Rang}(M_{D_2}^{(2,2)}((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22}))) = 3$, andernfalls gilt mit $a := (p_{12} - p_{22})$, $b := (p_{11} - p_{21})$ und $c := p_{12}b - p_{11}a$:

$$0 \neq (c^2, 2ac, -2bc, -2ab, a^2, b^2) \in \text{Kern}(M_{D_2}^{(2,2)}((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22}))).$$

Also ist $\text{Rang}(M_{D_2}^{(2,2)}((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22}))) \leq 5$.

Da ausserdem $\text{Rang}(M_{D_2}^{(2,2)}((1, 0), (0, 1))) = 5$ gilt, folgt $\dim(\mathfrak{L}_2(2, 2)) = 0$.

Beachte: $c^2 + 2acx - 2bcy - 2abxy + a^2x^2 + b^2y^2 = (ax - by + c)^2$, und $V(ax - by + c)$ ist genau die Gerade durch (p_{11}, p_{12}) und (p_{21}, p_{22}) , also ist die gefundene Kurve die Doppelgerade durch diese beiden Punkte.

Nach unserer obigen Überlegung würden wir aber

$$\dim(\mathfrak{L}_2(2, 2)) \stackrel{\text{erw.}}{=} \max\{\#D_2 - 1 - \sum_{i=1}^2 \binom{2+1}{2}, -1\} = \max\{6 - 1 - (3 + 3), -1\} = -1$$

erwarten.

Diese Feststellung führt uns zu folgendem:

Satz & Definition 2.10: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir definieren die *virtuelle Dimension* von $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ als

$$\text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) := \#D - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2},$$

und die *erwartete Dimension* von $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ als

$$\text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) := \max\{\text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)), -1\}.$$

Dann gilt:

$$\dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \geq \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n))$$

Falls $\dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) > \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n))$ gilt, so nennen wir $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ *speziell*, andernfalls *nicht speziell*.

Beweis.

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) &= \#D - 1 - \max_{q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C}^2} \text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n)) \\ &\geq \#D - 1 - \min\{\#D, \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2}\} \\ &= \max\{\#D - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2}, -1\} \\ &= \max\{\text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)), -1\} \\ &= \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

□

Also ist $\mathfrak{L}_2(2, 2)$ speziell, $\mathfrak{L}_2(1, 1)$ aber nicht.

Bemerkung 2.11: Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) &= \#D_d - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2} \\ &= \binom{d+2}{2} - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2} \end{aligned}$$

Definition 2.12: Sei $f \in C[x_1, x_2] \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{C}^2$. Dann definieren wir

$$\text{mult}_p(f) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, |(\alpha, \beta)|=n} \frac{\partial^{|\alpha, \beta|} f}{\partial (x_1, x_2)^{(\alpha, \beta)}}(p) \neq 0\}.$$

2.2 Übergang zu \mathbb{P}^2

Wir wollen nun das oben beschriebene Problem von Kurven auf \mathbb{C}^2 auf Kurven auf \mathbb{P}^2 übertragen. Die ersten Definitionen aus 2.1 lassen sich direkt von \mathbb{C}^2 auf den \mathbb{P}^2 übertragen:

Definition 2.13: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$, $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich und $d := \max_{\beta \in D} \{|\beta|\}$. Wir definieren dann:

$$\begin{aligned} L_D^{\mathbb{P}^2}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) &:= \\ \{f = \sum_{(\alpha, \beta) \in D} c_{(\alpha, \beta)} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{d-\alpha-\beta} \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \mid \forall_{j \in I_n} \forall_{\gamma \in \mathbb{N}^3, |\gamma| < m_j} \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial X^\gamma}(p_j) = 0\} \end{aligned}$$

Weiter definieren wir völlig analog zum bekannten Fall in \mathbb{C}^2 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) &:= \mathbb{P}(L_D^{\mathbb{P}^2}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)), \\ \dim(\mathfrak{L}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n)) &:= \min_{q_1, \dots, q_n \in \mathbb{P}^2} \dim(\mathfrak{L}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1 q_1, \dots, m_n q_n)) \end{aligned}$$

und die offene Teilmenge $\mathcal{A}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n) \subset (\mathbb{P}^2)^n$ der Punkte in allgemeiner Lage.

Als nächstes stellen wir fest, dass die Dimension der allgemeinen Systeme unabhängig davon ist, ob wir sie auf \mathbb{C}^2 oder auf \mathbb{P}^2 betrachten.

Lemma 2.14: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$, $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich, dann gilt:

$$\dim(\mathcal{L}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n)) = \dim(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n))$$

Beweis. $\mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n) \subset (\mathbb{C}^2)^n \subset (\mathbb{P}^2)^n$ ist eine offene, nicht leere Teilmenge, also ist auch $\mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n) \cap \mathcal{A}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n)$ nicht leer, wobei wir \mathbb{C}^2 mit $\{[x, y : 1] \mid x, y \in \mathbb{C}\}$ identifizieren. Sei also (p_1, \dots, p_n) aus diesem Schnitt. Dann ist p_i von der Form $[p_{i,1} : p_{i,2} : 1]$ weswegen wir jetzt, je nach passendem Kontext, $p_i \in \mathbb{P}^2$ oder $p_i \in \mathbb{C}^2$ betrachten.

Wir setzen $d := \max_{\beta \in D} \{|\beta|\}$. Sei jetzt $f \in L_D^{\mathbb{P}^2}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$, dehomogenisieren wir f , so erhalten wir $\tilde{f} \in L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$. Betrachten wir $f \in L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$, und homogenisieren wir f zu einem Polynom \tilde{f} von Grad d , so liefert uns Lemma 2.15, dass $\tilde{f} \in L_D^{\mathbb{P}^2}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ gilt. \square

Lemma 2.15: Sei $d \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ ein Polynom von Grad kleiner gleich d , und $\tilde{f} \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]_d$ die Homogenisierung von f . Weiter sei $(p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ und $m \in \mathbb{N}$. Gilt

$$\forall_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, |(\alpha, \beta)| < m} \frac{\partial^{|\alpha, \beta|} f}{\partial (x_1, x_2)^{(\alpha, \beta)}}((p_1, p_2)) = 0,$$

so gilt auch

$$\forall_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3, |(\alpha, \beta, \gamma)| < m} \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma|} \tilde{f}}{\partial (X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma)}}([p_1 : p_2 : 1]) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen per Induktion über $l \in \{0, \dots, m-1\}$ und darin per Induktion über $\gamma \in \{0, \dots, l\}$, dass

$$\forall_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3, |(\alpha, \beta, \gamma)| = l} \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma|} \tilde{f}}{\partial (x_1, x_2, x_3)^{(\alpha, \beta, \gamma)}}([p_1 : p_2 : 1]) = 0$$

gilt.

Induktionsanfang ($\gamma = 0$):

Klar, da mit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, |(\alpha, \beta)| < l$

$$\frac{\partial^{|\alpha, \beta|} f}{\partial (x_1, x_2)^{(\alpha, \beta)}}((p_1, p_2)) = \frac{\partial^{|\alpha, \beta, 0|} \tilde{f}}{\partial (X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, 0)}}([p_1 : p_2 : 1]),$$

gilt.

Induktionsschluss ($(\gamma - 1) \rightarrow \gamma$):

Sei $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ mit $|(\alpha, \beta)| = l - \gamma$. Dann gilt: $\frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial (X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma-1)}}$ ist das Nullpolynom,

dann ist nichts zu zeigen, oder ein homogenes Polynom von Grad $d - l$, mit $l \in \mathbb{N}$. Nach der Eulerformel gilt dann

$$\begin{aligned} (d-l) \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma-1)}} &= x_1 \frac{\partial^{|\alpha+1, \beta, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha+1, \beta, \gamma-1)}} \\ &+ x_2 \frac{\partial^{|\alpha, \beta+1, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta+1, \gamma-1)}} \\ &+ x_3 \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma)}}. \end{aligned}$$

Also folgt mit Ausnutzung der äusseren Induktionsvoraussetzung bei (*), zweimal der inneren bei (**) und $|(\alpha+1, \beta, \gamma-1)| = |(\alpha, \beta+1, \gamma-1)| = l$:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(*)}{=} (d-l) \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma-1)}} ([p_1 : p_2 : 1]) \\ &= p_1 \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha+1, \beta, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha+1, \beta, \gamma-1)}}}_{\stackrel{(**)}{=} 0} ([p_1 : p_2 : 1]) \\ &+ p_2 \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha, \beta+1, \gamma-1|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta+1, \gamma-1)}}}_{\stackrel{(**)}{=} 0} ([p_1 : p_2 : 1]) \\ &+ 1 \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma)}} ([p_1 : p_2 : 1]). \end{aligned}$$

Also muss $\frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma|} \tilde{f}}{\partial(X_1, X_2, X_3)^{(\alpha, \beta, \gamma)}} ([p_1 : p_2 : 1]) = 0$ gelten. \square

Wegen Satz 2.14 können wir die virtuelle und die erwartete Dimension eines allgemeinen Systems auf \mathbb{P}^2 einfach als diejenige des entsprechenden Systems auf \mathbb{C}^2 setzen.

Definition 2.16: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \text{vdim}(\mathfrak{L}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n)) &:= \text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \\ \text{edim}(\mathfrak{L}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n)) &:= \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

Ausserdem definieren wir für $f \in C[x_1, x_2, x_3] \setminus \{0\}$ und $p \in \mathbb{P}^2$:

$$\text{mult}_p(f) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3, |(\alpha, \beta, \gamma)|=n} \frac{\partial^{|\alpha, \beta, \gamma|} f}{\partial(x_1, x_2, x_3)^{(\alpha, \beta, \gamma)}}(p) \neq 0\}$$

Da es aber, wie wir gerade gesehen haben, egal ist, ob wir Kurven in \mathbb{C}^2 oder Kurven in \mathbb{P}^2 suchen, werden wir künftig in beiden Fällen die Notation $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ benutzen, und nur, wenn die Unterscheidung doch einmal wichtig ist, auf die Notation aus diesem Unterkapitel zurückgreifen.

2.3 Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung

Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung beschäftigt sich mit allgemeinen Systemen die speziell sind. Um sie formulieren zu können, brauchen wir noch die folgenden üblichen Definitionen:

Definition 2.17: Sei X eine projektive Fläche. Eine glatte, irreduzible, rationale Kurve $C \subset X$ heißt (-1) -Kurve, falls

$$C.C = -1$$

gilt.

Definition 2.18: Sei $n \in \mathbb{N}$, X eine projektive Fläche und $x_1, \dots, x_n \in X$. Mit $\text{Bl}_{x_1, \dots, x_n}(X)$ bezeichnen wir den Blowup von X in den Punkten x_1, \dots, x_n .

Vermutung 2.19 (Harbourne-Hirschowitz-Vermutung (HHV)):

Seien $d, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ speziell genau dann, wenn für $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_d(m_1, \dots, m_n)$ eine (-1) -Kurve $C \subset \text{Bl}_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{P}^2)$ existiert, mit

$$C.(d\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) - \sum_{i=1}^n m_i E_i) \leq -2.$$

Dabei ist $\pi : \text{Bl}_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^2$ die Projektion, und für $i \in I_n$ ist E_i die exzeptionelle Gerade über p_i .

Beispiel 2.20: Betrachten wir noch einmal $\mathfrak{L}_2(2, 2)$. Sind $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{C}^2$, dann wird $L_2(2p_1, 2p_2)$ von der Doppelgeraden durch p_1 und p_2 aufgespannt. Ist jetzt $E_0 := \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ und sind E_1, E_2 die exzeptionellen Divisoren, so ist die strikte Transformierte dieser Geraden auf $X := \text{Bl}_{p_1, p_2}(\mathbb{P}^2)$ linear äquivalent zu $E_0 - E_1 - E_2$. Für $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$ gilt $E_i.E_j = 0$, ausserdem gilt $E_0.E_0 = 1$ sowie $E_1.E_1 = E_2.E_2 = -1$, also erhalten wir:

$$(C.C) = (E_0 - E_1 - E_2).(E_0 - E_1 - E_2) = 1 - 1 - 1 = -1$$

ausserdem gilt:

$$C.(2E_0 - 2E_1 - 2E_2) = (E_0 - E_1 - E_2).(2E_0 - 2E_1 - 2E_2) = -2$$

Bemerkung 2.21: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann ist

$$\text{vdim}(\mathfrak{L}(m_1, \dots, m_n)) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

streng monoton wachsend, denn für $d \in \mathbb{N}$ gilt mittels direktem Nachrechnen:

$$\text{vdim}(\mathfrak{L}_{d+1}(m_1, \dots, m_n)) = \text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) + d + 2.$$

Mit dieser Bemerkung und etwas Linearer Algebra können wir jetzt zeigen, dass wir die Nichtspeziellheit bestimmter Systeme schon aus der Nichtspeziellheit anderer Systeme schliessen können:

Satz 2.22: Seien $d, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $\text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) \geq -1$.

Ist $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell, dann ist $\mathfrak{L}_{\tilde{d}}(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell für alle $\tilde{d} \geq d$.

Beweis. Es genügt die Aussage für $\tilde{d} = d + 1$ zu zeigen.

Sei $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_{D_d}(m_1, \dots, m_n) \cap \mathcal{A}_{D_{d+1}}(m_1, \dots, m_n)$. Angenommen, es gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{\dim(L_{d+1}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n))}_{:=\tilde{l}} &> \text{vdim}(\mathfrak{L}_{d+1}(m_1, \dots, m_n)) = \text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) + d + 2 \\ &= \underbrace{\dim(L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n))}_{:=l} + d + 2. \end{aligned}$$

Wegen $L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \subset L_{d+1}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ können wir dann eine Basis $f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_{\tilde{l}}$ von $L_{d+1}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ so finden, dass die f_1, \dots, f_l eine Basis von $L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ bilden, und $f_{l+1}, \dots, f_{\tilde{l}}$ jeweils einen nichtverschwindenden Term von Grad $d + 1$ haben. Da in der Ungleichung oben „ $>$ “ gilt, muss $\tilde{l} - l > d + 2$ gelten.

Für $i \in \{l + 1, \dots, \tilde{l}\}$ bezeichne jetzt f_i^{d+1} den Anteil von f_i , der homogen von Grad $d + 1$ ist. Es gilt $\text{Spann}_{\mathbb{C}}(f_{l+1}^{d+1}, \dots, f_{\tilde{l}}^{d+1}) \subset \text{Spann}_{\mathbb{C}}(x^{d+1}y^0, x^d y^1, \dots, x^1 y^d, x^0 y^{d+1})$, der letzte Vektorraum ist $d + 2$ dimensional, also müssen, wegen $\tilde{l} - l > d + 2$ die f_i^{d+1} über \mathbb{C} linear abhängig sein, d.h. es existiert ein $(\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_{\tilde{l}}) \in \mathbb{C}^{\tilde{l}-l} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{j=l+1}^{\tilde{l}} \lambda_j f_j^{d+1} = 0$. Damit

gilt aber $f := \sum_{j=l+1}^{\tilde{l}} \lambda_j f_j \in L_{\tilde{d}}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ und $\deg(f) < d + 1$, also $f \in L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$.

Da aber f_1, \dots, f_l, f nach Konstruktion linear unabhängig sind, gilt damit:

$$\dim(L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) > l = \dim(L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)),$$

ein Widerspruch. □

Wir können diese Aussage sogar noch verschärfen, die nächste Definition dient dabei der Notationsvereinfachung:

Definition 2.23: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$d_0(m_1, \dots, m_n) := \min\{d \in \mathbb{N} \mid \text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) \geq -1\}$$

Korollar 2.24: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Ist $\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)}(m_1, \dots, m_n)$ und $\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1}(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell, so ist für alle $d \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell.

Beweis. Da $\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)}(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell ist, ist mit Satz 2.22 für alle $d \in \mathbb{N}_{\geq d_0(m_1, \dots, m_n)}$ das allgemeine Linearsystem $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell.

Für $d \in I_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1}$ und $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_d(m_1, \dots, m_n) \cap \mathcal{A}_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1}(m_1, \dots, m_n)$ gilt $L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) \subset L_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$. Also folgt aus $\dim(\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1}(m_1, \dots, m_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1}(m_1, \dots, m_n)) = -1$, dass auch $\dim(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) = -1$ gilt. \square

Der Beweis zeigt uns, dass wir auch eine andere Aussage haben:

Korollar 2.25: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Ist für $d_0 := d_0(m_1, \dots, m_n)$ und

$$D := D_{d_0-1} \cup \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid |(\alpha, \beta)| = d_0 \wedge \alpha > \text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0}(m_1, \dots, m_n))\}$$

$\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell, so ist für alle $d \in \mathbb{N}$ das allgemeine System $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell.

Beweis. Analog zu Korollar 2.24 \square

Bemerkung 2.26: Für $\text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)}(m_1, \dots, m_n)) = -1$ gilt $D = D_{d_0(m_1, \dots, m_n)}$.

Als nächstes wollen wir betrachten, was uns die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung für $d, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ über die Nichtspeziellheit von $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ sagt.

Satz 2.27: Seien $d, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, und $M := \max_{i \in I_n} m_i$. Für $d \geq 3M$ ist $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell, falls die HHV gilt.

Beweis. (nach [Yan07]) Sei $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_d(m_1, \dots, m_n)$, für $i \in I_n$ sei E_i die exceptionelle Gerade über p_i und E_0 der Pullback einer allgemeinen Gerade in \mathbb{P}^2 . Sei

$C \subset \text{Bl}_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{P}^2) =: X$ eine (-1) -Kurve. C ist, für geeignete $e, n_j \in \mathbb{N}$, linear äquivalent zu $eE_0 - \sum_{j=1}^n n_j E_j$. Die Adjunktionsformel liefert uns, da $E_0 \cdot E_0 = 1$ sowie $E_0 \cdot E_i = 0$ und $E_i \cdot E_j = -\delta_{ij}$ für alle $i, j \in I_n$ gilt, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} -2 &= \overbrace{2g(C)}^{=0} - 2 \\ &= C \cdot (C + K_X) \\ &= C \cdot C + (eE_0 - \sum_{j=1}^n n_j E_j) \cdot (-3E_0 + \sum_{j=1}^n E_j) \\ &= -1 + -3e + \sum_{j=1}^n n_j \end{aligned}$$

Also $3e - 1 = \sum_{j=1}^n n_j$. Angenommen, es gilt jetzt $C \cdot (d\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) - \sum_{i=1}^n m_i E_i) \leq -2$, also:

$$-2 \geq (eE_0 - \sum_{j=1}^n n_j E_j) \cdot (dE_0 - \sum_{i=1}^n m_i E_i) = de - \sum_{i=1}^n m_i n_i.$$

Daraus folgt:

$$de \leq \sum_{i=1}^n m_i n_i - 2 < \sum_{i=1}^n m_i n_i \leq M \sum_{i=1}^n n_i \leq M(3e - 1) \leq 3eM$$

Also gilt $d < 3M$, ein Widerspruch. \square

Lemma 2.28: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $M := \max_{i \in I_n} m_i$. Ist $d_0(m_1, \dots, m_n) > 3M$, oder $d_0(m_1, \dots, m_n) = 3M$ und $\text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)}(m_1, \dots, m_n)) = -1$, so ist für alle $d \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell, falls die HHV gilt.

Beweis. Wegen Lemma 2.27 sind die Voraussetzungen von Korollar 2.24 erfüllt, welches uns die Aussage liefert. \square

Für $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $M := \max_{i \in I_n} m_i$ mit $d_0(m_1, \dots, m_n) \geq 3M$ liefert uns das, für $d \in \mathbb{N}$ und $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_d(m_1, \dots, m_n)$, sogar eine Aussage über $L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$. Mit Satz 2.27 und Lemma 2.28 sieht man, dass $L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ für $d < d_0(m_1, \dots, m_n)$ leer ist, und sonst genau $\text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0(m_1, \dots, m_n)}(m_1, \dots, m_n)) + 1$ Polynome von Grad $d_0(m_1, \dots, m_n)$, sowie für $l \in \{d_0(m_1, \dots, m_n), \dots, d\}$ genau $l + 2$ Polynome von Grad l enthält.

2.4 Die Nagata-Vermutung

Die Nagata-Vermutung macht Aussagen darüber, dass bestimmte allgemeine Systeme leer sind. Dabei ist bekannt, dass diese Vermutung für Quadratzahlen $n \in \mathbb{N}_{>9}$ gilt, und dass die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung die Nagata-Vermutung impliziert. Wir wollen die zweite Aussage hier und die erste in Kapitel 3.4 mit neuen Methoden noch einmal zeigen.

Vermutung 2.29 (Nagata-Vermutung): Seien $n \in \mathbb{N}$ und $C \subset \mathbb{P}^2$ eine ebene Kurve vom Grad d , welche $n > 9$ allgemeine Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$ mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ enthält. Dann gilt $d > \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_i$.

Wir können die Vermutung auch wie folgt definieren:

Vermutung 2.30: Es seien $n \geq 9$, p_1, \dots, p_n allgemeine Punkte und $\pi : \text{Bl}_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^2$ die Projektion. Weiter sei E_i der exzeptionelle Divisor über dem Punkt p_i und H der Rückzug einer Geraden $L \subset \mathbb{P}^2$ auf $\text{Bl}_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{P}^2)$. Dann ist der Divisor $H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_i$ auf $\text{Bl}_{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{P}^2)$ nef.

