Anna Pratoussevitch

Polyedrische Fundamentalbereiche diskreter Untergruppen von $\widetilde{SU}(1,1)$

Bonn, 2001

Einleitung

In dieser Arbeit befasse ich mich mit der Liegruppe $\mathrm{PSU}(1,1) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ der orientierungserhaltenden Isometrien der hyperbolischen Ebene und ihrer universellen Überlagerung $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$. Der Gegenstand meiner Untersuchungen sind die homogenen Räume, die als Quotienten von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ nach einer diskreten Untergruppe endlicher Stufe entstehen, wobei die Stufe einer Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ gleich dem Index von $\tilde{\Gamma} \cap Z(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1))$ in $Z(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)) \cong \mathbb{Z}$ ist. Diese Räume wurden studiert als Seifertsche Faserräume, Lorentz-Raumformen sowie als Umgebungsränder isolierter Singularitäten. Die Lorentz-Metrik auf der Liegruppe $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ und ihren Quotienten nach diskreten Untergruppen wird durch die Killingform induziert. Igor Dolgachev hat in [D1] und [D2] eine Konstruktion von isolierten Singularitäten angegeben, deren Umgebungsränder zu den Quotienten von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ nach diskreten Untergruppen endlicher Stufe diffeomorph sind. Ich skizziere kurz diese Konstruktion: Eine diskrete Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ endlicher Stufe in $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ operiert auf dem komplexen Geradenbündel $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$, wobei $\mathbb{D}$ die offene Kreisscheibe als Modell der hyperbolischen Ebene ist. Bildet man den Quotienten nach dieser Operation und zieht anschließend den Nullschnitt zusammen, so erhält man einen komplexen Raum mit einer isolierten Singularität, deren Umgebungsrand zum Quotienten $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)/\tilde{\Gamma}$ diffeomorph ist.

Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine diskrete Untergruppe endlicher Stufe in $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ mit einem Fixpunkt in $\mathbb{D}$. Den Quotienten von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ nach $\tilde{\Gamma}$ beschreibe ich, indem ich einen Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ durch Linksmultiplikation konstruiere und die Identifikationen angebe, die diese Operation am Rande des Fundamentalbereichs induziert. Thomas Fischer hat in seiner Doktorarbeit [Fi] eine Konstruktion für Untergruppen der Stufe 1 angegeben, in der Diplomarbeit [P] habe ich diese Konstruktion auf die Untergruppen der Stufe 2 verallgemeinert. Ist die diskrete Untergruppe cokompakt, so sind die konstruierten Fundamentalbereiche kompakte Polytope mit totalgeodätischen Seiten.

Ich fasse die Lorentz-Mannigfaltigkeit $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ als einen Schnitt in dem metrischen Kegel $K(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1))$ auf. Dabei ist der metrische Kegel einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gleich $K(M) = (\mathbb{R}_+ \times M, dt^2 + t^2 \cdot g)$. Mit Hilfe der Tangentialhalbräume an die Untermannigfaltigkeit $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ in Punkten von $\tilde{\Gamma}$ konstruiere ich ein vierdimensionales Polytop P. Die Bilder der dreidimensionalen Seiten des Polytops P unter der radialen Projektion sind Fundamentalbereiche für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$.

Als Vorbild dient die Konstruktion der Fundamentalbereiche für die Operation einer endlichen nicht zyklischen Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von $\mathrm{SU}(2)$, zum Beispiel der binären Ikosaedergruppe $\tilde{I}$, auf $\mathrm{SU}(2)$ durch Linksmultiplikation. Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ wird dabei mit der Sphäre im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ identifiziert. Für $g \in \tilde{\Gamma}$ sei E_g der eingebettete Tangentialraum an die Sphäre in g und H_g der Halbraum mit $\partial H_g = E_g$, der die Sphäre enthält. Jede dreidimensionale Seitenfläche des vierdimensionalen Polytops $P := \bigcap_{g \in \tilde{\Gamma}} H_g$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf dem Rand dieses Polytops. Die Bilder dieser Seiten unter der radialen Projektion sind Fundamentalbereiche der Operation für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathrm{SU}(2)$. Im Falle diskreter Untergruppen von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ entsteht das vierdimensionale Polytop P als Vereinigung endlicher Durchschnitte von Tangentialhalbräumen H_g mit $g \in \tilde{\Gamma}$.