Dabei gilt:

Satz 2.31: Die Vermutung 2.30 ist für $n > 9$ äquivalent zu der Vermutung 2.29.

Beweis. Siehe [Bar06], Lemma 4.4. □

Der folgende Satz ist ein Hilfsmittel, das es uns ermöglicht die Nagata-Vermutung anzugehen:

Satz 2.32: Seien $n \in \mathbb{N}_{>9}$, $1 \geq a \in \mathbb{R}_+$ und (d_i, m_i) eine Folge von natürlichen Zahlen, so dass $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_i^2}{m_i^2} = \frac{n}{a^2}$ und $\dim(\mathcal{L}_{d_i}((m_i + 1)^n)) = \text{edim}(\mathcal{L}_{d_i}((m_i + 1)^n)) \geq 0$ gilt. Dann ist der Divisor $H - a\sqrt{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^n E_j$ nef auf $\text{Bl}_n(\mathbb{P}^2)$. Insbesondere gilt Vermutung 2.30 für n allgemeine Punkte im \mathbb{P}^2 , falls $a = 1$.

Beweis. Siehe [Eck05]. □

Mit diesem Satz können wir jetzt die Anfangs erwähnte Implikation beweisen:

Satz 2.33: Die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung impliziert die Nagata-Vermutung für $n > 9$.

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}_{>9}$ und $m \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\text{vdim}(\mathfrak{L}_{3m-1}(m^n)) = \frac{9m^2 + 3m}{2} - 1 - n \frac{m^2 + m}{2} < 9 \frac{m^2 + m}{2} - 1 - n \frac{m^2 + m}{2} < -1$$

Also gilt $d_0(m^n) \geq 3m$, und mit Lemma 2.28 ist also $\mathfrak{L}_d(m^n)$ nicht speziell und nicht leer für alle $d > d_0(m^n)$, falls die HHV gilt. Ausserdem erhalten wir mit $d_0 := d_0(m^n)$ aus der Ungleichung $-1 \leq \text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0(m^n)}(m^n)) \leq d_0 + 2$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{(d_0 + 2)(d_0 + 1) - nm(m + 1)}{2} \leq d_0 + 3 \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{d_0^2 + 3d_0 + 2 - n(m^2 + m)}{m^2 + m} \leq 2 \cdot \frac{d_0 + 3}{m^2 + m} \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{d_0^2(1 + \frac{3}{d_0} + \frac{2}{d_0^2})}{m^2(1 + \frac{1}{m})} - n \leq 2 \cdot \frac{d_0(1 + \frac{3}{d_0})}{m^2(1 + \frac{1}{m})} \\ \Rightarrow 0 &\leq \underbrace{\frac{d_0(m^n) \rightarrow \infty_1}{d_0(1 + \frac{3}{d_0} + \frac{2}{d_0^2})}}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1} - \frac{n}{\underbrace{m^2(1 + \frac{1}{m})}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1}} \leq 2 \cdot \underbrace{\frac{d_0(m^n) \rightarrow \infty_1}{(1 + \frac{3}{d_0})}}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_0(m^n)^2}{(m-1)^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_0(m^n)^2}{\underbrace{m^2(1 - 2\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2})}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_0(m^n)^2}{m^2} = n,$$

Betrachten wir jetzt die Folge

$$(d_i, m_i) := \begin{cases} (d_0(i^n) + 1, i - 1) & \text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0(i^n)}(i^n)) = -1 \\ (d_0(i^n), i - 1) & \text{sonst} \end{cases},$$

so liefert uns diese, mittels Satz 2.32, die Nagata-Vermutung. \square

Vermutung 2.30 und Satz 2.32 geben Anlass zu folgender Definition:

Definition 2.34: Es sei L ein amples Geradenbündel auf der irreduziblen, projektiven Varietät X und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\pi : \text{Bl}_n(X) \rightarrow X$, mit exzeptionellem Divisor E_i über dem Punkt x_i , $i = 1, \dots, n$. Dann ist die *Seshadri-Konstante* von L in x_1, \dots, x_n definiert durch

$$\varepsilon(L; x_1, \dots, x_n) := \max\{\varepsilon \geq 0 \mid \pi^*L - \varepsilon \sum_{i=1}^n E_i \text{ ist nef auf } \text{Bl}_n(X)\}.$$

Mit Hilfe von Satz 2.32 stellen wir fest, dass wir aus der Nichtspeziellheit eines Systemes eine Abschätzung an die Seshadri-Konstante erhalten:

Lemma 2.35: Seien $n, d, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n > 9$, $\sqrt{n} \leq \frac{d}{m}$ und $\dim(\mathcal{L}_d((m+1)^n)) = \text{edim}(\mathcal{L}_{d_i}((m+1)^n)) \geq 0$. Weiter sei $\text{Bl}_n(\mathbb{P}^2)$ der Blowup in n allgemeinen Punkten x_1, \dots, x_n , und H der Rückzug einer Geraden $L \subset \mathbb{P}^2$ auf $\text{Bl}_n(\mathbb{P}^2)$. Dann gilt:

$$\varepsilon(H; x_1, \dots, x_n) \geq \frac{m}{d}$$

Beweis. Es gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d^2}{m^2} = \frac{d^2}{m^2} \geq n$ also ist $a := \sqrt{n} \frac{m}{d} \leq 1$. Nach Satz 2.32 gilt dann, dass $H - a\sqrt{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^n E_j$ nef auf $\text{Bl}_n(\mathbb{P}^2)$ ist, also ist:

$$\varepsilon(H, x_1, \dots, x_n) \geq a\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \frac{m}{d} \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{m}{d}$$

□

3 Kriterien für Nichtspeziellheit

In [DJ05] und [Dum06] haben Marcin Dumnicki und Witold Jarnicki Techniken entwickelt um die Nichtspeziellheit von allgemeinen Systemen zu beweisen. Sie benutzen diese um die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung für homogene allgemeine Systeme mit Multiplizitäten kleiner gleich 11 ([DJ05]) und 42 ([Dum06]) zu beweisen. Wir wollen hier versuchen diese Methoden mit Hilfe von Satz 2.32 auf die Nagata-Vermutung anzuwenden.

3.1 Vorbemerkungen

Zunächst wollen wir einige Definitionen und Ergebnisse aus der linearen Algebra beziehungsweise Schnitttheorie zusammentragen, die wir später in Beweisen benutzen.

3.1.1 Lineare Algebra

Definition 3.1: Sei $n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^*$ und

$$c \cdot p_{11}^{\alpha_1} p_{12}^{\beta_1} \dots p_{n1}^{\alpha_n} p_{n2}^{\beta_n} = cm \in \mathbb{C}[p_{11}, p_{12}, \dots, p_{n1}, p_{n2}]$$

ein Term. Wir definieren

$$\text{bdeg}(cm) := \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i \right).$$

Satz & Definition 3.2: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $(p_{11}, p_{12}), \dots, (p_{n1}, p_{n2}) \in \mathbb{C}^2$, $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich und $s \in \mathbb{N}_+$. Weiter sei $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s)\} =: \tilde{D}$ eine s -elementige Teilmenge von D , sowie M eine $s \times s$ Untermatrix von $M_{\tilde{D}}^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n)$, und damit auch von $M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n)$. Wir betrachten $\det(M) = f \in \mathbb{C}[p_{11}, p_{12}, \dots, p_{n1}, p_{n2}]$. Dann gibt es $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, so dass für jeden nicht verschwindenden Term $c \cdot m$ von f gilt:

$$\text{bdeg}(cm) = \left(-\alpha + \sum_{i \in I_s} \alpha_i, -\beta + \sum_{i \in I_s} \beta_i \right).$$

Dabei hängt (α, β) nicht von \tilde{D} , sondern nur von der Auswahl der s Zeilen ab. Wir definieren dann

$$\text{bdeg}(\det(M)) := \text{bdeg}(cm)$$

für einen nichtverschwindenden Term cm von $\det(M)$.

Beweis. Es gilt $\det(M) = \sum_{\delta \in S_s} \text{sign}(\delta) M_{1\delta(1)} \dots M_{s\delta(s)}$. Nach Definition von

$M_{\tilde{D}}^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n)$ gilt aber für $i, j \in I_s$, falls $M_{ij} \neq 0$ ist, dass $h \in I_n$, $c \in \mathbb{C}^*$ und

$(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}) \in \mathbb{N}^2$ mit $M_{ij} = c \cdot p_{h1}^{\alpha_j - \gamma_{i1}} p_{h2}^{\beta_j - \gamma_{i2}}$ existieren, denn $M_{ij} = \frac{\partial^{(\gamma_{i1}, \gamma_{i2})} X^{(\alpha_j, \beta_j)}}{\partial X^{(\gamma_{i1}, \gamma_{i2})}}(p_h)$. Ist $M_{1\delta(1)} \dots M_{s\delta(s)} = c \cdot p_{h1}^{k_1} p_{h2}^{l_1} \dots p_{h_s}^{k_s} p_{h_s}^{l_s}$, mit $(k_1, l_1), \dots, (k_s, l_s) \in \mathbb{N}^2$ und $h_1, \dots, h_s \in I_n$, so gilt:

$$\text{bdeg}(M_{1\delta(1)} \dots M_{s\delta(s)}) = \left(\sum_{i \in I_s} k_i, \sum_{i \in I_s} l_i \right) = \left(\sum_{i \in I_s} \alpha_i - \sum_{i \in I_s} \gamma_{i1}, \sum_{i \in I_s} \beta_i - \sum_{i \in I_s} \gamma_{i2} \right).$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil aus jeder Spalte und jeder Zeile ein Faktor im Produkt steht, also folgt mit $\alpha := \sum_{i \in I_s} \gamma_{i1}$ sowie $\beta := \sum_{i \in I_s} \gamma_{i2}$ die Behauptung, denn nach Konstruktion von M hängen die γ_i nur von den ausgewählten Zeilen ab. \square

Definition 3.3: Seien $n, k \in \mathbb{N}_+$, $k < n$. Wir definieren

$$\mathcal{S}_n^k := \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in I_n, a_1 < \dots < a_k\}$$

sowie für $S \in \mathcal{S}_n^k$ die Permutation

$$s(S) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k & b_1 & \dots & b_{n-k} \end{pmatrix}$$

wobei $b_1 < \dots < b_{n-k}$ die Elemente von $I_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ sind.

Lemma 3.4 (Verallgemeinerte Regel von Laplace): Seien $n \in \mathbb{N}_+$, \mathbb{K} ein Körper und $M \in \mathcal{M}(n, n, \mathbb{K})$. Weiter seien $k \in \mathbb{N}_+$ mit $k < n$ und $M_1 \in \mathcal{M}(k, n, \mathbb{K})$ und

$M_2 \in \mathcal{M}(n-k, n, \mathbb{K})$, so dass $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$ gilt. Für jedes $(a_1, \dots, a_k) = S \in \mathcal{S}_n^k$ sei m_1^S , der durch die Auswahl der Spalten a_1, \dots, a_k von M_1 definierte $k \times k$ -Untermatrix, sowie m_2^S , der durch die Auswahl der Spalten b_1, \dots, b_{n-k} , wobei $\{b_1, \dots, b_{n-k}\} = I_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ ist, von M_2 definierte $(n-k) \times (n-k)$ -Untermatrix. Dann gilt

$$\det(M) = \sum_{S \in \mathcal{S}_n^k} \text{sign}(s(S)) m_1^S m_2^S.$$

Beweis. Siehe [Bri83], Satz 10.13. \square

3.1.2 Schnitttheorie

Definition 3.5: Seien C und D Kurven in \mathbb{P}^2 und $p \in \mathbb{P}^2$. C sei um p durch die Gleichung $f = 0$, und D um p durch die Gleichung $g = 0$ gegeben. Wir definieren dann:

$$(C.D)_p := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p} / (f_p, g_p)$$

Satz 3.6 (Bézout): Seien C und D Kurven von Grad n und m in \mathbb{P}^2 , ohne gemeinsame Komponenten, dann gilt:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} (C.D)_p = nm$$

Beweis. Siehe [Har77], Kapitel V.1. □

Korollar 3.7: Seien C und D Kurven von Grad n und m in \mathbb{C}^2 , welche sich in mehr als nm Punkten schneiden. Dann haben C und D eine gemeinsame Komponente.

Beweis. \mathbb{C}^2 und damit auch C und D lassen sich in den \mathbb{P}^2 einbetten. Wir erhalten dann Kurven $\tilde{C}, \tilde{D} \subset \mathbb{P}^2$. Diese Kurven unterscheiden sich von der Einbettung von C bzw. D nur um endlich viele Punkte, insbesondere ist $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ keine Komponente von \tilde{C} bzw. \tilde{D} . Für jedes $p \in \mathbb{C}^2 \cap C \cap D$ gilt dann $(\tilde{C}.\tilde{D})_p = (C.D)_p \geq 1$, denn (f_p, g_p) kann wegen $f(p) = 0$ und $g(p) = 0$ nicht ganz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}$ sein, da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}$ auch Keime von nicht in p verschwindenden Funktionen enthält.

Also gilt: $\sum_{p \in \mathbb{P}^2} (\tilde{C}.\tilde{D})_p \geq \#(\mathbb{C}^2 \cap C \cap D) > nm$, hätten jetzt \tilde{C} und \tilde{D} keine gemeinsame Komponente, so widerspräche dies Satz 3.6. Da aber, wie oben festgestellt, $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ keine Komponente von \tilde{C} bzw. \tilde{D} ist, müssen also auch C und D eine gemeinsame Komponente haben. □

3.2 Reduktion

Die Hauptidee der von Dumnicki und Jarnicki entwickelten Technik ist, dass man die Menge D nicht mehr als die Exponentenmenge betrachtet, sondern als Punkte im \mathbb{R}^2 auffasst. Zerlegt man diese Menge geeignet in zwei disjunkte Teilmengen D_1 und D_2 , erhält man die Nichtspeziellheit von $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ schon aus der Nichtspeziellheit von $\mathfrak{L}_{D_1}(m_1, \dots, m_{i-1})$. Im Idealfalle kann man diese Reduktion so oft durchführen, bis man ein System erhält, dessen Nichtspeziellheit klar ist.

Satz 3.8: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Es gelte $D = D_1 \dot{\cup} D_2$, so dass ein $i \in I_n$ existiert mit:

1. $\text{edim}(\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)) = -1$.
2. $\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)$ ist nicht speziell.
3. Für alle $P \subset D$ mit $\#P = \#D_2$ und $\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_2} \alpha$, die nicht gleich D sind, ist $\mathfrak{L}_P(m_i, \dots, m_n)$ speziell.

Dann ist $\dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \leq \dim(\mathfrak{L}_{D_1}(m_1, \dots, m_{i-1}))$.

Beweis. Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$, dann ergibt sich mit geeigneten Matrizen K_1, K_2 :

$$M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n) = \begin{pmatrix} M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(p_1, \dots, p_{i-1}) & K_1 \\ K_2 & M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(p_i, \dots, p_n) \end{pmatrix}$$

Behauptung: Es existieren Tupel von Punkten

$$((p'_1, \dots, p'_{i-1}), (p'_i, \dots, p'_n)) \in (\mathcal{A}_{D_1}(m_1, \dots, m_{i-1}) \times \mathcal{A}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)) \cap \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n),$$

so dass $\text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p'_1, \dots, p'_n))$ mindestens so groß ist wie

$$\text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(p'_1, \dots, p'_{i-1})) + \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(p'_i, \dots, p'_n)).$$

Anwendung der Behauptung: Seien p'_1, \dots, p'_n wie in der Behauptung.

$$\begin{aligned} & \dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \\ & \stackrel{(p'_1, \dots, p'_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)}{=} \dim(\mathfrak{L}_D(m_1 p'_1, \dots, m_n p'_n)) \\ & = \#D - 1 - \text{Rang}(M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(p'_1, \dots, p'_n)) \\ & \stackrel{\text{Behauptung}}{\leq} \#D - 1 - \text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(p'_1, \dots, p'_{i-1})) \\ & \quad - \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(p'_i, \dots, p'_n)) \\ & \stackrel{(*)}{=} \#D - 1 - \text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(p'_1, \dots, p'_{i-1})) - \#D_2 \\ & = \underbrace{\#D - \#D_2}_{=\#D_1} - 1 - \text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(p'_1, \dots, p'_{i-1})) \\ & = \dim(\mathfrak{L}_{D_1}(m_1 p'_1, \dots, m_{i-1} p'_{i-1})) \\ & \stackrel{(p'_1, \dots, p'_{i-1}) \in \mathcal{A}_{D_1}(m_1, \dots, m_{i-1})}{=} \dim(\mathfrak{L}_{D_1}(m_1, \dots, m_{i-1})) \end{aligned}$$

Dabei folgt die Gleichheit in (*) aus:

$$\begin{aligned}
-1 &= \text{edim}(\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)) \\
&\stackrel{\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n) \text{ nicht speziell}}{=} \dim(\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)) \\
&= \#\widetilde{D}_2 - 1 - \max_{q_i, \dots, q_n \in (\mathbb{C}^2)^{n-i+1}} \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(q_i, \dots, q_n))
\end{aligned}$$

Damit folgt $\#D_2 = \max_{q_i, \dots, q_n \in (\mathbb{C}^2)^{n-i+1}} \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(q_i, \dots, q_n))$, und wegen

$$(p'_i, \dots, p'_n) \in \mathcal{A}_{D_2}(m_i, \dots, m_n) \text{ gilt } \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(p'_i, \dots, p'_n)) = \#D_2.$$

Beweis der Behauptung:

Seien $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$. Weiter sei $k := \text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(q_1, \dots, q_{i-1}))$ und $l := \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(q_i, \dots, q_n))$, sowie $\det M_1$ eine reguläre $k \times k$ -Untermatrix von $M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(q_1, \dots, q_{i-1})$ und \widetilde{M}_2 eine reguläre $l \times l$ -Untermatrix von $M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(q_i, \dots, q_n)$, sowie \widetilde{K}_1 und \widetilde{K}_2 Untermatrizen von K_1 bzw K_2 , so dass $M := \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1 & \widetilde{K}_1 \\ \widetilde{K}_2 & \widetilde{M}_2 \end{pmatrix}$ eine $(k+l) \times (k+l)$ -Untermatrix von $M_D^{(m_1, \dots, m_n)}(q_1, \dots, q_n)$ ist.

Nachdem wir M konstruiert haben, betrachten wir jetzt M nicht mehr als die Matrix, in die q_1, \dots, q_n eingesetzt wurde, sondern als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}[p_{11}, p_{12}, \dots, p_{n1}, p_{n2}]$. Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\det(M)$ nicht das Nullpolynom ist.

Nach der verallgemeinerten Regel von Laplace, Lemma 3.4, gilt mit $M_1 := \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1 & \widetilde{K}_1 \end{pmatrix}$, $M_2 := \begin{pmatrix} \widetilde{K}_2 & \widetilde{M}_2 \end{pmatrix}$ und $j := l + k$:

$$\det(M) = \sum_{S \in \mathcal{S}_j^k} \text{sign}(s(S)) r_1^S r_2^S = \det(\widetilde{M}_1) \det(\widetilde{M}_2) + \sum_{S \in (\mathcal{S}_j^k \setminus \{(1, \dots, k)\})} \text{sign}(s(S)) r_1^S r_2^S$$

Dabei ist für alle $S \in \mathcal{S}_j^k$ $r_1^S \in \mathbb{C}[p_{11}, p_{12}, \dots, p_{i-1,1}, p_{i-1,2}]$ und $r_2^S \in \mathbb{C}[p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{n1}, p_{n2}]$. Ausserdem ist $\det(\widetilde{M}_1) \det(\widetilde{M}_2)(q_1, \dots, q_n) \neq 0$, also ist $\det(\widetilde{M}_1) \det(\widetilde{M}_2)$ nicht das Nullpolynom.

Wegen $\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)$ nicht speziell und $\text{edim}(\mathfrak{L}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)) = -1$ wissen wir $l = \#D_2$. Sei also

$$D_2 = \{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l)\}.$$

Mit Satz 3.2 und \widetilde{M}_2 Untermatrix von $M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(p_i, \dots, p_n)$ folgt, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ existie-

ren mit

$$\text{bdeg}(\det(\widetilde{M}_2)) = \left(-\alpha + \sum_{j \in I_l} \alpha_j, -\beta + \sum_{j \in I_l} \beta_j\right).$$

Angenommen, es existiert ein $S \in (\mathcal{S}_j^k \setminus \{(1, \dots, k)\})$, so dass r_2^S einen Term r mit $\text{bdeg}(r) = \text{bdeg}(\det(\widetilde{M}_2))$ enthält. Nach Satz 3.2 gilt dies dann schon für jeden Term von r_2^S , d.h. es existiert $\{(\alpha'_1, \beta'_1), \dots, (\alpha'_l, \beta'_l)\} =: P \subset D$ mit $r_2^S = \det(M_P^{(m_1, \dots, m_n)}(p_1, \dots, p_n))$. Nach Satz 3.2 gilt dann:

$$\left(-\alpha + \sum_{j \in I_l} \alpha_j, -\beta + \sum_{j \in I_l} \beta_j\right) = \text{bdeg}(r_2^S) = \left(-\alpha + \sum_{j \in I_l} \alpha'_j, -\beta + \sum_{j \in I_l} \beta'_j\right)$$

also

$$\left(\sum_{j \in I_l} \alpha_j, \sum_{j \in I_l} \beta_j\right) = \left(\sum_{j \in I_l} \alpha'_j, \sum_{j \in I_l} \beta'_j\right).$$

Voraussetzung 3 liefert wegen $\#P = l = \#D_2$, dass $\mathfrak{L}_P(m_1, \dots, m_n)$ speziell ist. Wäre jetzt $r_2^S \neq 0$, so würde gelten:

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{L}_P(m_1, \dots, m_n)) &= \#P - 1 - \underbrace{\max_{q_1, \dots, q_n \in (\mathbb{C}^2)^{n-i+1}} \text{Rang}(M_P^{(m_1, \dots, m_n)}(q_1, \dots, q_n))}_{\geq l} \\ &\leq \#P - l - 1 = \#D_2 - 1 - l \\ &= \dim(\mathfrak{L}_{D_2}(m_1, \dots, m_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_{D_2}(m_1, \dots, m_n)) \\ &= \text{edim}(\mathfrak{L}_P(m_1, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

Also wäre $\mathfrak{L}_P(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell, ein Widerspruch.