Im zweiten Teil der Arbeit werden Fundamentalbereiche für neun Serien diskreter Untergruppen endlicher Stufe in $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ ausgerechnet. Die zugehörigen Fundamentalbereiche werden explizit bis zur Ermittlung von Figuren zusammen mit Seitenpaarungen bestimmt. Die Wahl der entsprechenden Untergruppen von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ ist durch die Singularitätentheorie motiviert. Die Berechnungen konzentrieren sich auf Singularitäten, die in $\mathbb{C}^3$ eingebettet werden können. In den folgenden Tabellen (siehe [Mo]) sind die Stufe und die Signatur des Bildes in $\mathrm{PSU}(1,1)$ für die Untergruppen von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ aufgelistet, die zu den Singularitäten der Serien E, Z und Q nach der Klassifikation von Arnold (siehe [AGV]) gehören.

Typ	$n \mod 4$	Stufe k	Signatur
E_n	0 2 $1,3$	$(n-10)/2$ $(n-10)/4$ $(n-10)/3$	$(0;2,3,k+6)$ $(0;3,3,k+3)$ $(0;2,4,k+4)$
Z_n	3 1 $0,2$	$(n-9)/2$ $(n-9)/4$ $(n-9)/3$	$(0;2,3,2k+6)$ $(0;3,3,2k+3)$ $(0;2,4,2k+4)$
Q_n	2 0 $1,3$	$(n-8)/2$ $(n-8)/4$ $(n-8)/3$	$(0;2,3,3k+6)$ $(0;3,3,3k+3)$ $(0;2,4,3k+4)$

Typ	$n \mod 2$	Stufe k	Signatur
$E_{n,0}$	1 0	$n-2$ $(n-2)/2$	$(0;2,2,2,k+2)$ $(1;k+1)$
$Z_{n,0}$	1 0	n $n/2$	$(0;2,2,2,2k+2)$ $(1;2k+1)$
$Q_{n,0}$	0 1	$n-1$ $(n-1)/2$	$(0;2,2,2,3k+2)$ $(1;3k+1)$

Abbildung 1. Tabellen der Stufen und Signaturen.

In dieser Arbeit bestimme ich die Fundamentalbereiche für alle Dreieckssingularitäten der Serien E, Z und Q, wobei für die Konstruktion des Fundamentalbereichs stets der Fixpunkt mit der größten Ordnung gewählt wird. Dabei heißt eine Singularität eine *Dreieckssingularität,* wenn das Bild in $\mathrm{PSU}(1,1)$ der zugehörigen Untergruppe von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ eine Dreiecksgruppe ist. Die Berechnungen für die Fälle der Stufen 1 und 2 sind von Thomas Fischer in [Fi] und Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler und Stefan Scheidt in [KNRS] für die Stufe 1, und von mir in [P] für die Stufe 2 ausgeführt. Die Fälle der Vierecksssingularitäten in der Stufe 1 sind Gegenstand der Doktorarbeit von Frank Rothenhäusler [R].

Im **Kapitel 1** beschreibe ich zuerst die Überlagerungen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ als Liegruppen und Lorentz-Raumformen sowie ihre metrischen Kegel, definiere Halbräume darin und studiere ihre Eigenschaften. Dann untersuche ich die Eigenschaften elliptischer Elemente in $\mathrm{PSU}(1,1)$ und ihrer Urbilder in $\mathrm{SU}(1,1)$ und $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$. Schließlich beschreibe ich die Konstruktion und beweise, daß die Konstruktion zu einer Pflasterung von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ durch Fundamentalbereiche der Operation der diskreten Untergruppe führt.

Im **Kapitel 2** treffe ich die Vorbereitungen für die Anwendung der Konstruktion. Zuerst fasse ich die bekannten Ergebnisse über diskrete Untergruppen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ und insbesondere über die Dreiecksgruppen zusammen und beschreibe die diskreten Untergruppen in $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$, die als Bild in $\mathrm{PSU}(1,1)$ eine Dreiecksgruppe haben. Ich untersuche dann, wie sich ein Halbraum mit dem Rand eines anderen Halbraums in $K(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1))$ schneidet. Dann gehe ich auf die Methoden zur Herleitung einer endlichen Darstellung des Fundamentalbereichs als kompaktes Polytop ein. Ich beweise dazu einige Abschätzungen sowie ein kombinatorisches Kriterium vom Typ des Poincaré-Maskit-Satzes.