Also ist $\det(M) = \det(\widetilde{M}_1) \det(\widetilde{M}_2) + r$, $r \in \mathbb{C}[p_{11}, p_{12}, \dots, p_{n1}, p_{n2}]$ und kein Term von r wird von einem Term r mit $\text{bdeg}(r) = \text{bdeg}(\det(\widetilde{M}_2))$ geteilt. Da, wie oben festgestellt, $\det(\widetilde{M}_1) \det(\widetilde{M}_2)$ nicht das Nullpolynom ist, ist auch $\det(M) \in \mathbb{C}[p_{11}, p_{12}, \dots, p_{n1}, p_{n2}]$ nicht das Nullpolynom und damit ist (da Zariski-offene Mengen dicht liegen):

$$A := (\mathcal{A}_{D_1}(m_1, \dots, m_{i-1}) \times \mathcal{A}_{D_2}(m_i, \dots, m_n)) \cap \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_i) \cap ((\mathbb{C}^2)^n \setminus V(\det(M))) \neq \emptyset$$

Also existieren $(p'_1, \dots, p'_n) \in A$ mit:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_i)}(p'_1, \dots, p'_i)) &\geq \text{Rang}(M(p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{i1}, p'_{i2})) = l + k \\ &= \text{Rang}(M_{D_1}^{(m_1, \dots, m_{i-1})}(p'_1, \dots, p'_{i-1})) \\ &\quad + \text{Rang}(M_{D_2}^{(m_i, \dots, m_n)}(p'_i, \dots, p'_n)) \end{aligned}$$

□

Definition 3.9: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir sagen: $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ lässt einen Reduktionsalgorithmus zu, falls es $D_0 \subset \dots \subset D_n = D$ gibt, mit:

1. Für alle $i \in I_n$ ist $\#D_i - \#D_{i-1} \leq \binom{m_i+1}{2}$.
2. Für alle $i \in I_n$ ist $\mathcal{L}_{D_i \setminus D_{i-1}}(m_i)$ nicht speziell.
3. Für alle $i \in I_n$ gilt: Falls es ein $P \subset D_i$ mit $\#P = \#D_i - \#D_{i-1}$ und $\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_i \setminus D_{i-1}} \alpha$ gibt, das nicht gleich $D_i \setminus D_{i-1}$ ist, dann ist $\mathcal{L}_P(m_i)$ speziell.
4. $\#D_0 - 1 \leq \text{edim}(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n))$

Satz 3.10: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Falls $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ einen Reduktionsalgorithmus zulässt, so ist es nicht speziell.

Beweis. Wir müssen $\text{edim}(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)) = \dim(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n))$ zeigen. Wegen Satz 2.10 und $\mathcal{L}_{D_0}()$ nicht speziell reicht es,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)) &\leq \dim(\mathcal{L}_{D_{n-1}}(m_1, \dots, m_{n-1})) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \dim(\mathcal{L}_{D_0}()) = \#D_0 - 1 \\ &\stackrel{3.9.4}{\leq} \text{edim}(\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

zu zeigen. Dies folgt aber direkt aus Satz 3.8, im Schritt $i \in I_n$ angewandt mit $\tilde{D} = D_i$, $\tilde{D}_1 = D_{i-1}$ und $\tilde{D}_2 = D_i \setminus D_{i-1}$: Die Bedingung 3.9.1 liefert durch direktes Nachrechnen 3.8.1, die anderen beiden Bedingungen entsprechen sich 1:1. \square

Vermutung 3.11 (Dumnicki): Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ lässt genau dann einen Reduktionsalgorithmus zu, wenn $\mathcal{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ nicht speziell ist.

Für die praktische Durchführung ist es manchmal hilfreich, folgende Abwandlung von 3.9 zu verwenden.

Definition 3.12: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Wir sagen: $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ lässt einen verallgemeinerten Reduktionsalgorithmus zu, falls es $l, j_2, \dots, j_l \in I_n$ mit $j_2 < \dots < j_l$ und $D_0 \subset \dots \subset D_l = D$ gibt, so dass, mit $j_1 := 1$ und $j_{l+1} := n + 1$, gilt:

1. Für alle $i \in I_l$ ist $\text{edim}(\mathfrak{L}_{D_i \setminus D_{i-1}}(m_{j_i}, \dots, m_{j_{i+1}-1})) = -1$
2. Für alle $i \in I_l$ ist $\mathfrak{L}_{D_i \setminus D_{i-1}}(m_{j_i}, \dots, m_{j_{i+1}-1})$ nicht speziell.
3. Für alle $i \in I_l$ gilt: Falls es ein $P \subset D_i$ mit $\#P = \#D_i - \#D_{i-1}$ und $\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_i \setminus D_{i-1}} \alpha$ gibt, das nicht gleich $D_i \setminus D_{i-1}$ ist, dann ist $\mathfrak{L}_P(m_{j_i}, \dots, m_{j_{i+1}-1})$ speziell.
4. $\#D_0 - 1 \leq \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n))$

Satz 3.13: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Falls $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ einen verallgemeinerten Reduktionsalgorithmus zulässt, so ist es nicht speziell.

Beweis. Fast wörtlich wie zu Satz 3.10. □

Bemerkung 3.14: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich. Falls $\text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \geq -1$ und $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ einen (verallgemeinerten) Reduktionsalgorithmus zulässt, so muss in 3.9.1 und 3.9.4 (3.12.1 und 3.12.4) schon „=“ gelten.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \#D - 1 - \sum_{i=1}^n \#(D_i \setminus D_{i-1}) &= \#D_0 - 1 \\
 &\stackrel{3.9.4}{\leq} \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \quad (*) \\
 &= \text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \\
 &= \#D - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2}
 \end{aligned}$$

Dies ist aber nur möglich, wenn in 3.9.1 schon für alle $i \in I_n$ „=“ gilt, und in diesem Fall gilt in (*) schon Gleichheit, also auch in 3.9.4. Die Aussage über 3.12 erhalten wir, indem wir einfach überall 3.9 durch 3.12 ersetzen. □

Bemerkung 3.15: In den Beweisen zu Satz 3.10 und 3.13 sieht man, dass man die Reduktion nicht unbedingt bis zu einem System ohne Bedingungen durchführen muss um die Nichtspeziellheit zu zeigen. Es reicht auch, wenn man die Nichtspeziellheit eines beliebigen Systems in der Reduktionskette zeigen kann.

3.3 Hilfsmittel

Da die Bedingungen 3.9.2 und 3.9.3 sowie 3.12.2 und 3.12.3 nur schwer zu prüfen sind, entwickeln wir in diesem Abschnitt Hilfsmittel, mit denen wir diese für geeignete Systeme einfacher überprüfen können. Diese stammen im wesentlichen aus [DJ05] und [Dum06].

Satz 3.16: Sei $m \in \mathbb{N}_+$, $l := \binom{m+1}{2}$, $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l)\} = D \subset \mathbb{N}^2$. Dann ist $\mathfrak{L}_D(m)$ genau dann speziell, wenn $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l) \in \mathbb{C}^2$ auf einer Kurve von Grad $m - 1$ liegen.

Beweis. Da $\text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m)) = \#D - 1 - \binom{m+1}{2} = -1$ ist, ist $\mathfrak{L}_D(m)$ speziell genau dann, wenn $\det(M_D^{(m)}(p)) = 0$ für alle $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$. Nach Satz 3.2 wissen wir aber, dass $\det(M_D^{(m)}((p_1, p_2))) = c \cdot p_1^k p_2^l$ ist, für $c \in \mathbb{C}$, $l, k \in \mathbb{N}$. Es reicht also $c = \det(M_D^{(m)}((1, 1)))$ zu berechnen.

$$M_D^{(m)}((1, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_l \\ \beta_1 & \dots & \beta_l \\ \alpha_1 \beta_1 & \dots & \alpha_l \beta_l \\ \alpha_1^2 - \alpha_1 & \dots & \alpha_l^2 - \alpha_l \\ \beta_1^2 - \beta_1 & \dots & \beta_l^2 - \beta_l \\ \alpha_1^2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_1 & \dots & \alpha_l^2 \beta_1 - \alpha_l \beta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-1-i} \beta_1^i & \dots & \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-1-i} \beta_l^i \end{pmatrix}$$

Durch elementare Zeilenumformungen kann man

$$\det(M_D^{(m)}((1, 1))) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_l \\ \beta_1 & \dots & \beta_l \\ \alpha_1 \beta_1 & \dots & \alpha_l \beta_l \\ \alpha_1^2 & \dots & \alpha_l^2 \\ \beta_1^2 & \dots & \beta_l^2 \\ \alpha_1^2 \beta_1 & \dots & \alpha_l^2 \beta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{m-1} & \dots & \beta_l^{m-1} \end{vmatrix}$$

erreichen, und die letzte Determinante ist genau dann Null, wenn die Zeilen linear abhängig sind, d.h. wenn $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l) \in \mathbb{C}^2$ auf einer Kurve von Grad $m - 1$ liegen. \square

Satz 3.17: Sei $m \in \mathbb{N}_+$, $l := \binom{m+1}{2}$, $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l)\} = D \subset \mathbb{N}^2$. Gibt es m paarweise verschiedene Geraden $L_1, \dots, L_m \subset \mathbb{C}^2$ mit $\#(D \cap (L_i \setminus \bigcup_{j=i+1}^m L_j)) \geq i$, so ist $\mathfrak{L}_D(m)$ nicht speziell.

Beweis. Nach Satz 3.16 reicht es zu zeigen, dass $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l) \in \mathbb{C}^2$ auf keiner Kurve von Grad $m-1$ liegen. Sei für alle $i \in I_m$ die Gerade L_i gegeben als $V(l_i)$. Angenommen, $C = V(f)$ sei eine Kurve von Grad $m-1$ und $D \subset C$. Dann gilt $\#(C \cap L_m) \geq m$, also muss, nach Korollar 3.7, L_m eine irreduzible Komponente von C sein. Dann ist aber $C' := V(\frac{f}{l_m})$ eine Kurve von Grad $\leq m-2$ mit $\#(C' \cap L_{m-1}) \geq m-1$ und wir können erneut Korollar 3.7 anwenden. Durch Iteration sehen wir $\bigcup_{i=1}^m L_i \subset C$, und damit $\deg(C) \geq \deg(\prod_{i=1}^m l_i) = m$, ein Widerspruch. \square

Satz 3.18: Seien $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich, und $f(x, y) = r_1x + r_2y + r_0 \in \mathbb{R}[x, y]$ mit $D \cap V(f) = \emptyset$. Weiter sei $D_1 := \{(\alpha, \beta) \in D \mid f(\alpha, \beta) < 0\}$. Dann folgt für $P \subset D$ mit $\#P = \#D_1$ und $\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_1} \alpha$, dass schon $P = D_1$ gilt.

Beweis. Sei $P \subset D$ mit $\#P = \#D_1$ und $\sum_{\alpha \in P} \alpha = \sum_{\alpha \in D_1} \alpha$ beliebig. Dann gilt:

$$\sum_{\alpha \in D_1} f(\alpha) + \#D_1 \cdot r_0 = f\left(\sum_{\alpha \in D_1} \alpha\right) = f\left(\sum_{\alpha \in P} \alpha\right) = \sum_{\alpha \in P} f(\alpha) + \#P \cdot r_0$$

Also folgt wegen $\#P = \#D_1$: $\sum_{\alpha \in D_1} f(\alpha) = \sum_{\alpha \in P} f(\alpha)$. Wir schreiben $P = P_1 \cup P_2$ mit $P_1 := P \cap D_1$ und $P_2 := P \setminus P_1$. Jetzt schreibt sich die letzte Gleichung als

$$\sum_{\alpha \in D_1 \cap P_1 = P_1} f(\alpha) + \sum_{\alpha \in D_1 \setminus P_1} f(\alpha) = \sum_{\alpha \in P_1} f(\alpha) + \sum_{\alpha \in P_2} f(\alpha).$$

Also gilt

$$0 \geq \sum_{\alpha \in D_1 \setminus P_1} \underbrace{f(\alpha)}_{<0} = \sum_{\alpha \in P_2} \underbrace{f(\alpha)}_{>0} \geq 0,$$

d.h. es muss $D_1 \setminus P_1 = P_2 = \emptyset$ gelten, also $D_1 = P$. \square

Mit den Sätzen 3.17 und 3.18 haben wir jetzt ein graphisches Verfahren an der Hand mit dem wir ein gegebenes System auf Nichtspeziellheit testen können.

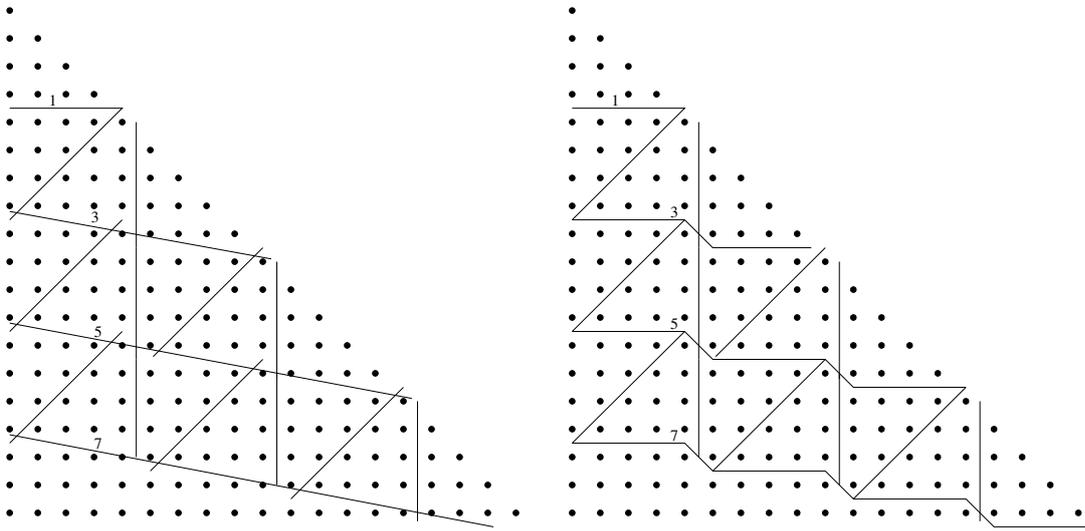
Definition 3.9 zusammen mit Satz 3.10 entspricht dabei dem Verfahren in [DJ05], und Definition 3.12 mit 3.12.3 ersetzt durch Satz 3.18 entspricht dem Verfahren in [Dum06].

3.4 Anwendung auf die Nagata-Vermutung

Satz 3.19: Sei $l \in \mathbb{N}_{>3}$, dann gilt die Nagata-Vermutung für $n := l^2$.

Beweis. Sei $l \in \mathbb{N}_{>3}$ beliebig, aber fest und $n := l^2$. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $d := lm + l - 2$. Das folgende Verfahren zeigt uns, dass dann $\mathfrak{L}_d(m^n)$ nicht speziell ist, und $\text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m^n)) > -1$ gilt:

Die Beweisidee ist, dass wir mittels Geraden aus der Exponentenmenge, betrachtet als Teilmenge des \mathbb{R}^2 , Dreiecke mit je $\binom{m+1}{2}$ Punkten abschneiden können. Dadurch finden wir einen Reduktionsalgorithmus, der uns zeigt, dass das System nicht speziell ist. Zur Veranschaulichung hier der Spezialfall $l = 4$ und $m = 4$.



Zuerst schneiden wir oben mit einer waagerechten Geraden durch $y = d - (m + \frac{1}{2})$ ein System der Form $\mathfrak{L}_{D_1}(m)$ mit $\text{vdim}(\mathfrak{L}_{D_1}(m)) = -1$ ab, das wegen Satz 3.17 nicht speziell ist. In unserer Zeichnung ist dies die mit 1 bezeichnete Gerade.

Als nächstes schneiden wir mit einer Geraden der Steigung $-\frac{1}{m+1}$ durch den Punkt $(0, d - (2m + \varepsilon))$ ein weiteres System $\mathfrak{L}_{D_2}(m^3)$ ab. Die kurzen senkrechten und schrägen Linien zeigen uns, dass wir dieses System mittels Schnitten in drei Punktdreiecke zerlegen können, und die zu den Dreiecken gehörende Systeme $\mathfrak{L}_D(m)$ sind, genau wie im ersten Schritt, mit Satz 3.17 nicht speziell. Die zweite Zeichnung verdeutlicht die Dreiecke. Durch diese Zerlegung sehen wir zum einen, dass $\text{vdim}(\mathfrak{L}_{D_2}(m^3)) = -1$ gilt, und zum anderen, dass $\mathfrak{L}_{D_2}(m^3)$ einen Reduktionsalgorithmus zulässt, also nach Satz 3.10 nicht speziell ist. Dabei liefert uns Satz 3.18 die Bedingung 3.9.3, und 3.9.4 gilt, da wir immer Dreiecke mit $\binom{m+1}{2}$ Punkten abschneiden.

Den letzten Schritt können wir wiederholen, dabei schneiden wir beim i -ten Schritt $2i - 1$ Dreiecke ab, also haben wir nach $l - 1$ Wiederholungen zusammen mit dem ersten Dreieck genau $\sum_{j=1}^l 2j - 1 = l^2 = n$ Dreiecke abgeschnitten.

Insgesamt sehen wir, dass das System $\mathfrak{L}_d(m^n)$ einen verallgemeinerten Reduktionsalgorithmus zulässt. Dabei liefert wieder Satz 3.18 die Bedingung 3.12.3. Bedingung 3.12.2 haben wir schon geprüft, und die Bedingungen 3.12.1 und 3.12.4 ergeben sich, weil wir immer Dreiecke mit $\binom{m+1}{2}$ Punkten abschneiden, $\text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m^n))$ ist dann genau die Anzahl der übrigbleibenden Punkte.

Also sind alle $\mathfrak{L}_d(m^n)$ nicht speziell, und wegen

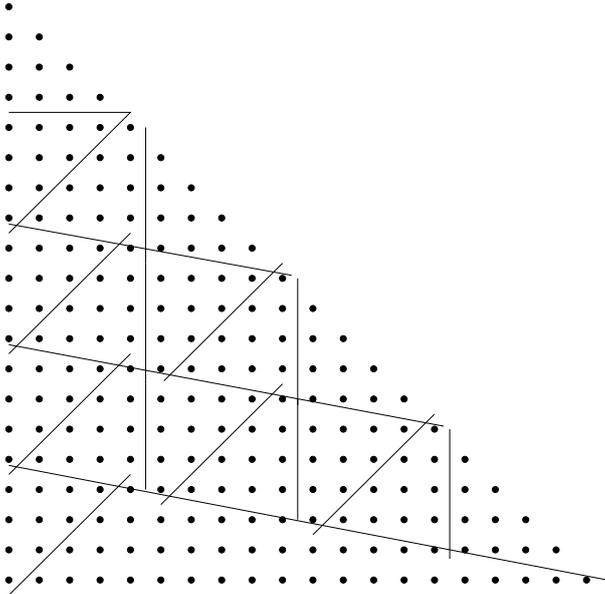
$$\frac{d}{m-1} = \frac{lm + l - 2}{m-1} = \frac{l}{1 - \frac{1}{m}} + \frac{l-2}{m-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l = \sqrt{n}$$

folgt jetzt die Behauptung mit Satz 2.32. \square

Leider lässt sich diese Konstruktion nicht auf Nichtquadratzahlen erweitern. Vermutlich gilt sogar: Wenn wir $n = l^2 + s$ betrachten, wobei $l \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und $s \in \mathbb{N}$ mit $0 < s < l$ sein sollen, so können wir nicht durch Abschneiden die Nichtspeziellheit des verbleibenden Systems zeigen, oder $\frac{d}{m-1}$ geht für m gegen unendlich mindestens gegen $l + 1$.

Betrachten wir noch einmal den Spezialfall $l = 4$ und $m = 4$ von oben. Wir wollen jetzt $s = 1$ betrachten. Abzählen der Restpunkte liefert uns, dass auch das System $\mathfrak{L}_{18}(4^{16})$ nicht leer ist. Wenn wir aber jetzt mit einer Geraden versuchen ein weiteres System $\mathfrak{L}_D(4)$ abzuschneiden, so ist dieses System nach Satz 3.16 speziell, da immer mindestens 5 Punkte auf einer waagerechten Geraden liegen.

Vergössern wir d , um zum Beispiel folgende Gerade noch hinzufügen zu können, so erhalten wir $\frac{d}{m-1} = \frac{5m}{m-1}$ und dies geht für m gegen unendlich gegen $5 = l + 1$.



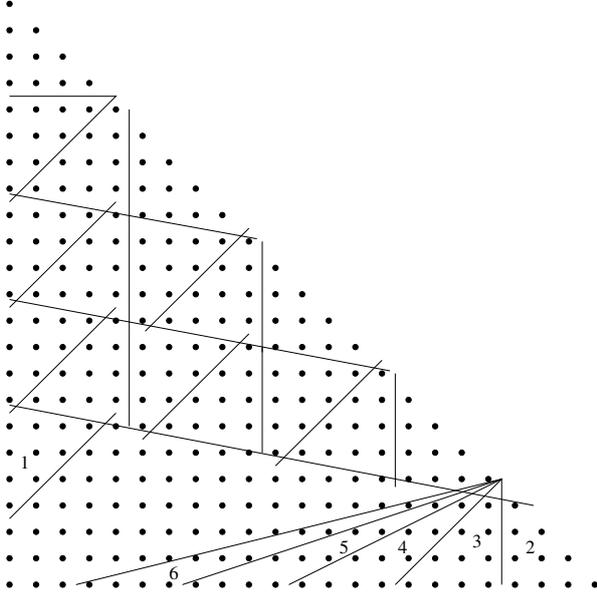
Die letzte Konstruktion führt uns zu folgendem, ebenfalls bekannten, Satz:

Satz 3.20: Sei $l \in \mathbb{N}_{>3}$ und $r \in I_{l+2}$, dann gilt für $n = l^2 + r$:

$$\varepsilon(H, x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{l+1}$$

Beweis. Seien $l \in \mathbb{N}_{>3}$ und $r \in I_{l+2}$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}_+$ das allgemeine System $\mathfrak{L}_{(l+1)m+l-1}(m^n)$ nicht leer und nicht speziell ist. Denn dann wissen wir mit Satz 2.32, dass mit $a := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m-1}{(l+1)m+l-1} = \frac{1}{l+1}$ der Divisor $H - a\sqrt{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^n E_j$ auf $\text{Bl}_n(\mathbb{P}^2)$ nef ist, also $\varepsilon(H, x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{l+1}$ gilt.

Um die Nichtspeziellheit von $\mathfrak{L}_{(l+1)m+l-1}(m^n)$ zu zeigen betrachten wir folgende Konstruktion, hier für $l = 4$ und $m = 4$ dargestellt:



Die Vorgehensweise ist dabei genau wie im Beweis von Satz 3.19. Zuerst schneiden wir genau wie dort l^2 Dreiecke ab. Um die Nichtspeziellheit des verbleibenden Systems $\mathfrak{L}_D(m^r)$ zu erhalten, nutzen wir die ersten r der nummerierten Dreiecke. Genau wie im Beweis zu Satz 3.19 liefert uns dies, dass das allgemeine System $\mathfrak{L}_{(l+1)m+l-1}(m^n)$ einem verallgemeinerten Reduktionsalgorithmus zulässt, also nicht speziell ist. Da ausserdem nach dem Abschneiden noch Punkte verbleiben, ist es auch nichtleer.

Diese Konstruktion funktioniert für alle $l \in \mathbb{N}_{>3}$ und $m \in \mathbb{N}_+$, da die Geraden, die die nummerierten Dreiecke abschneiden, jeweils konstante ganzzahlige Steigung in Richtung y haben. Wir besprechen diese Tatsache ausführlich in Kapitel 3.6. Ausserdem erreichen wir immer $l+2$ solcher Dreiecke, da wir immer das Dreieck 1 haben, und dann $l+1$ weitere Dreiecke, da mehr als $(l+1)m$ Punkte mit $y = 0$ existieren. \square

3.5 Implementierung

Der Algorithmus 3.9 ist computerimplementierbar. Daher liegt es nahe ein Programm zu schreiben, um zu schauen, welche Ergebnisse dieses Programm liefert, und, mit etwas Glück, dadurch neue Muster zu erkennen. Für diese Implementierung erscheint das Durchprobieren aller geeignet großen Teilmengen nicht als effektiv, so dass es naheliegt, Satz 3.18 derart anzuwenden, dass die herausgeschnittenen Punkte Satz 3.17 erfüllen. Leider stellt sich heraus, dass auch dann die Laufzeit bei interessanten Systemen immer noch zu groß ist.

Da in unserem Fall vor allem die Nichtspeziellheit von Systemen der Form $\mathcal{L}_d(m^n)$, mit $d, m, n \in \mathbb{N}$, benötigt wird, beschränkt sich die Implementierung auf solche Systeme. Desweiteren beschränkt sie sich der Einfachheit halber auf die Implementierung von 3.9 mit den Sätzen 3.17 und 3.18.

Trotz der extrem langen Laufzeiten in den „interessanten“ Fällen, kann man versuchen, sich von „kleinen“ Systemen alle Möglichkeiten ausgeben zu lassen, und dann nach einen verwertbaren Muster zu suchen. Leider gibt es bei kleinen Systemen Tausende von möglichen Reduktionen, die 3.9 erfüllen.

Die wichtigsten Funktionen des entstandenen Programms arbeiten wie folgt:

Die Hauptfunktion „next_cut()“ ist eine rekursiv arbeitende Funktion, der jeweils das maximale und das minimale x übergeben wird, für das es in D einen Punkt (x_{min}, y) beziehungsweise (x_{max}, y) gibt. Ausserdem wird für jedes $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ das minimale und maximale $y[x]$ mit $(x, y_{min}[x]), (x, y_{max}[x]) \in D$ übergeben. Als letzter Parameter, „step“, wird die Rekursionstiefe übergeben. Die Funktion überprüft zuerst, ob die benötigte Rekursionstiefe, „Anzahl_Schnitte“, erreicht ist, falls ja, werden die gefundenen Geraden gespeichert. Andernfalls iteriert die Funktion über die x -Werte der Punkte in D . In dieser Schleife wird zuerst die senkrechte Gerade durch $(x + 0.5, 0)$ und $(x + 0.5, 1)$ auf Eignung für ein Abschneiden nach 3.9 mit Satz 3.17 und 3.18 geprüft. Falls sich diese Gerade eignet, wird next_cut() mit dem reduzierten System und erhöhtem Tiefenzähler aufgerufen. Danach wird für das gegebenen x über alle Punkte der Form $(x, y) \in D$ iteriert. Hier wird dann zuerst die waagerechte Gerade durch $(0, y + 0.5)$ und $(1, y + 0.5)$ geprüft, und dann für alle anderen Punkte $(x_c, y_c) \in D$ die Gerade durch $(x + 0.5, y)$ und $(x_c, y_c + 0.5)$. In beiden Fällen wird, falls sich die Gerade eignet, next_cut() mit dem reduzierten System und erhöhtem Tiefenzähler aufgerufen.

Dabei ist zu beachten, dass wir nicht abbrechen, falls wir eine geeignete Gerade gefunden haben, sondern auf jeden Fall alle Geraden nach und nach durchprobieren. In Pseudocode erhalten wir folgende Beschreibung:

Prozedur `next_cut(x_min, x_max, y_min[.], y_max[.], step)`

```

Data : Anzahl_Schnitte
if step == Anzahl_Schnitte then
    speichere_geraden();
    return;
end
for (x=x_min; x ≤ x_max; x++) do
    Prüfe Gerade durch  $(x + 0.5, 0)$  und  $(x + 0.5, 1)$ ;
    if Schnitt ok then
        next_cut("System ohne abgeschnittene Punkte", step+1);
    end
    for (y=y_min[x]; y ≤ y_max[x]; y++) do
        Prüfe Gerade durch  $(0, y + 0.5)$  und  $(1, y + 0.5)$ ;
        if Schnitt ok then
            next_cut("System ohne abgeschnittene Punkte", step+1);
        end
        for (x_c= x_min; x_c ≤ x_max; x_c++) do
            for (y_c= y_min[x_c]; y_c ≤ y_max[x_c]; y_c++) do
                Prüfe Gerade durch  $(x + 0.5, y)$  und  $(x_c, y_c + 0.5)$ ;
                if Schnitt ok then
                    next_cut("System ohne abgeschnittene Punkte", step+1);
                end
            end
        end
    end
end

```

Dabei besteht der Punkt "Prüfe Gerade durch (a_1, a_2) und (b_1, b_2) " aus zwei Aufrufen der Funktion `rmatrix_cut()`. Diese Funktion erhält als ersten Parameter „*sgn*“ übergeben. Dieser kann -1 oder 1 sein, und zeigt an, ob alle Punkte oberhalb oder unterhalb der Geraden abgeschnitten werden sollen. Daher ergeben sich die zwei Aufrufe. Desweiteren werden der Funktion zwei Punkte, durch die die Gerade geht als a_1, a_2, b_1 und b_2 sowie D genau wie bei `next_cut()` übergeben.

`rmatrix_cut()` geht alle x Werte zwischen x_{min} und x_{max} durch, berechnet den Schnittpunkt der senkrechten Geraden durch x mit der Geraden durch (a_1, a_2) und (b_1, b_2) , und schneidet alle Punkte oberhalb, bzw. unterhalb ab. Im Spezialfall, wenn die Abschneidegerade auch senkrecht ist, werden, je nachdem ob x links oder rechts der Abschneidegeraden liegt, abhängig von *sgn*, alle Punkte mit erster Koordinate gleich x aus D entfernt.

Dabei nutzen wir aus, dass die Gerade durch die Punkte $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ gleich $V((x - a_1)(b_2 - a_2) - (y - a_2)(b_1 - a_1))$ ist: Die Gerade ist gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{pmatrix}$$

Für $b_1 = a_1$ oder $b_2 = a_2$ ist die Behauptung klar. Anderfalls gilt für

$(x, y) \in \varphi(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ a_2 + t(b_2 - a_2) \end{pmatrix}$, also $\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = t = \frac{y-a_2}{b_2-a_2}$, und somit

$0 = (x - a_1)(b_2 - a_2) - (y - a_2)(b_1 - a_1)$. Da wir hier nur Äquivalenzumformungen verwendet haben, gilt also $V((x - a_1)(b_2 - a_2) - (y - a_2)(b_1 - a_1)) = \varphi(\mathbb{C})$.

Beim Abschneiden wird die Anzahl der entfernten Punkte gezählt. Sind alle Punkte entfernt, und stimmt die Anzahl der entfernten Punkte mit der in `rmatrix_cut()` als „Anzahl_abzuschneidender_Punkte“ hinterlegten Anzahl überein, werden die entfernten Punkte und das zu entfernende Gewicht, das der Funktion als „zu_entfernendes_Gewicht“ bekannt ist – in unserem Anwendungsfall ist dies immer m , da wir Systeme der Form $\mathcal{S}_d(m^n)$ betrachten – an eine weitere Funktion `cut_out_test()` übergeben, welche mittels Satz 3.17 die Nichtspeziellheit des abgeschnittenen Systems überprüft.

Prozedur `rmatrix_cut(sgn, a1, a2, b1, b2, x_min, x_max, y_min[.], y_max[.]`

```

Data : Anzahl_abzuschneidender_Punkte, zu_entfernendes_Gewicht
for (x=x_min; x ≤ x_max; x++) do
  if b1 == a1 then
    /* Senkrechte Gerade */
    if sgn*((x - a1) * (b2 - a2) - (1 - a2) * (b1 - a1)) < 0 then
      Entferne alle Punkte mit erster Koordinate = x;
    end
  else
    /* Berechne den Punkt auf der Geraden mit erster Koordinate = x, dann Runde ab */
    y = (int) ((x - a1) * (b2 - a2) / (b1 - a1) + a2);
    if sgn*((x - a1) * (b2 - a2) - (y - a2) * (b1 - a1)) < 0 then
      /* Abschneiden unterhalb */
      Entferne alle Punkte mit erster Koordinate = x, und zweiter ≤ y;
    else
      /* Abschneiden oberhalb */
      Entferne alle Punkte mit erster Koordinate = x, und zweiter ≥ y;
    end
  end
  if Anzahl_entfernter_Punkte > Anzahl_abzuschneidender_Punkte then
    return FALSE;
  end
end
if Anzahl_entfernter_Punkte == Anzahl_abzuschneidender_Punkte then
  return cut_out_test(Entfernte_Punkte, zu_entfernendes_Gewicht)
else
  return FALSE;
end

```

Die Funktion `cut_out_test()` testet rekursiv durch Iteration über alle Punkte in „Punkte“, alle möglichen Geradenkonfigurationen auf den Punkten auf ihre Eignung für Satz 3.17. Dabei wird in jedem Rekursionsschritt eine Gerade gesucht, auf der genau „num_points“

Punkte liegen. Um dies zu erreichen, iteriert die Funktion über alle Paare von je zwei Punkten aus *Punkte*, und berechnet wieviele Punkte aus *Punkte* auf dieser Geraden liegen. Sind es genau *num_points* Punkte, so wird *cut_out_test()* mit den verbleibenden Punkten, und um eins verringerten *num_points* erneut aufgerufen.

Prozedur *cut_out_test(Punkte, num_points)*

```

if num_points == 1 then
  if #Punkte == 1 then
    return TRUE;
  else
    return FALSE;
  end
end
for (x=0; x ≤ Punkte.x_max; x++) do
  for (y=0; y ≤ Punkte.y_max; y++) do
    if (x,y) ∉ Punkte then
      continue;
    end
    for (x_c=0; x_c ≤ Punkte.x_max; x_c++) do
      for (y_c=0; y_c ≤ Punkte.y_max; y_c++) do
        if (x_c,y_c) ∉ Punkte then
          continue;
        end
        if Genau num_points aus "Punkte" liegen auf der Geraden durch (x,y) und
        (x_c,y_c) then
          if cut_out_test(Punkte ohne Gerade, num_points-1) then
            return TRUE;
          end
        end
      end
    end
  end
end
end

```

Bei Programmstart erstellt das Programm eine Datei mit deren Hilfe später die Punkte gezeichnet werden. Hat das Programm eine Lösung gefunden, so erzeugt es eine Datei, die zeilenweise je zwei Randpunkte der Geraden enthält. Aus diesen beiden Dateien lassen sich mittels eines kurzen shell-skriptes und gnuplot Zeichnungen in allen Formaten erstellen, die gnuplot beherrscht. Beispiele folgen am Ende dieses Kapitels.

Der tatsächliche Sourcecode beinhaltet derzeit etwa 1.300 Zeilen. Enthalten sind Kommentare und einige Sonderfunktionen, die sich im Laufe der Arbeit ergeben haben. So ist es zum Beispiel möglich, gewisse Geraden zum Abschneiden vorzugeben.

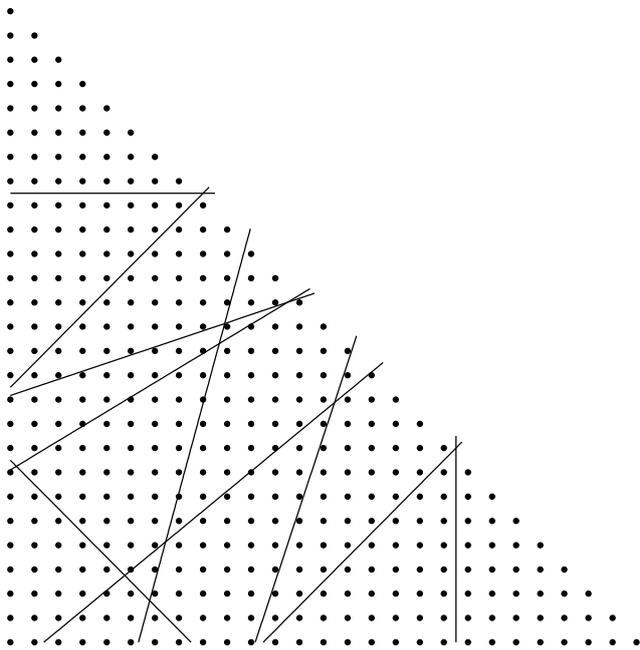
Hier einige Beispielllaufzeiten bis zur Bestimmung des ersten Reduktionsalgorithmuses. Das Programm wurde kompiliert mit gcc 4.1.2, Optimierung '-O3', und lief auf einem AMD Sempron 3400+. Dabei ist die beschränkende Komponente die Rechenleistung, da der Speicherbedarf des Programms bei dieser Aufgabenstellung verschwindend gering ist. Die Laufzeiten verstehen sich nicht als Benchmark unter Laborbedingungen, sondern sollen lediglich die Schwierigkeit des Problems illustrieren. Gemessen wurde die Laufzeit mittels des Shell-Befehls „time“, die Ausgabe ist im Format „Stunden:Minuten:Sekunden“, wobei die Sekunden auf drei Nachkommastellen genau ausgegeben werden, und führende Nullen teilweise weggelassen werden. Für $\mathcal{S}_{d_0(m^n)}(m^n)$ ist das Problem sehr schwer, und es ist nicht klar, ob das Programm schon für $n = 10$ und $m = 2$ überhaupt erfolgreich terminiert. Daher betrachten wir hier $\mathcal{S}_{d_0(m^n)+1}(m^n)$:

		$n = 10$		$n = 11$		$n = 12$	
m	d	Zeit		d	Zeit	d	Zeit
2	8	0.020		8	0.003	8	0.027
3	11	0.008		11	0.025	12	0.010
4	14	0.289		15	0.028	15	17.963
5	17	1.472		18	0.626	19	0.266
6	20	1 : 45 : 58.27		21	66 : 57 : 54.2(*)	22	10 : 47.77
7	24	2 : 46.60		25	9 : 37.00	26	34 : 15.48
8	27	19 : 13 : 00.26		28	5 : 21 : 42.58	29	203 : 54 : 09.87(*)
9	30	139 : 03 : 59.7(*)		31	144 : 26 : 23.9(*)	33	146 : 06 : 09.53(*)
		$n = 13$					
m	d	Zeit					
2	9	0.041					
3	12	0.010					
4	16	0.036					
5	20	0.119					
6	23	12.980					
7	27	1 : 46 : 31.40					
8	31	39 : 00 : 05.35					
9	34	153 : 35 : 33.56(*)					

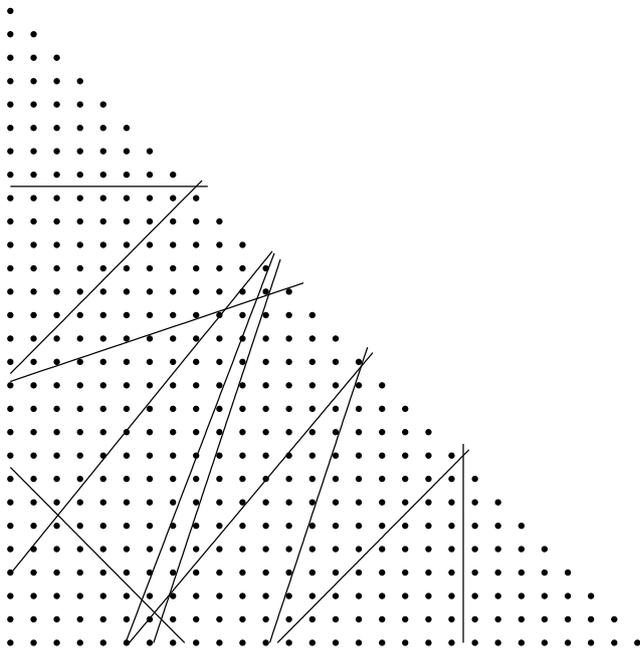
(*): Abgebrochen.

Wie oben erwähnt, erzeugt das Programm für jeden gefundenen Reduktionsalgorithmus Dateien, mit deren Hilfe sich die Geraden, mit denen abgeschnitten wird, graphisch darstellen lassen. Wir betrachten als Beispiele für jedes n die Zeichnung für das grösste m , für das es einen erfolgreich beendeten Programmlauf gab. Diese Zeichnungen geben einen Reduktionsalgorithmus vor, der, für die jeweiligen n , m und d , die Nichtspeziellheit von $\mathcal{L}_d(m^n)$ zeigt. Die Interpretation dieser Zeichnungen wollen wir anschliessend am Beispiel der ersten Zeichnung erläutern.

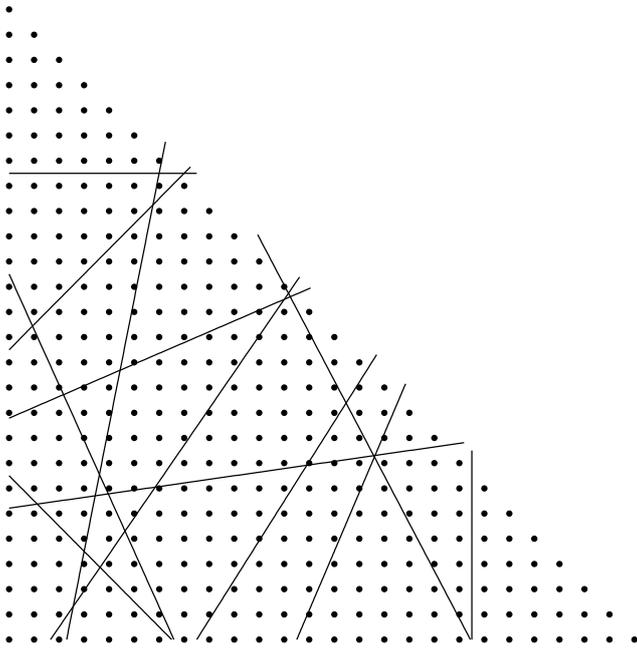
$n = 10, m = 8, d = 27$:



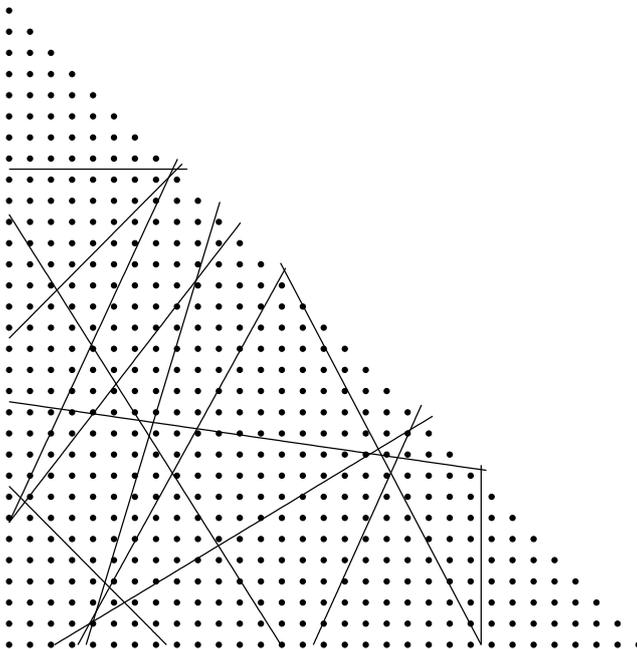
$n = 11, m = 8, d = 28$:



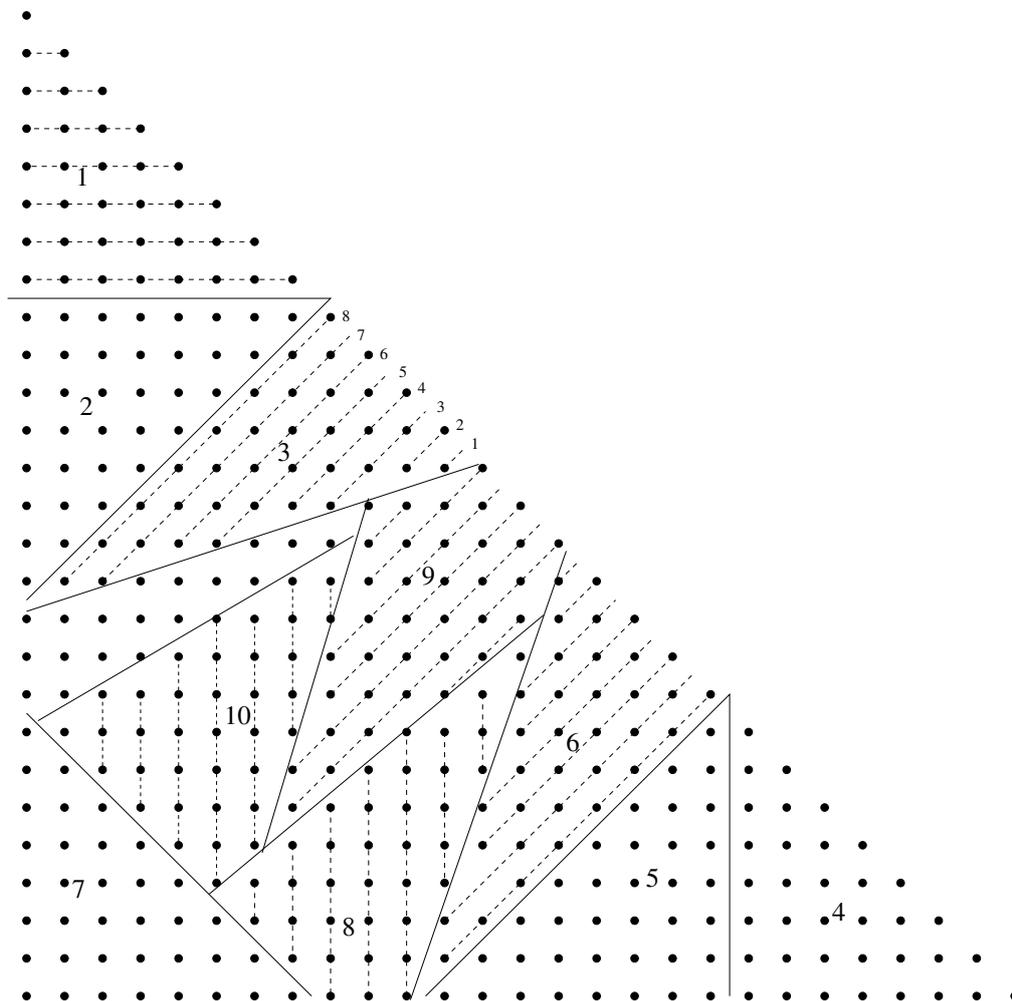
$n = 12, m = 7, d = 26$:



$n = 13, m = 8, d = 31$:



Interpretation am Beispiel $n = 10$, $m = 8$, $d = 27$:



Die groß gedruckten Zahlen bezeichnen dabei die Reihenfolge der Schnitte. Diese ist allerdings nicht eindeutig. Eindeutig ist die Reihenfolge von 1, 2, 3 sowie 4, 5, 6, ob aber zuerst 1, 2, 3 dann 4, 5, 6 und dann 7 abgeschnitten wird oder in einer anderen Reihenfolge ist egal. Nur die letzten drei Schnitte sind eindeutig. Dies erkennt man, indem man die Anzahl der abgeschnittenen Punkte in verschiedenen Reihenfolgen bestimmt, denn die hier betrachteten Systeme haben alle eine virtuelle Dimension von mindestens -1 , also müssen, nach Bemerkung 3.14, bei jedem Schnitt genau $\binom{m+1}{2}$ Punkte abgeschnitten werden.

Zur besseren Übersichtlichkeit sind die Geraden in diesem Bild nur so lang wie nötig. Die gestrichelten Geraden sind die Geraden, die mit Satz 3.17 die Nichtspeziellheit des abgeschnittenen Systems liefern.

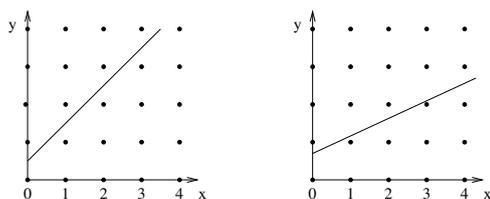
Die anderen Zeichnungen lassen sich ähnlich interpretieren. Theoretisch wäre es auch möglich, ähnliche Zeichnungen direkt aus dem Programm heraus zu erstellen, aber der nötige Aufwand war, für diese Arbeit, unverhältnismässig hoch.

3.6 Probleme des Verfahrens

In diesem Unterkapitel soll kurz dargelegt werden, warum es für eine Nichtquadratzahl $n \in \mathbb{N}$ so schwierig ist, eine Konstruktion zu finden, die für eine ganze Folge (d_i, m_i) mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_i}{m_i} = \sqrt{n}$ die Nichtspeziellheit von $\mathfrak{L}_{d_i}(m_i^n)$ zeigt.

Betrachten wir noch einmal das obige Beispiel. Man sieht schnell ein, dass die Schnitte 1 bis 7 für jedes $m \in \mathbb{N}$ und hinreichend großes d möglich sind. Woran liegt das? Um dies genau zu begründen müssen wir für unsere Abschneidegeraden einen neuen Steigungsbegriff definieren. Dabei geht es darum, auszudrücken, wieviele Punkte die Gerade mehr abschneidet, wenn man von $x \in \mathbb{Z}$ nach $x + 1$ übergeht.

Betrachten wir die folgenden beiden Geraden:



Nehmen wir einmal an, die Gerade schneidet die Punkte, die unter ihr liegen, ab. Dann schneidet die linke Gerade bei $x = 0$ einen Punkt ab, bei $x = 1$ zwei Punkte, also erhöht sich bei diesem Schritt die Anzahl der abgeschnittenen Punkte um eins. Bei der linken Geraden gilt immer: Sobald wir von einem natürlichen Punkt auf der x -Achse zu seinem Nachfolger übergehen, schneidet die Gerade einen Punkt mehr ab. Bei der rechten Geraden ist dies anders. Zwar wird bei $x = 1$ ein Punkt mehr abgeschnitten als bei $x = 0$, aber bei $x = 2$ werden genauso viele Punkte abgeschnitten wie bei $x = 1$.

Wir wollen jetzt die gerade bemerkten Tatsachen in dem Begriff der „ganzzahlige Steigung“ formalisieren. Wenn wir die Gerade als Graph einer Funktion $f(x)$ sehen können, wollen wir wissen um wieviele Punkte höher der Graph von f in \mathbb{R}^2 durch das Gitter \mathbb{Z}^2 geht, wenn wir im Gitter eine Spalte nach rechts gehen. Wir können die Gerade aber gegebenenfalls auch als Graph einer Funktion $g(y)$ sehen, und dann die Frage stellen, was passiert, wenn wir im Gitter um einer Zeile nach oben gehen. So erhalten wir zwei analoge Begriffe. Im ersten Fall die ganzzahlige Steigung in Richtung x , und im zweiten Fall in Richtung y .

Definition 3.21: Sei $H \subset \mathbb{R}^2$ ein Gerade, die ohne Vertauschen der Koordinaten, als Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist. Weiter sei $a \in \mathbb{Z}$. Wir definieren:

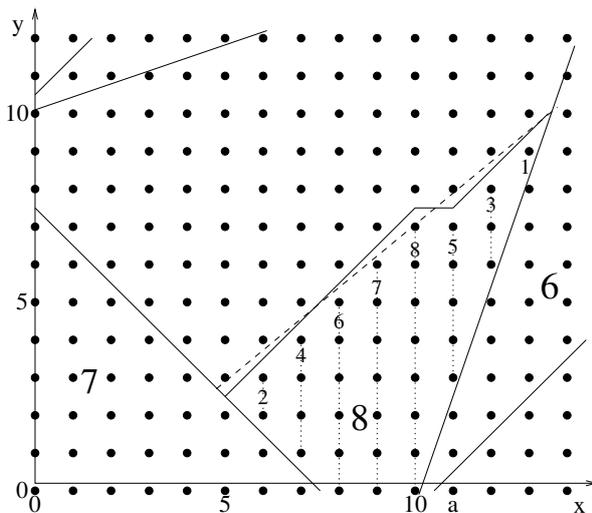
$$sx_a(H) := \lfloor f(a) \rfloor - \lfloor f(a - 1) \rfloor$$

Völlig analog definieren wir $sy_a(H)$, falls h nach Vertauschen der Koordinaten, als Graph einer Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist. Wir nennen diese Zahlen *ganzzahlige Steigung in Richtung x (y) im Punkt $x = a$ ($y = a$)*.

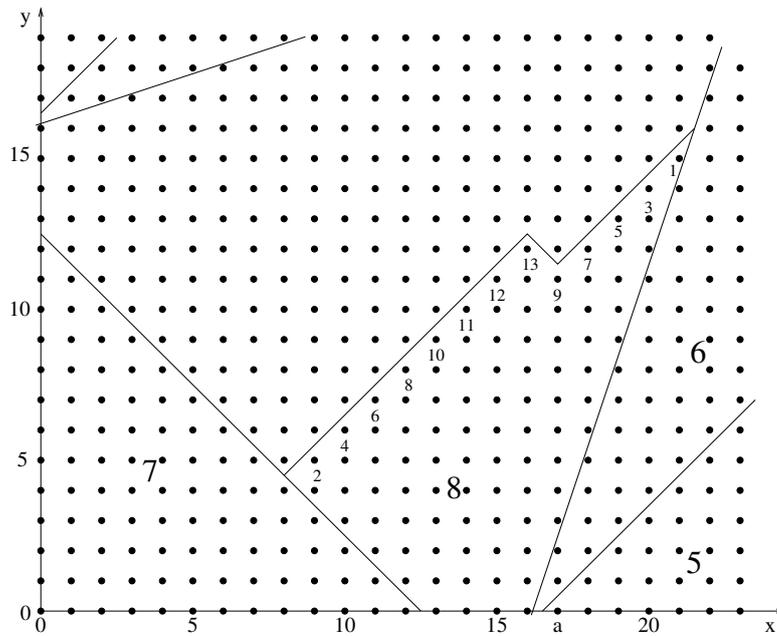
Zur besseren Unterscheidung sprechen wir jetzt, wenn wir die übliche Steigung meinen, von der „reellen Steigung“. In unserem obigen Beispiel hat die linke Gerade für alle ganzen Zahlen eine ganzzahlige Steigung in Richtung x von 1, d.h. die ganzzahlige Steigung der Geraden ist konstant, und entspricht der reellen Steigung. Die rechte Gerade hat für alle geraden Zahlen eine ganzzahlige Steigung in Richtung x von 0, und für alle ungeraden von 1.

In unserem obigen Beispiel stellen wir dann fest, dass bei den Schnitten 1 bis 7 die ganzzahlige Steigung der Geraden in einerer Richtung konstant ist. In diesem Fall kann man einfach mit einer geeignet verschobenen Geraden mit reeller Steigung gleich ganzzahliger Steigung abschneiden. Weiter stellen wir fest, dass die Gerade von Schnitt 8 zuerst eine ganzzahlige Steigung in Richtung x von 1 hat, für $x = 11$ verschwindet die ganzzahlige Steigung in Richtung x , und für alle grösseren x ist sie wieder gleich 1. Bei Geraden, deren ganzzahlige Steigung nicht konstant ist, muss dann für jeden Fall neu überprüft werden, ob eine Gerade existiert, die geeignet abschneidet. Wir werden dies später an einem weiteren Beispiel verdeutlichen.

Bei dieser Geraden von Schnitt 8 kommt ein weiteres Problem zum Vorschein. Betrachten wir den folgenden Zeichnungsausschnitt, wobei wir die Gerade hier sowohl im Original (gestrichelt), als auch als Komposition von mehreren Geraden mit reeller Steigung gleich ganzzahliger Steigung darstellen. Desweiter sind die für Satz 3.17 benötigten Geraden punktiert eingezeichnet.

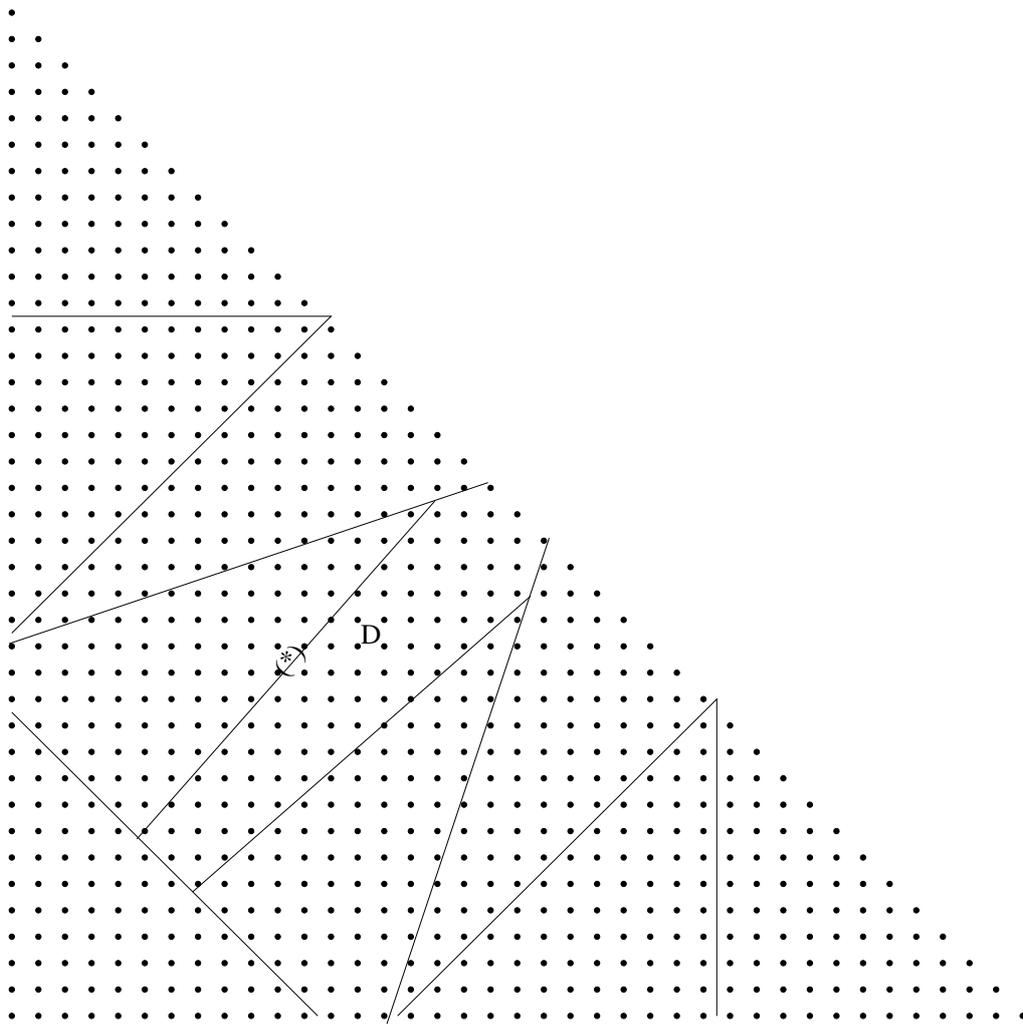


In Dreieck 8 liegen genau drei Punkte mit $y = 0$, und dies ist genau die Steigung der Geraden von Schnitt 6. Deswegen hat die Gerade von Schnitt 8 an der Stelle a , wobei in unserem Beispiel $a = 11$ gilt, eine ganzzahlige Steigung in Richtung x von 0. Ist die Anzahl der Punkte mit $y = 0$ grösser als 3 und wollen wir ebenfalls mit der gefundenen Geradenkonfiguration für Satz 3.17 arbeiten, so müsste die Gerade von Schnitt 8 an dieser Stelle negative ganzzahlige Steigung haben, wie wir am Beispiel $m = 13$ erkennen:



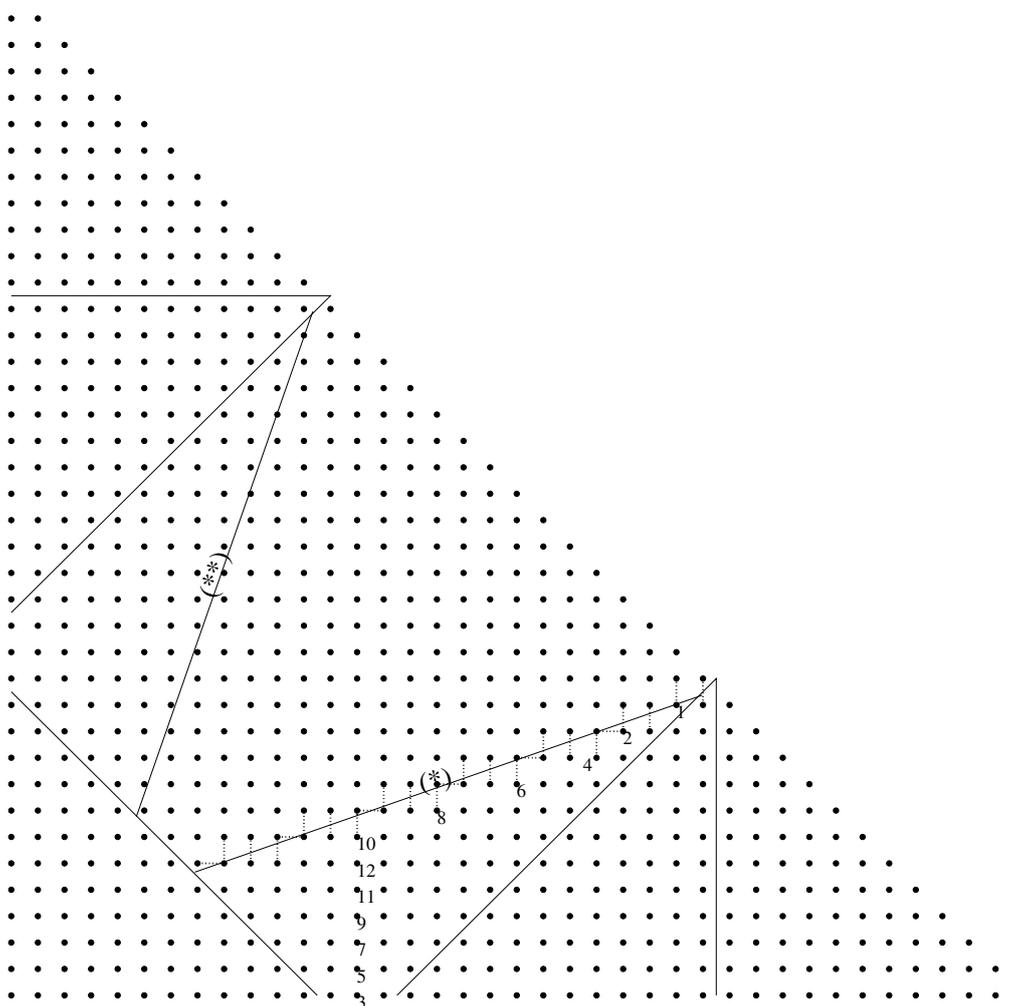
Dies ist aber nicht möglich, da die Gerade für $x < a$ echt positive ganzzahlige Steigung in Richtung x hat, also auch die reelle Steigung der Geraden echt positiv sein muss. Um negative ganzzahlige Steigung zu erreichen, müsste jetzt die reelle Steigung der Geraden echt negativ sein, ein Widerspruch.

Durch Ausrechnen erhalten wir, dass für $n = 10$ das letzte m , das die Bedingung an die Anzahl der Punkt mit $y = 0$ erfüllt, $m = 12$ ist. Unter Ausnutzung der Symmetrie erhalten wir dann:



Allerdings ist das entstehende Restsystem $\mathcal{S}_D(12)$ speziell. Dies ist ein weiteres Problem: wenn man ungünstig abschneidet, erhält man ein spezielles Restsystem. In diesem Fall reicht es die mit (*) bezeichnete Gerade wegzulassen, um ein nicht spezielles Restsystem $\mathcal{S}_{\tilde{D}}(12^2)$ zu erhalten. Beide Aussagen kann man mittels der in Kapitel 5.1 vorgestellten Methode problemlos beweisen.

Ein weiteres Beispiel ist folgende Konstruktion:



Auch hier sind wieder die mit (*) und (**) bezeichneten Geraden das Problem. Betrachten wir diejenigen Punkte mit $y = 0$, die verbleiben, nachdem wir mit den anderen Geraden abgeschnitten haben, und bezeichnen wir ihre Anzahl mit r . Das Konstruktionsprinzip der Geraden (*), beziehungsweise der Geraden, die wir für Satz 3.17 brauchen, um die Nichtspeziellheit des abgeschnittenen System zu zeigen, ist dann folgendes:

Wir konstruieren, von unten nach oben, waagerechte Geraden, die eine gewisse Anzahl von Punkte enthalten.

Ist $m \neq r \pmod{2}$, so erhalten wir zuerst, angefangen mit den Punkten mit $y = 0$, alle Geraden mit $r, r + 2, \dots, m - 1$ Punkten. Als nächstes erhalten wird jetzt die Gerade mit m Punkten, und anschliessend alle Geraden mit $m - 2, \dots, r - 1$ Punkten. Abschliessend erhalten wir die Geraden mit $r - 2, \dots, 1$ Punkten.

Für $m = r \bmod 2$ erhalten wir zuerst die Geraden mit $r, r + 2, \dots, m$ Punkten, dann mit $m - 1, \dots, r - 1$ und abschliessend mit $r - 2, \dots, 1$ Punkten.

In beiden Fällen hat für $r > 1$ die mit (*) bezeichnete Gerade nichtkonstante ganzzahlige Steigung in Richtung x . In unserem Beispiel ist diese von $x = 5$ bis $x = 10$ gleich 3, für $x = 11$ ist sie aber 2.

Führt man die Konstruktion für ein gegebenes m durch, so erhält man gewisse „Intervalle“, durch die die Gerade gehen muss. In unserem Beispiel sind diese mit punktierten Linien markiert. Man kann jetzt rechnerisch überprüfen, ob es eine Gerade gibt, die durch diese „Intervalle“ geht. Diese Rechnung zeigt, dass entweder $m \leq 12$ gelten muss, oder d ungefähr $4m$ ist.

Wir sehen also, dass der Beweis der Nichtspeziellheit einer ganzen Folge (d_i, m_i) nur dann einfach ist, wenn wir möglichst viele Schnitte durch Geraden mit konstanter ganzzahliger Steigung finden. Dabei ist es allerdings egal, ob diese in x - oder in y -Richtung konstant ist. Auch der Beweis von Satz 3.19 beruht auf diesem Prinzip. Allerdings scheint dies für Folgen mit $\frac{d_i}{m_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sqrt{n}$, wobei n keine Quadratzahl ist, sehr schwierig zu sein.

Wir versuchen also für bestimmte Nichtquadratzahlen $n \in \mathbb{N}$ eine Abschätzung nach unten an die Seshadri-Konstante $\varepsilon(H; x_1, \dots, x_n)$ zu erhalten. Wir können dazu eine Folge (d_i, m_i) mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_i}{m_i} > \sqrt{n}$ suchen, aber auch dann haben wir bei interessanten Folgen wieder das Problem, dass wir für alle i , oder zumindest für unendlich viele, die Nichtspeziellheit zeigen müssen. Einfacher scheint es zu sein Lemma 2.35 anzuwenden. Danach reicht es, d und m geeignet zu finden, so dass wir mit den dargestellten Methoden die Nichtspeziellheit zeigen können.

Dabei ist bekannt, dass, mit l, n wie oben, $\varepsilon(H, x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{l+1}$ gilt. Dies haben wir für bestimmte n auch schon in Satz 3.20 gesehen. Ausserdem liefert uns [Dum06], dass die Harbourne-Hirschowitz-Vermutung (Vermutung 2.19) für Systeme der Form $\mathcal{L}_d(m^n)$ mit $m \leq 42, d, n \in \mathbb{N}_+$ gilt. Daraus ergeben sich folgende Abschätzungen an $\varepsilon(H, x_1, \dots, x_n)$,

wobei jetzt x_1, \dots, x_n allgemeine Punkte sind:

n	d	m	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	n	d	m	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$
10	133	41	0.308271	3.243902	21	189	40	0.211640	4.725000
11	133	39	0.293233	3.410256	22	198	41	0.207071	4.829268
12	146	41	0.280822	3.560976	23	188	38	0.202128	4.947368
13	152	41	0.269737	3.707317	24				
14	154	40	0.259740	3.850000	25				
15					26	205	39	0.190244	5.256410
16					27	209	39	0.186603	5.358974
17	174	41	0.235632	4.243902	28	213	39	0.183099	5.461538
18	179	41	0.229050	4.365854	29	222	40	0.180180	5.550000
19	184	41	0.222826	4.487805	30	226	40	0.176991	5.650000
20	189	41	0.216931	4.609756	31	224	39	0.174107	5.743590

Wir könnten also $m > 42$ und $d \in \mathbb{N}$ suchen, um zum Beispiel die Schranke für $n = 10$ zu verbessern. Leider stellt sich heraus, dass ein Programm, das 3.9 implementiert, schon für das System $\mathfrak{L}_{134}(41^{10})$ nach mehreren Wochen noch keinen Reduktionsalgorithmus gefunden hat.

4 Cremonatransformationen

Definition 4.1: Eine *Cremonatransformation* ist eine birationale Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

Satz 4.2: Jede Cremonatransformation ist eine endliche Folge von Auf- und Niederbläsungen, insbesondere hat sie nur endlich viele exzeptionelle Punkte.

Beweis. Siehe [Har77], Kapitel V.5. □

Satz & Definition 4.3: Sei $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ eine Cremonatransformation. Dann gibt es eine zariski-offene Teilmenge $\text{Iso}(\varphi) \subset \mathbb{P}^2$, so dass $\varphi|_{\text{Iso}(\varphi)}$ eine bireguläre Abbildung ist.

Beweis. Seien $U, U^{-1} \subset \mathbb{P}^2$ die offenen Teilmengen, die entstehen, wenn man aus \mathbb{P}^2 die exzeptionellen Punkte von φ bzw. φ^{-1} entfernt. Dann ist $\varphi|_U : U \rightarrow \mathbb{P}^2$ eine reguläre Abbildung, also stetig. Also ist $\text{Iso}(\varphi) := (\varphi|_U)^{-1}(U^{-1})$ eine offene Teilmenge von $U \subset \mathbb{P}^2$. Dann ist aber $\varphi|_{\text{Iso}(\varphi)}$ eine reguläre Abbildung, ebenso $(\varphi^{-1})|_{\varphi(\text{Iso}(\varphi))}$, und es gilt $(\varphi^{-1})|_{\varphi(\text{Iso}(\varphi))} \circ \varphi|_{\text{Iso}(\varphi)} = \text{id}_{\text{Iso}(\varphi)}$ und $\varphi|_{\text{Iso}(\varphi)} \circ (\varphi^{-1})|_{\varphi(\text{Iso}(\varphi))} = \text{id}_{\varphi(\text{Iso}(\varphi))}$ □

Betrachten wir jetzt Cremonatransformationen φ der Form

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [F(x_1, x_2, x_3) : G(x_1, x_2, x_3) : H(x_1, x_2, x_3)],$$

wobei F, G und H teilerfremde, homogene Polynome von Grad $d \in \mathbb{N}$ sind. Nach Satz 4.2 ist $V(F, G, H)$ endlich. Wir erhalten dann eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (F(x_1, x_2, x_3), G(x_1, x_2, x_3), H(x_1, x_2, x_3)). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für φ^{-1} , wobei diese jetzt Grad \tilde{d} haben soll, eine Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi^{-1}} : \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (\overline{F}(x_1, x_2, x_3), \overline{G}(x_1, x_2, x_3), \overline{H}(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

mit $(\widetilde{\varphi^{-1}} \circ \tilde{\varphi})(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_2, x_3)$ und $\Phi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d\tilde{d})$. Wir sehen, da $\text{Iso}(\varphi) \subset (\mathbb{C}^3 \setminus V(F)) \cup \mathbb{C}^3 \setminus V(G) \cup \mathbb{C}^3 \setminus V(H)$ gilt: $V(\Phi) \cap \text{Iso}(\varphi) = \emptyset$.

$\tilde{\varphi}$ liefert uns für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(nd) \\ f &\mapsto f \circ \tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

Ist φ^{-1} eine Cremonatransformation, die aus homogenen Polynomen von Grad \tilde{d} besteht, so erhalten wir analog $\varphi_n^{-1} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n\tilde{d})$. Und durch Verkettung erhalten wir, wegen obiger Argumentation:

$$\begin{aligned} \varphi_n \circ \varphi_n^{-1} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n\tilde{d}\tilde{d}) \\ f &\mapsto \Phi \cdot f \end{aligned}$$

Die folgende Definition benötigen wir, um überhaupt entscheiden zu können, ob uns eine Cremonatransformation φ helfen kann:

Definition 4.4: Sei $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich, $d := \max_{\beta \in D} \{|\beta|\}$ und φ eine Cremonatransformation.

Wir sagen $\varphi(D)$ existiert, falls $\varphi_d(\{ \sum_{(\alpha,\beta) \in D} c_{(\alpha,\beta)} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{d-\alpha-\beta} \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \})$ eine Basis

aus Monomen hat. Wir setzen dann $\varphi(D) \subset \mathbb{N}^2$ als die Menge der, nach Dehomogenisierung, zu diesen Monomen gehörenden Exponenten.

Für unsere Anwendung suchen wir Cremonatransformationen φ , für die, für möglichst viele $D \subset \mathbb{N}^2$, $\varphi(D)$ existiert, da wir nur in dem Fall, dass $\varphi(D)$ existiert, die Hoffnung haben können mit unseren Methoden etwas über die (Nicht-)Speziellheit von $\mathfrak{L}_{\varphi(D)}(k_1, \dots, k_m)$ sagen zu können, und daraus möglicherweise auf $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ zurückschliessen zu können.

4.1 Punkte in $\text{Iso}(\varphi)$

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie sich unser Linearsystem $\mathfrak{L}_D(p_1 m_1, \dots, p_n m_n)$ unter einer Cremonatransformation φ verhält, wenn alle Punkte p_1, \dots, p_n in $\text{Iso}(\varphi)$ liegen.

Lemma 4.5: Sei φ eine Cremonatransformation, $p \in \text{Iso}(\varphi)$ und $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\text{mult}_{\varphi^{-1}(p)}(f \circ \tilde{\varphi}) = \text{mult}_p(f)$$

Beweis. Da es uns nur auf Nullstellen ankommt, können wir $p \in \mathbb{C}^3$ betrachten. Sei also $i \in I_3$ beliebig, dann gilt mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) &= \langle \text{grad}(f)(\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(p))), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) \rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \frac{\partial \tilde{\varphi}_3}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) \end{aligned}$$

Durch Iteration sieht man, dass $\text{mult}_{\varphi^{-1}(p)}(f \circ \tilde{\varphi}) \geq \text{mult}_p(f)$ gilt.

Analog sehen wir $\text{mult}_p(\Phi f) = \text{mult}_p(f \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \geq \text{mult}_{\varphi^{-1}(p)}(f \circ \tilde{\varphi})$. Da $\text{Iso}(\varphi)$ und $V(\Phi)$ disjunkt sind, gilt $\Phi(p) \neq 0$, also $\text{mult}_p(f) = \text{mult}_p(\Phi f) \geq \text{mult}_{\varphi^{-1}(p)}(f \circ \tilde{\varphi}) \geq \text{mult}_p(f)$, also gilt Gleichheit. \square

Satz 4.6: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich, $d := \max_{\beta \in D} \{|\beta|\}$ sowie φ eine Cremonatransformation, so dass $\varphi(D)$ und $\varphi^{-1}(\varphi(D))$ existieren. Dann gilt für $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n) \cap \varphi(\mathcal{A}_{\varphi(D)}^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n) \cap \prod_{i=1}^n \text{Iso}(\varphi)) \cap \prod_{i=1}^n \text{Iso}(\varphi)$:

$$\dim(L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) = \dim(L_{\varphi(D)}(m_1 \varphi^{-1}(p_1), \dots, m_n \varphi^{-1}(p_n)))$$

Insbesondere gilt:

$$\dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) = \dim(\mathfrak{L}_{\varphi(D)}(m_1, \dots, m_n))$$

Beweis. Seien

$$(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n) \cap \varphi(\mathcal{A}_{\varphi(D)}^{\mathbb{P}^2}(m_1, \dots, m_n) \cap \prod_{i=1}^n \text{Iso}(\varphi)) \cap \prod_{i=1}^n \text{Iso}(\varphi)$$

und $f \in L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$. Sei weiter $i \in I_n$ beliebig. Lemma 4.5 liefert uns $\text{mult}_{\varphi^{-1}(p_i)}(f \circ \tilde{\varphi}) = \text{mult}_{p_i}(f)$, also $f \circ \tilde{\varphi} \in L_{\varphi(D)}(m_1 \varphi^{-1}(p_1), \dots, m_n \varphi^{-1}(p_n))$.

Mit analoger Argumentation folgt für $g \in L_{\varphi(D)}(m_1 \varphi^{-1}(p_1), \dots, m_n \varphi^{-1}(p_n))$, dass $g \circ \tilde{\varphi}^{-1} \in L_{\varphi^{-1}(\varphi(D))}(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ gilt.

Andererseits gilt aufgrund der oben dargestellten Eigenschaften von $\varphi_n \circ \varphi_n^{-1}$, mit Φ wie dort: $g \circ \varphi^{-1} = \Phi \tilde{g}$. Da für alle $i \in I_n$ der Punkt $p_i \in \text{Iso}(\varphi)$ ist, verschwindet Φ in p_i nicht, also muss \tilde{g} schon in $L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ liegen.

Damit gilt $\dim(L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) = \dim(L_{\varphi(D)}(m_1 \varphi^{-1}(p_1), \dots, m_n \varphi^{-1}(p_n)))$, woraus, wegen der Allgemeinheit von p_1, \dots, p_n , die zweite Aussage folgt. \square

Der letzte Schritt im letzten Beweis gibt Anlass zu folgendem Korollar:

Korollar 4.7: Sei $l, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l)\} =: D \subset \mathbb{N}^2$. Weiter sei $(\min_{i \in I_l} \{\alpha_i\}, \min_{i \in I_l} \{\beta_i\}) =: (d_1, d_2) \neq 0$. Wir definieren

$$\tilde{D} := \{(\alpha_1 - d_1, \beta_1 - d_2), \dots, (\alpha_l - d_1, \beta_l - d_2)\} \subset \mathbb{N}^2.$$

Dann ist $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ genau dann speziell, wenn $\mathfrak{L}_{\tilde{D}}(m_1, \dots, m_n)$ speziell ist.

Beweis. Sei $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D^{(m_1, \dots, m_n)} \cap \mathcal{A}_{\tilde{D}}^{(m_1, \dots, m_n)} \cap \prod_{i=1}^n \mathbb{C}^2 \setminus V(x^{d_1} y^{d_2})$. (p_1, \dots, p_n) existiert, denn der Schnitt ist als Schnitt von nicht leeren Zariski-offenen Mengen nicht leer. Wegen $\#D = \#\tilde{D}$ gilt $\text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_{\tilde{D}}(m_1, \dots, m_n))$. Es reicht

also, wegen der allgemeinen Lage von (p_1, \dots, p_n) , zu zeigen, dass $L_D(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ und $L_{\tilde{D}}(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ entweder beide leer sind, oder eine Bijektion zwischen beiden existiert.

Sei dazu $f \in L_D(m_1p_1, \dots, m_np_n)$. Dann ist $f = x^{d_1}y^{d_2}\tilde{f}$, mit \tilde{f} Polynom mit Exponenten aus \tilde{D} . Wegen $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2 \setminus V(x^{d_1}y^{d_2})$ muss dann aber schon $\tilde{f} \in L_{\tilde{D}}(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ gelten. Wir sehen also, dass wir für $f \in L_D(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ ein $\tilde{f} \in L_{\tilde{D}}(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ erhalten. Analog ergibt sich die umgekehrte Richtung. \square

Die Frage, die sich jetzt stellt, ist: Was kann man mit Cremonatransformationen dieser Art überhaupt erreichen? Die Antwort liefert im wesentlichen dieser Satz:

Satz 4.8: Sei $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich, $d := \max_{\beta \in D} \{|\beta|\}$ und φ eine Cremonatransformation. φ sei auf \mathbb{P}^2 ohne endlich viele Punkte durch

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} : x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3} : x_1^{c_1}x_2^{c_2}x_3^{c_3}]$$

gegeben. Weiter sei

$$A := \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1d \\ c_2d \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N}^2 &\rightarrow \mathbb{N}^2 \\ v &\mapsto Av + c \end{aligned}$$

gilt: $\varphi(D) = \psi(D)$.

Beweis. Sei $(\alpha, \beta) \in D$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{d-\alpha-\beta} \circ \tilde{\varphi} &= (x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3})^\alpha (x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3})^\beta (x_1^{c_1}x_2^{c_2}x_3^{c_3})^{d-\alpha-\beta} \\ &= x_1^{a_1\alpha+b_1\beta+c_1(d-\alpha-\beta)} x_2^{a_2\alpha+b_2\beta+c_2(d-\alpha-\beta)} x_3^{a_3\alpha+b_3\beta+c_3(d-\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

Da φ eine Cremonatransformation ist, gilt $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{i=1}^3 c_i$, wir haben also ein Monom vom Grad $d \sum_{i=1}^3 a_i$, und wegen $d - \alpha - \beta \geq 0$ bildet ψ tatsächlich nach \mathbb{N}^2 ab. Also folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.9: $\varphi(D)$ existiert also in diesem Fall für jedes endliche $D \subset \mathbb{N}^2$.

Wir sehen, dass wir auf diese Art das Problem für unseren Algorithmus nicht vereinfachen, da wir die Punktmenge D nur affin-linear verschieben. Da aber affin-lineare Transformationen Geraden auf Geraden abbilden, ändern sie nichts an der Schwierigkeit für den Computer. Allenfalls für die händische Durchführung kann dies möglicherweise sinnvoll sein, da man dabei vor allem nach Dreiecken sucht die „schön“ sind, z.B. rechtwinklige Dreiecke oder ähnliche Formen, die man schnell sieht.

4.2 Punkte ausserhalb von $\text{Iso}(\varphi)$

Wir können auch noch betrachten, was mit Systemen $L_D(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ passiert, wobei jetzt nicht alle p_i in $\text{Iso}(\varphi)$ liegen sollen. Die Vorgehensweise basiert dabei auf [Fre04].

Als Beispiel wollen wir $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ betrachten, wobei φ auf $\mathbb{P}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ durch

$$\varphi([x_1 : x_2 : x_3]) = [x_2x_3 : x_1x_3 : x_1x_2]$$

gegeben sein soll. φ ist selbstinvers, und durch Nachrechnen sieht man $\text{Iso}(\varphi) = \mathbb{P}^2 \setminus V(xyz)$.

Weiter sollen $d, n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$, sowie m_1, \dots, m_n so gegeben sein, dass $2d > m_1 + m_2 + m_3$ gilt, und $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_{D_d}(m_1, \dots, m_n) \cap \mathcal{A}_{D_{2d-m_1-m_2-m_3}}(m_1, \dots, m_n)$ mit $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$ und $p_3 = [0 : 0 : 1]$ existieren. Dies ist immer möglich, da wir drei beliebige Punkte immer mittels eines Automorphismus ϕ von \mathbb{P}^2 auf die drei „Eckpunkte“ abbilden können, und $\phi(D_d) = D_d$ ist; vergleiche Satz 4.6 und 4.8. Zusätzlich verlangen wir noch $p_4, \dots, p_n \in \text{Iso}(\varphi) = \mathbb{P}^2 \setminus V(xyz)$. Dies ist möglich, da $\mathcal{A}_{D_d}(m_1p_1, m_2p_2, m_3p_3, m_4, \dots, m_n)$ nicht leer ist.

Sei jetzt $f \in L_d(m_1p_1, \dots, m_np_n)$ und $c_{(\alpha,\beta)}x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ ein nichtverschwindender Term von f . Aus $\text{mult}_{[1:0:0]}(f) \geq m_1$ folgt $\beta + \gamma \geq m_1$. Denn, angenommen $\beta + \gamma < m_1$, dann ist $\frac{\partial^{|\alpha,\beta,\gamma|} f}{\partial(x_1, x_2, x_3)^{(\alpha,\beta,\gamma)}}(1, 0, 0) = c_{(\alpha,\beta)} \beta! \gamma! x_1^\alpha |_{(1,0,0)} = c_{(\alpha,\beta)} \beta! \gamma! \neq 0$, aber $|(0, \beta, \gamma)| < m_1$. Analog folgt durch Betrachten der Punkte p_2 und p_3 : $\alpha + \gamma \geq m_2$ und $\alpha + \beta \geq m_3$.

Betrachten wir jetzt $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \circ \tilde{\varphi} = x_1^{\beta+\gamma} x_2^{\alpha+\gamma} x_3^{\alpha+\beta}$. Dies hat, wie am Anfang dieses Kapitels bemerkt, Grad $2d$. Wegen $\beta + \gamma \geq m_1$ können wir $x_1^{m_1}$ ausklammern, und analog $x_2^{m_2}$ sowie $x_3^{m_3}$. Es gilt dann, unter Ausnutzung von $\alpha + \beta + \gamma = d$:

$$\begin{aligned} \text{mult}_{[1:0:0]}(x_1^{\beta+\gamma-m_1} x_2^{\alpha+\gamma-m_2} x_3^{\alpha+\beta-m_3}) &= \alpha + \gamma - m_2 + \alpha + \beta - m_3 = \alpha + d - m_3 - m_2 \\ &\geq d - 1 - m_2 - m_3 \end{aligned}$$

$$\text{mult}_{[0:1:0]}(x_1^{\beta+\gamma-m_1} x_2^{\alpha+\gamma-m_2} x_3^{\alpha+\beta-m_3}) \geq d - m_1 - m_3$$

$$\text{mult}_{[0:0:1]}(x_1^{\beta+\gamma-m_1} x_2^{\alpha+\gamma-m_2} x_3^{\alpha+\beta-m_3}) \geq d - m_1 - m_2$$

Ausserdem gilt:

$$\deg(x_1^{\beta+\gamma-m_1} x_2^{\alpha+\gamma-m_2} x_3^{\alpha+\beta-m_3}) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - m_1 - m_2 - m_3 = 2d - m_1 - m_2 - m_3$$

Also, da $c_{(\alpha,\beta)} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ beliebig war: $f \circ \tilde{\varphi} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \tilde{f}$. Und nach unseren obigen Überlegungen, Lemma 4.5 und $V(x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}) \cap \text{Iso}(\varphi) = \emptyset$ gilt:

$$\text{mult}_{p_1}(\tilde{f}) \geq d - m_2 - m_3$$

$$\text{mult}_{p_2}(\tilde{f}) \geq d - m_1 - m_3$$

$$\text{mult}_{p_3}(\tilde{f}) \geq d - m_1 - m_2$$

$$\forall i \in I_n, i > 3 \quad \text{mult}_{\varphi^{-1}(p_i)}(\tilde{f}) = \text{mult}_{p_i}(f)$$

und damit:

$$\tilde{f} \in L_{2d-m_1-m_2-m_3}((d-m_2-m_3)p_1, (d-m_1-m_3)p_2, (d-m_1-m_2)p_3, m_4\varphi^{-1}(p_4), \dots, m_n\varphi^{-1}(p_n)).$$

Sei andererseits

$$g \in L_{2d-m_1-m_2-m_3}((d-m_2-m_3)p_1, (d-m_1-m_3)p_2, (d-m_1-m_2)p_3, m_4\varphi^{-1}(p_4), \dots, m_n\varphi^{-1}(p_n)).$$

Dann gilt, für einen nichtverschwindenden Term $\tilde{c}_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} x_1^{\tilde{\alpha}} x_2^{\tilde{\beta}} x_3^{\tilde{\gamma}}$ von g , analog zu oben:

$$\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} \geq d - m_2 - m_3$$

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} \geq d - m_1 - m_3$$

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \geq d - m_1 - m_2$$

Betrachten wir jetzt wieder $x_1^{\tilde{\alpha}} x_2^{\tilde{\beta}} x_3^{\tilde{\gamma}} \circ \tilde{\varphi} = x_1^{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}} x_2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}} x_3^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$. Analog zu oben können wir $x_1^{d-m_2-m_3} x_2^{d-m_1-m_3} x_3^{d-m_1-m_2}$ ausklammern, also $g \circ \tilde{\varphi} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \tilde{g}$. Wiederum sehen wir wegen $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 2d - m_1 - m_2 - m_3$:

$$\text{mult}_{[1:0:0]}(x_1^{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-(d-m_2-m_3)} x_2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}-(d-m_1-m_3)} x_3^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-(d-m_1-m_2)}) =$$

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} - d + m_1 + m_3 + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - d + m_1 + m_2 =$$

$$\tilde{\alpha} + 2d - m_1 - m_2 - m_3 - 2d + 2m_1 + m_2 + m_3 \geq m_1$$

$$\text{mult}_{[0:1:0]}(x_1^{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-(d-m_2-m_3)} x_2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}-(d-m_1-m_3)} x_3^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-(d-m_1-m_2)}) \geq m_2$$

$$\text{mult}_{[0:0:1]}(x_1^{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-(d-m_2-m_3)} x_2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}-(d-m_1-m_3)} x_3^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-(d-m_1-m_2)}) \geq m_3$$

und

$$\begin{aligned} & \deg(x_1^{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-(d-m_2-m_3)} x_2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}-(d-m_1-m_3)} x_3^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-(d-m_1-m_2)}) \\ &= 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) - 3d + 2(m_1 + m_2 + m_3) \\ &= 4d - 2(m_1 + m_2 + m_3) - 3d + 2(m_1 + m_2 + m_3) = d \end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder:

$$\begin{aligned} \text{mult}_{p_1}(\tilde{g}) &\geq m_1 \\ \text{mult}_{p_2}(\tilde{g}) &\geq m_2 \\ \text{mult}_{p_3}(\tilde{g}) &\geq m_3 \\ \forall i \in I_n, i > 3 \quad \text{mult}_{p_i}(\tilde{g}) &= \text{mult}_{\varphi^{-1}(p_i)}(g) \end{aligned}$$

Und damit $\tilde{g} \in L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$. Wir erhalten also $\dim(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) = \dim(\mathfrak{L}_{2d-m_1-m_2-m_3}(d-m_2-m_3, d-m_1-m_3, d-m_1-m_2, m_4, \dots, m_n))$. Da man durch Nachrechnen auch $\text{edim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_{2d-m_1-m_2-m_3}(d-m_2-m_3, d-m_1-m_3, d-m_1-m_2, m_4, \dots, m_n))$ sieht, erhalten wir:

Lemma 4.10: Seien $d, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $2d > m_1 + m_2 + m_3$. Dann ist $\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$ genau dann nicht speziell, wenn $\mathfrak{L}_{2d-m_1-m_2-m_3}(d-m_2-m_3, d-m_1-m_3, d-m_1-m_2, m_4, \dots, m_n)$ nicht speziell ist.

Man kann dieses Lemma auch erhalten, indem man ausnutzt, dass man φ durch Aufblasen von \mathbb{P}^2 in p_1, p_2 und p_3 und anschliessenden Niederblasen der strikten Transformierten von $V(x_1), V(x_2)$ und $V(x_3)$ erhält (vergleiche [Bar06]). Die Motivation hinter unserem Ansatz war aber die Hoffnung, eine Methode zu finden, die möglicherweise auch für andere Cremonatransformationen und für Mengen D , die nicht der Form D_d für ein $d \in \mathbb{N}$ sind, funktioniert. Leider zeigt das nachfolgende Lemma, dass sich diese Hoffnung nicht erfüllt.

Lemma 4.11: Seien $d, n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, $2d > m_1 + m_2 + m_3$ und $\text{edim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) \geq 0$, und D eine echte Teilmenge von D_d , die durch Entfernen endlich vieler Elemente (α, β) mit $\alpha + \beta < m_3$, $d - \beta < m_2$ oder $d - \alpha < m_1$ aus D_d entsteht. Wenn $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$ mit $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$ und $p_4, \dots, p_n \in \text{Iso}(\varphi)$ existieren, dann ist $\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)$ speziell.

Beweis. Angenommen, es existieren $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$ wie im Lemma. Dann ist $\mathcal{A}_D(m_1 p_1, m_2 p_2, m_3 p_3, m_4, \dots, m_n)$ nicht leer. Da ausserdem, wie oben gesehen, $\mathcal{A}_{D_d}(m_1 p_1, m_2 p_2, m_3 p_3, m_4, \dots, m_n)$ nicht leer ist, existieren

$(p_4, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1 p_1, m_2 p_2, m_3 p_3, m_4, \dots, m_n) \cap \mathcal{A}_{D_d}(m_1 p_1, m_2 p_2, m_3 p_3, m_4, \dots, m_n)$.

Aus den obigen Überlegungen sieht man, dass die, zu den aus D_d entfernten Punkten gehörenden Monome gar nicht in $f \in L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ auftauchen, also

$L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n) = L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)$ gilt. Daraus folgt:

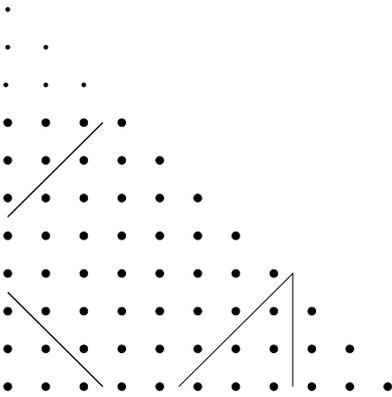
$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) &= \dim(L_D(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) - 1 \\ &= \dim(L_d(m_1 p_1, \dots, m_n p_n)) - 1 \\ &= \dim(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) \\ &\geq \text{edim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) \\ &> \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

Wobei die letzte Ungleichung aus

$$\begin{aligned} \text{edim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) &= \text{vdim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) = \#D_d - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2} \\ &> \#D - 1 - \sum_{i=1}^n \binom{m_i + 1}{2} = \text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m_1, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

und $\text{edim}(\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)) \geq 0$ folgt. □

Betrachten wir aber $\mathfrak{L}_D(3^4)$ mit $D := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha + \beta \leq 10 \wedge \beta \leq 8\}$. Es gilt $\text{edim}(\mathfrak{L}_{10}(3^4)) = 41 \geq 0$ und $20 > 3 + 3 + 3$. Aber, wie man an folgender Zeichnung sieht, ist $\mathfrak{L}_D(3^4)$ nicht speziell. Nach dem letzten Lemma können wir also kein φ finden, so dass $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$ mit $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$ und $p_4, \dots, p_n \in \text{Iso}(\varphi)$ existieren. Also können wir das obige Verfahren hier nicht zur Vereinfachung verwenden.



Eine weitere Methode zu bestimmen, wie sich die Multiplizitäten von Kurven in festen Punkten unter Cremonatransformationen verhalten, liefert [AC02].

Dort wird in Kapitel 2.4 die „*charakteristische Matrix*“ einer Cremonatransformationen definiert. Diese besteht im wesentlichen aus den Schnitzzahlen der exceptionellen Geraden der Aufblasungen mit den niedergeblasenen (-1) -Kurven. In Kapitel 2.9 wird dann gezeigt, wie man mithilfe dieser Matrix ausrechnen kann, wie sich Kurven mit gewissen Multiplizitäten in den Aufblasungspunkten unter einer Cremonatransformation verhalten.

Allerdings hilft dies in unserem Fall nur, wenn die Cremonatransformation φ „*bisimple*“ ist, das heisst, wenn die Aufblasungspunkte von φ und φ^{-1} direkt auf \mathbb{P}^2 liegen, und nicht auf der exceptionellen Geraden einer vorherigen Aufblasung. Denn, falls φ nicht bisimple ist, müssen wir nicht nur Bedingungen an die Multiplizität in den Aufblasungspunkten, sondern auch in die Tangentialrichtung stellen, und damit verlassen wir die bisherige Problemstellung.

Als Beispiel: Die oben betrachtete Transformation, die fast überall durch

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_2x_3 : x_1x_3 : x_1x_2]$$

gegeben ist, ist bisimple. Die fast überall durch

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_2^2 : x_1x_2 : x_1x_3]$$

gegebene Transformation hingegen ist nicht bisimple, sie entsteht durch Aufblasen in $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 0 : 0]$ und in einem Punkt auf einer der der exceptionellen Geraden.

Wenn uns also überhaupt eine Cremonatransformation φ helfen kann, dann müsste φ bisimple sein, und $\varphi(D)$ für möglichst viele endliche $D \subset \mathbb{N}^2$ existieren, oder sich eine Aussage wie Lemma 4.10 aus ihr herleiten lassen. Lemma 4.10 hilft uns leider nicht, da bei unseren Systemen $d > 3m$ gilt, weshalb wir die d mit Lemma 4.10 vergrössern, und nicht verkleinern. Ausserdem wechseln wir zusätzlich noch von homogenen Systemen zu nichthomogenen. Diese beiden Tatsachen erleichtern uns die Berechnung leider nicht, sondern erschweren sie.

5 Ausblick

In diesem Kapitel sind immer $n, m, d \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{N}^2$ endlich.

Die Nichtspeziellheit eines allgemeinen Systems $\mathfrak{L}_D(m^n)$ lässt sich auch zeigen, indem man Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ mit $\text{Rang}(M_D^{(m^n)}(p_1, \dots, p_n)) = \min\{\#D, n \binom{m+1}{2}\}$ findet. Für gegebene Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}^2$ lässt sich diese Bedingung durch das Berechnen von Minoren prüfen. Allerdings ist das Berechnen von Determinanten recht aufwändig, besonders, wenn dies symbolisch passieren soll.

Wir versuchen hier die in Bemerkung 3.15 festgestellte Tatsache auszunutzen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf Systeme mit $\text{vdim}(\mathfrak{L}_D(m^n)) = -1$, da dort $\#D = n \binom{m+1}{2}$ gilt, wir also eine quadratische Matrix haben, und wir uns so auf die Berechnung einer Determinanten beschränken können. Später betrachten wir zum Vergleich auch Systeme mit nichtquadratischen Matrizen.

Wir schneiden erst so viele Dreiecke wie möglich ab, um dann die Determinante der, jetzt deutlich kleineren, Matrix zu berechnen. Allerdings geht dies dann immer noch nicht symbolisch, so dass wir zufällig generierte Punkte (p_1, \dots, p_n) einsetzen, um dann die Determinante mit Maple zu berechnen. Ist diese Determinante ungleich Null, so gilt

$$\dim(\mathfrak{L}_D(m^n)) \stackrel{2.6}{\leq} \dim(\mathfrak{L}_D(mp_1, \dots, mp_n)) = \text{edim}(\mathfrak{L}_D(m^n)),$$

also da nach 2.10 auch \geq gilt, ist unser reduziertes System nicht speziell, und damit auch das ursprüngliche. Bei der Rangberechnung gehen wir analog vor.

5.1 Determinanten

Definition 5.1: Seien $n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Wir definieren dann mit $d_0 := d_0(m_1, \dots, m_n)$:

$$D_e(m_1, \dots, m_n) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid |(\alpha, \beta)| = d_0 \wedge \alpha > \text{vdim}(\mathfrak{L}_{d_0}(m_1, \dots, m_n))\}$$

und

$$D(m_1, \dots, m_n) := D_{d_0(m_1, \dots, m_n)-1} \cup D_e(m_1, \dots, m_n).$$

Wie in Korollar 2.25 gesehen, gilt dann $\text{vdim}(\mathfrak{L}_{D(m_1, \dots, m_n)}(m_1, \dots, m_n)) = -1$. Wir betrachten im folgenden $\mathfrak{L}_{D(m^n)}(m^n)$.

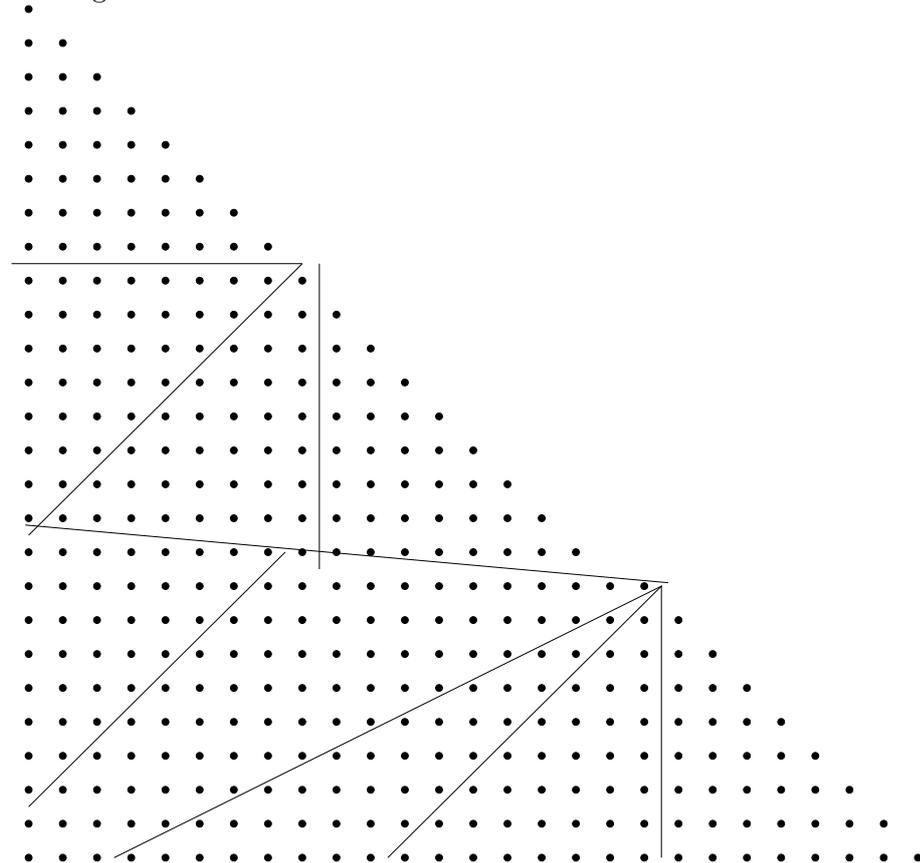
Um die Nichtspeziellheit des verbleibenden Systems festzustellen, berechnen wir mit einem Perl-skript zuerst für ein gegebenes n , diejenigen m unterhalb einer gewissen Schranke, die für unsere Reduktionen geeignet sind. Dann erstellt dieses Skript einen Maple-worksheet, der Maple veranlasst, die Determinante an von dem Skript zufällig gewählten

Punkten zu berechnen. Die folgenden Tabellen zeigen die Ergebnisse. Dabei ist „Dim“ die Grösse der Matrix, „Grösse“ die Grösse des Maple-worksheets in Bytes und „Zeit“ die von Maple benötigte Rechenzeit in Sekunden, gemessen von Maple mit dem Befehl „time()“. Maple läuft dabei auf einem Desktoprechner in der Datenstation des Mathematischen Institutes, die mit einem Pentium4, 1.80GHz sowie 512MB Ram und einer 1GB großen Swappartition ausgestattet sind.

Zuerst untersuchen wir bis zu welcher Grenze wir die Nichtspeziellheit ohne vorherige Reduktion zeigen können.

n	m_{max}	$d_0 - 1$	Dim	Grösse	Zeit
10	7	22	280×280	1.5M	3607.773
11	7	23	308×308	1.8M	3434.990
12	6	20	252×252	1.2M	1156.824
13	6	21	273×273	1.5M	1291.836

Ist $\#D_e(m^n) = 0$ oder $\#D_e(m^n) \geq m$ und $d_0(m^n) + 1 - \#D_e(m^n) > 2m$, dann können wir folgende Konstruktion benutzen:



(hier im Fall $n = 10$, $m = 8$, $d_0(8^{10}) = 26$ und $\#D_e(8^{10}) = 9$.)

Maple liefert folgende Ergebnisse, wobei die letzte Zeile jeweils der erste Fall ist, bei dem die Berechnung mit den gegebenen Mitteln nicht mehr sinnvoll möglich ist:

$n = 10$, $p_1 = (-39, -42)$ und $p_2 = (-49, -26)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
2	6	6×6	$0.9216474758 \cdot 10^{13}$	761	0.112
6	19	42×42	$0.1169062607 \cdot 10^{445}$	35K	0.572
8	25	72×72	$0.4194988680 \cdot 10^{1044}$	107K	3.704
12	38	156×156	$0.2230660573 \cdot 10^{3631}$	572K	118.767
14	44	210×210	$-0.6186324903 \cdot 10^{5936}$	1.1M	63.355
20	63	420×420	$0.6239341650 \cdot 10^{18264}$	5.1M	1029.636
51	161	2652×2652		285M	

$n = 11$, $p_1 = (-19, -57)$, $p_2 = (-81, -51)$ und $p_3 = (-99, -90)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
3	10	18×18	$0.5128618626 \cdot 10^{118}$	6.2K	0.092
4	13	30×30	$0.2080111184 \cdot 10^{264}$	17K	0.236
6	20	63×63	$-0.7431430567 \cdot 10^{865}$	80K	2.540
7	23	84×84	$0.5370760966 \cdot 10^{1345}$	144K	7.900
10	33	165×165	$-0.2695056322 \cdot 10^{3870}$	609K	179.143
26	86	1053×1053		37M	

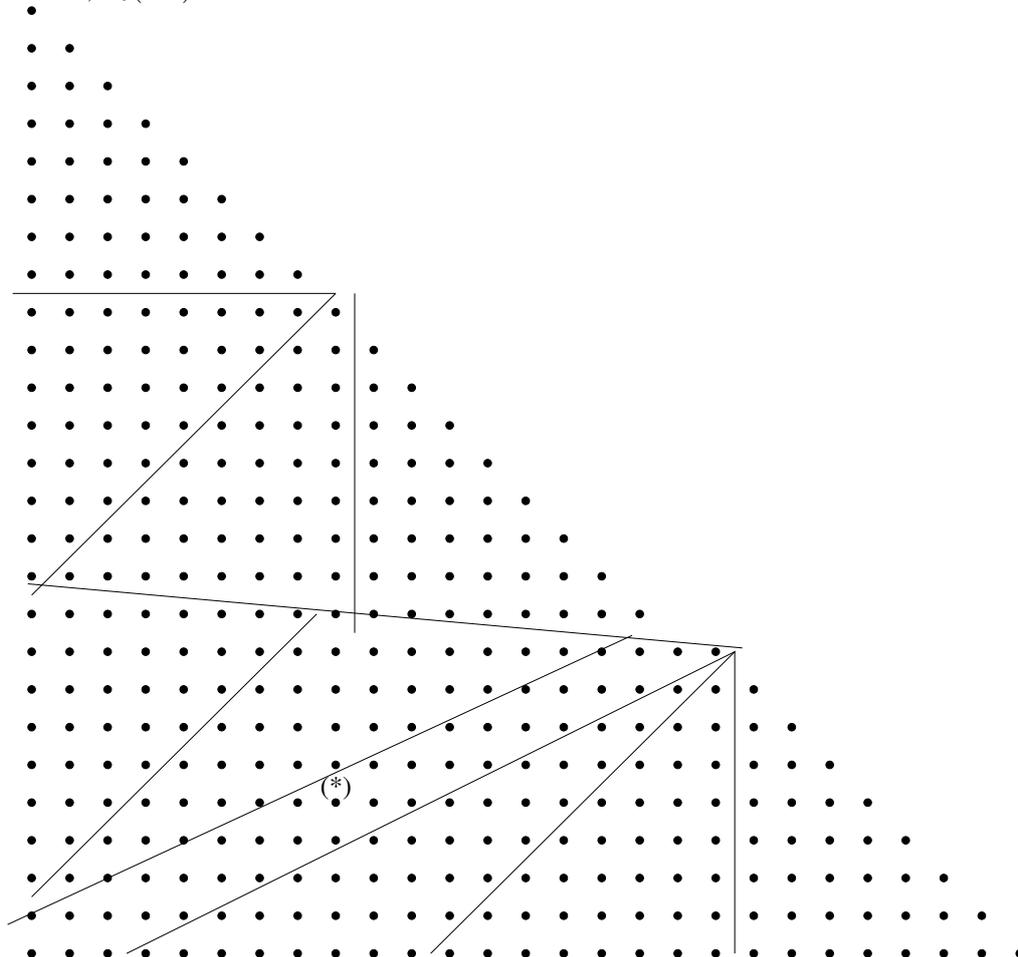
$n = 12$, $p_1 = (-58, -21)$, $p_2 = (-39, -7)$, $p_3 = (-61, -67)$ und $p_4 = (-96, -40)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
2	7	12×12	$-0.5059172639 \cdot 10^{52}$	2.9K	0.096
4	14	40×40	$0.6075462380 \cdot 10^{363}$	32K	0.560
9	31	180×180	$-0.1918355911 \cdot 10^{3883}$	723K	285.845
11	38	264×264	$-0.2872328160 \cdot 10^{7009}$	1.7M	2438.608
24	83	1200×1200		47M	

$n = 13$, $p_1 = (-2, -85)$, $p_2 = (-17, -95)$, $p_3 = (-24, -59)$, $p_4 = (-56, -93)$ und $p_5 = (-82, -61)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
2	7	15×15	$0.6817599057 \cdot 10^{75}$	4.4K	0.076
3	11	30×30	$-0.6274747762 \cdot 10^{225}$	18K	0.264
5	18	75×75	$0.1050493552 \cdot 10^{629}$	113K	5.368
10	36	275×275	$0.1402962255 \cdot 10^{7156}$	1.8M	3452.555
15	54	600×600	$-0.1255994631 \cdot 10^{26492}$	9.6M	5811.207
20	72	1050×1050		34M	

Wir können aber auch noch eine weitere Gerade abschneiden. Die mit (*) gezeichnete Gerade hat dabei die Steigung $\frac{1}{2} + \varepsilon$, da sie im ersten Schritt 3 Punkte, und im weiteren Verlauf immer 2 Punkte überspringen muss. Die Zeichnung zeigt wieder den Fall $n = 10$, $m = 8$, $d_0(8^{10}) = 26$:



Wir erhalten folgende Laufzeiten:

$n = 10$, $p_1 = (-65, -80)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
2	6	3×3	274625	248	0.076
6	19	21×21	$0.2969203957 \cdot 10^{247}$	8K	0.116
8	25	36×36	$-0.3322404147 \cdot 10^{597}$	25K	0.348
12	38	78×78	$-0.3851391135 \cdot 10^{2014}$	130K	4.584
14	44	105×105	$-0.1373434391 \cdot 10^{3219}$	246K	3.18
20	63	210×210	$0.1027840656 \cdot 10^{9559}$	1.2M	35.454
51	161	1326×1326		63M	

$n = 11$, $p_1 = (-65, -65)$ und $p_2 = (-33, -71)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
3	10	12×12	$0.5063580357 \cdot 10^{71}$	2.6K	0.108
4	13	20×20	$-0.2400904204 \cdot 10^{167}$	7.1K	0.096
6	20	42×42	$-0.2474974534 \cdot 10^{537}$	34K	0.596
7	23	56×56	$0.8708742143 \cdot 10^{846}$	61K	1.476
10	33	110×110	$0.7130177312 \cdot 10^{2417}$	253K	20.917
26	86	702×702		16M	

$n = 12$, $p_1 = (-2, -56)$, $p_2 = (-89, -67)$ und $p_3 = (-84, -95)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
2	7	9×9	$-0.5931986220 \cdot 10^{39}$	1.6 K	0.084
4	14	30×30	$-0.6665620201 \cdot 10^{279}$	17 K	0.240
9	31	135×135	$0.4795167839 \cdot 10^{2983}$	288K	57.323
11	38	198×198	$0.6973921777 \cdot 10^{5346}$	882K	389.748
24	83	900×900		25M	

$n = 13$, $p_1 = (-15, -2)$, $p_2 = (-4, -3)$, $p_3 = (-9, -2)$ und $p_4 = (-18, -13)$:

m	$d_0 - 1$	Dim	Determinante	Grösse	Zeit
2	7	12×12	$-0.1285819326 \cdot 10^{32}$	2.7K	0.084
3	11	24×24	$-0.1736890591 \cdot 10^{96}$	11K	0.112
5	18	60×60	$0.1469910186 \cdot 10^{428}$	70K	1.836
10	36	220×220	$0.6645278589 \cdot 10^{3430}$	1.1M	533.649
15	54	480×480	$-0.2232283625 \cdot 10^{13817}$	5.9M	1878.205
20	72	840×840		21M	

5.2 Rang

Die Methode mit $\mathfrak{L}_{D(m^n)}(m^n)$ zu arbeiten hat den Vorteil, dass das Berechnen von Determinanten theoretisch schneller geht als die Rankberechnung, weil bei letzterer im Normalfall mehr als nur eine Determinante berechnet werden muss. Allerdings haben die im vorherigen Unterkapitel benutzten Konstruktionen das Problem, dass sie nur für bestimmte Mächtigkeiten von $D_e(m^n)$ funktionieren, und so die Matrixgrösse sehr stark springt. Daher berechnen wir mit derselben Methode wie im vorherigen Unterkapitel, durch Erstellen eines Maple-worksheet und Aufrufen von Maple mit diesem, aber immer angewandt auf $\mathfrak{L}_{d_0(m^n)}(m^n)$, den maximalen Rang.

Ohne vorherige Reduktion erhalten wir:

n	m_{max}	d_0	Dim	Grösse	Zeit
10	7	23	300×280	1.6M	3768.8
11	7	24	325×308	1.9M	4840.0
12	7	25	351×336	2.3M	10273.858
13	7	26	378×364	2.8M	11289.181

Auch hier können wir die beiden oben gezeigten Reduktionen anwenden. Wir setzen dazu die im vorherigen Kapitel erhaltenen Punkte in $M_{D_{d_0(m^n)}}^{(m^n)}$ ein, und berechnen mit Maple den Rang. In den Tabellen sind die m , die schon im vorherigen Kapitel betrachtet wurden, fett gedruckt.

$n = 10$		8 Schnitte			9 Schnitte		
m	d_0	Dim	Grösse	Zeit			
2	7	12×6	1.5K	0.068	9×3	612	0.064
3	10	18×12	4.2K	0.072	12×6	1.4K	0.08
4	13	25×20	9.6K	0.124	15×10	2.7K	0.068
5	16	33×30	20K	0.328	18×15	4.8K	0.1
6	19	42×42	35K	0.896	21×21	8.0K	0.116
7	23	76×56	88K	3.652	48×28	26K	0.392
8	26	90×72	137K	9.240	54×36	38K	0.792
9	29	105×90	204K	21.889	60×45	54K	1.544
10	23	121×110	296K	51.023	66×55	74K	2.808
11	35	138×132	416K	118.459	72×66	99K	5.42
12	38	156×156	572K	268.452	78×78	130K	10.004
13	42	218×182	970K	(*)	127×91	259K	(*)
14	45	241×210	1.3M	(*)	136×105	327K	(*)

$n = 11$		8 Schnitte			9 Schnitte		
m	d_0	Dim	Grösse	Zeit	Dim	Grösse	Zeit
2	7	12×9	2.2K	0.068	9×6	1.1K	0.08
3	10	18×18	6.2K	0.108	12×12	2.6K	0.08
4	14	40×30	24K	0.468	30×20	12K	0.164
5	17	51×45	46K	1.388	36×30	21K	0.364
6	20	63×63	80K	3.896	42×42	34K	0.836
7	24	101×84	178K	17.489	73×56	82K	3.28
8	27	118×108	273K	48.075	82×72	120K	7.692
9	30	136×135	403K	127.075	91×90	169K	16.485
10	34	190×165	717K	470.173	135×110	321K	53.219
11	37	213×198	990K	1154.98	147×132	428K	115.923
12	40	237×234	1.4M	2740.931	159×156	558K	253.899
13	44	307×273	2.1M	(*)	216×182	923K	(*)
14	47	336×315	2.7M	(*)	231×210	1.2M	(*)

$n = 12$		8 Schnitte			9 Schnitte		
m	d_0	Dim	Grösse	Zeit	Dim	Grösse	Zeit
2	7	12×12	2.9K	0.06	9×9	1.6K	0.06
3	11	30×24	15K	0.228	24×18	8.1K	0.12
4	14	40×40	32K	0.764	30×30	17K	0.312
5	18	70×60	85K	4.08	55×45	48K	1.468
6	21	85×84	147K	12.156	64×63	79K	3.716
7	25	127×112	303K	57.819	99×84	171K	15.108
8	28	147×144	461K	163.258	111×108	250K	37.742
9	32	201×180	819K	658.973	156×135	457K	135.568
10	35	226×220	1.2M	1751.313	171×165	624K	315.567
11	39	292×264	1.9M	5902.2	226×198	1.1M	1040.665
12	42	322×312	2.5M	(*)	244×234	1.4M	(*)
13	46	400×364	3.7M	(*)	309×273	2.1M	(*)

$n = 13$		8 Schnitte			9 Schnitte		
m	d_0	Dim	Grösse	Zeit	Dim	Grösse	Zeit
2	8	21×15	6.4K	0.092	18×12	4.3K	0.068
3	11	30×30	18K	0.352	24×24	11K	0.136
4	15	56×50	56K	2.028	46×40	36K	0.788
5	19	90×75	139K	11.076	75×60	90K	3.488
6	22	108×105	237K	34.83	87×84	148K	9.416
7	26	154×140	466K	164.75	126×112	296K	37.282
8	30	208×180	840K	720.573	172×144	540K	122.259
9	33	235×225	1.2M	2000.281	190×180	758K	328.416
10	37	301×275	2.0M	7265.558	246×220	1.3M	1090.384
11	40	333×330	2.7M	17994.852	267×264	1.7M	2448.601
12	44	411×390	4.0M	(*)	333×312	2.5M	(*)
13	48	497×455	5.8M	(*)	406×364	3.7M	(*)
14	51	538×525	7.4M	(*)	433×420	4.6M	(*)
15	55	636×600	11M	(*)	516×480	6.5M	(**)
16	58	682×680	13M	(**)	546×544	7.9M	(*)
17	62	792×765	18M	(**)	639×612	11M	(**)

Fehlermeldungen:

(*): „Error, (in evalf/Svd) bad matrix condition: does not converge“

(**): „Execution stopped: Stack limit reached.“

5.3 Weitere Möglichkeiten

Die hier verwendete Art der Determinanten- beziehungsweise Rankberechnung, durch Erstellen eines Maple-worksheet und anschliessenden Maple-aufruf, ist sicherlich nicht optimal, aber war auch von anfang an nur als „proof-of-concept“ gedacht. Aber es zeigt

sich schon, wo die Probleme bei dieser Vorgehensweise liegen. Beim ersten Ansatz liegt das Problem zum einen darin, dass die Matrixgrösse doch recht stark springt, und zum anderen, dass der Speicherverbrauch von Maple recht groß ist. Die Berechnungen in dieser Arbeit enden etwa dort, wo Maple auf den Institutsrechner anfängt den Swapbereich zu benötigen, wodurch die Laufzeit noch weiter steigt.

Beim zweiten Ansatz sieht man, dass man beim Auswählen der Matrizen, beziehungsweise des Bereiches für die Zufallszahlen, auch berücksichtigen muss, welches Verfahren man für die numerische Berechnung der Determinanten bzw. des Ranges wählt. Dabei ist das Problem, dass Punkte, die besonders gut geeignet sind, dazu tendieren, nicht in allgemeiner Lage zu sein. Allerdings ist es durchaus möglich gewisse Einschränkungen an die Zufallszahlen zu stellen. In dieser Arbeit wurde mit ganzzahligen Zufallszahlen, die betragsmäßig kleiner als 100 oder 30 sind, gearbeitet. Teilweise wurde, aufgrund eines kleinen Fehlers in der Generierung, sogar nur mit nicht positiven ganzen Zahlen aus diesem Bereich gearbeitet.

Interessant ist auch ein Vergleich der Laufzeiten für $n = 12$ und 9 Schnitten, mit denen von $n = 11$ und 8 Schnitten. Wenn wir $m_{13} \in \{7, \dots, 11\}$ und $m_{11} = m_{13} + 1$ betrachten, sehen wir, dass wir bei kleineren Matrixgrößen eine längere Laufzeit haben. Nehmen wir die ersten 3 Punkte, die wir für $n = 12$ und 9 Schnitte benutzt haben, und starten einen zweiten Lauf für $n = 11$ und 8 Schnitte, so stellen wir fest, dass diese Punkte in allgemeiner Lage sind, und wir erhalten folgende Laufzeiten:

$n = 11$		8 Schnitte		
m	d_0	Dim	Alt	Neu
2	7	12×9	0.068	0.048
3	10	18×18	0.108	0.084
4	14	40×30	0.468	0.352
5	17	51×45	1.388	1.032
6	20	63×63	3.896	2.784
7	24	101×84	17.489	11.260
8	27	118×108	48.075	28.181
9	30	136×135	127.075	63.599
10	34	190×165	470.173	219.673
11	37	213×198	1154.98	518.028
12	40	237×234	2740.931	1132.254

Wir können die Laufzeit also etwa halbieren.

Wir sehen auch, dass ein ähnlicher Effekt beim Vergleich von $n = 13$ mit 9 Schnitten und $n = 12$ mit 8 Schnitten auftritt (dort mit $m_{12} = m_{13}$). Schauen wir uns also die Laufzeiten von $n = 12$, 8 Schnitte mit den Punkten von $n = 13$, 9 Schnitte an:

$n = 12$		8 Schnitte		
m	d_0	Dim	Alt	Neu
2	7	12×12	0.06	0.056
3	11	30×24	0.228	0.192
4	14	40×40	0.764	0.652
5	18	70×60	4.08	3.068
6	21	85×84	12.156	8.460
7	25	127×112	57.819	36.518
8	28	147×144	163.258	96.198
9	32	201×180	658.973	356.694
10	35	226×220	1751.313	898.468
11	39	292×264	5902.2	3124.423

Es zeigt sich also, dass bei der Frage, welche Punkte man verwendet, auf jeden Fall auch darauf geachtet werden sollte, wie sich diese Wahl auf die Matrix auswirkt, das heisst, ob die entstehende Matrix dann für den gewählten Berechnungsalgorithmus geeignet ist, oder nicht. Allerdings darf man dabei den Bereich der Zufallszahlen auch nicht zu sehr einschränken, weil man sonst häufig Punkte generiert, die nicht in allgemeiner Lage sind.

Allerdings gibt es manchmal doch Punkte in allgemeiner Lage, die auf den ersten Blick „schön“ aussehen. So sind z.B. für das reduzierte System nach 9 Schnitten für $n = 10$ die Punkte $p_1 = (1, 1)$ und $p_1 = (1, -1)$ in allgemeiner Lage.

Zum Abschluss noch eine Aufstellung, welche Abschätzungen an $\varepsilon(H; x_1, \dots, x_n)$ wir mit den Ergebnissen dieser Arbeit, durch Satz 2.35 erhalten. Aufgeführt ist jeweils die beste erreichte Kombination von m und d :

Verfahren	$n = 10$				$n = 11$			
	m	d	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	m	d	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$
Schnitte	8	27	0.259	3.86	8	28	0.25	4.0
Determinante	20	64	0.297	3.37	10	34	0.265	3.78
Rang	12	38	0.289	3.45	12	40	0.275	3.64
Optimum	20	64	0.297	3.37	12	40	0.275	3.64

Verfahren	$n = 12$				$n = 13$			
	m	d	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	m	d	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$
Schnitte	7	26	0.231	4.33	7	27	0.222	4.5
Determinante	11	39	0.256	3.9	15	55	0.255	3.93
Rang	11	39	0.256	3.9	11	40	0.25	4.0
Optimum	11	39	0.256	3.9	15	55	0.255	3.93

Literatur

- [AC02] Maria Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Bar06] Sammy Barkowski. Die Ciliberto-Miranda - Rekursion für Linearsysteme der projektiven Ebene. Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, 2006.
- [Bri83] Egbert Brieskorn. *Lineare Algebra und analytische Geometrie. I*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983. With historical notes by Erhard Scholz.
- [DJ05] Marcin Dumnicki and Witold Jarnicki. New effective bounds on the dimension of a linearsystem in \mathbb{P}^2 . math.AG/0505183v2, 2005.
- [Dum05] Marcin Dumnicki. Expected term bases for generic multivariate hermite interpolation. math.AG/0503701, 2005.
- [Dum06] Marcin Dumnicki. Reduction method for linear systems of plane curves with base fat points. math.AG/0606716v1, 2006.
- [Eck05] Thomas Eckl. Seshadri constants via lelong numbers. math.AG/0508561, 2005.
- [Fre04] Itnuit Janovitz Freireich. Cremona Transformations Based at Eight or Fewer Points. Master's thesis, Colorado State University, 2004.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Yan07] Stephanie Yang. Linear systems in \mathbb{P}^2 with base points of bounded multiplicity. *J. Algebraic Geom.*, 16(1):19–38, 2007.

Zeichen

$(C.D)_p$, 20

(m_1, \dots, m_n) , 56

D_d , 6

$D_e(m_1, \dots, m_n)$, 56

$L_D(m_1p_1, \dots, m_np_n)$, 3

$M_D^{(m_1, \dots, m_n)}$, 4

$\mathcal{A}_D(m_1, \dots, m_n)$, 5

$\mathcal{A}_D(m_1p_1, \dots, m_r p_r, m_{r+1}, \dots, m_n)$, 5

$\text{Bl}_{x_1, \dots, x_n}(X)$, 11

$\varepsilon(L; x_1, \dots, x_n)$, 17

$\mathfrak{L}_D(m_1p_1, \dots, m_np_n)$, 4

$\mathfrak{L}_d(m_1, \dots, m_n)$, 6

\mathcal{S}_n^k , 19

bdeg , 18

$\text{bdeg}(cm)$, 18

edim , 7

$\text{mult}_p(f)$, 8

vdim , 7

$d_0(m_1, \dots, m_n)$, 13

$s(S)$, 19

$sx_a(H)$, 41

Index

(-1)-Kurve, 11

allgemeine Lage, 5

allgemeines System von Kurven, 5

 nicht speziell, 7

 speziell, 7

Bézout, 20

Cremonatransformation, 1, 47

erwartete Dimension, 7

ganzzahlige Steigung, 31, 41

Harbourne-Hirschowitz-Vermutung, 1, 11

Nagata-Vermutung, 1, 15

Reduktionsalgorithmus, 24

 verallgemeinerter, 25

Seshadri-Konstante, 1, 17

verallgemeinerte Regel von Laplace, 19

virtuelle Dimension, 7

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 18. April 2007

(Felix Schüller)