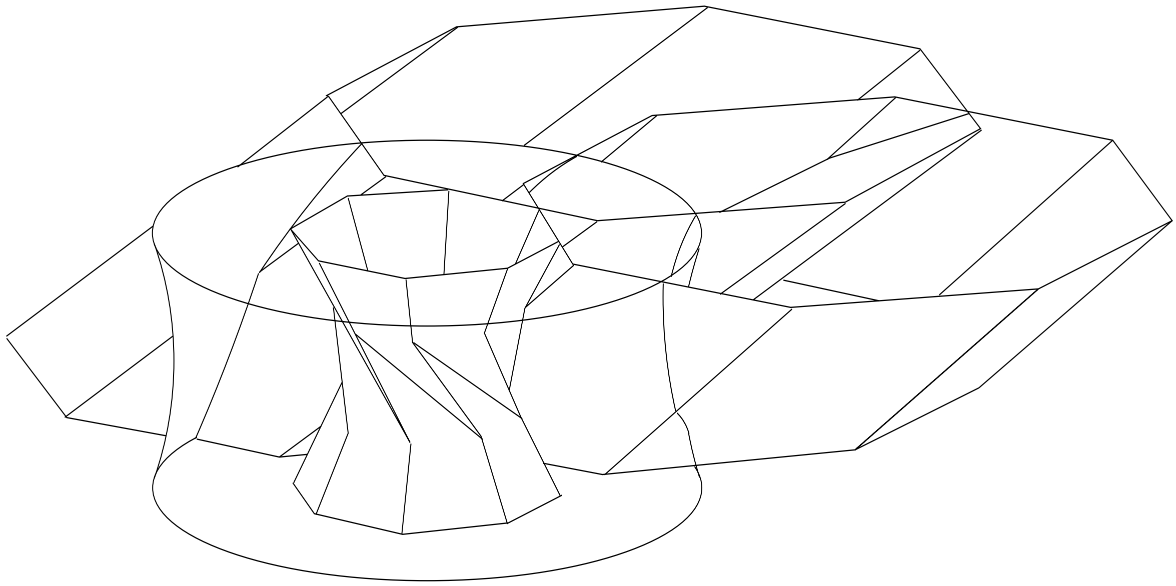
Im **Kapitel 3** berechne ich die Fundamentalbereiche für die Dreieckssingularitäten in den Serien E, Z und Q. Diese Berechnungen sollen dazu dienen, die Zusammenhänge zwischen den Fundamentalbereichen einerseits und den Arnoldschen Serien andererseits näher zu untersuchen. Die Zusammenstellung der Abbildungen der Fundamentalbereiche in Serien bestätigt die Vermutung, daß die kombinatorische Struktur der Fundamentalbereiche die Struktur der Serien widerspiegelt.

Im **Anhang** sind die Formeln und Fakten aus der (hyperbolischen) Trigonometrie, linearen Algebra und analytischen Geometrie zusammengefaßt, die bei den Rechnungen (auch ohne einen expliziten Hinweis auf den Anhang) oft benutzt wurden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die am Entstehen der vorliegenden Arbeit beteiligt waren. Ich danke Prof. Dr. Egbert Brieskorn, der mir dieses Thema eröffnet und die Arbeit daran durch sein Interesse und wertvolle Ratschläge begleitet hat. Dr. Ludwig Balke bin ich für zahlreiche Gespräche und wertvolle Anregungen dankbar. Dr. Thomas Fischer danke ich für die wunderbare Konstruktion, die er gefunden hat. Ich danke auch Dr. Claus Hertling, Dr. Frank Rothenhäusler und Anna Wienhard. Dem Graduiertenkolleg „Algebraische, analytische und geometrische Methoden und ihre Wechselwirkung in der modernen Mathematik“ danke ich für das Stipendium. Meinem Mann Ilya Dogolazky danke ich für das Layout dieses Textes und das Schreiben des Programms `off2ps`, das zur Erstellung der Abbildungen benutzt wurde. Auch meiner Tochter Rachil, meinen Eltern und meiner Großmutter danke ich für ihre Unterstützung.

1

Konstruktion der Fundamentalbereiche



Zuerst beschriebe ich in diesem Kapitel die Überlagerungen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ als Liegruppen und Lorentz-Raumformen sowie ihre metrischen Kegel, definiere Halbräume darin und studiere ihre Eigenschaften. Dann untersuche ich die Eigenschaften elliptischer Elemente in $\mathrm{PSU}(1,1)$ und ihrer Urbilder in $\mathrm{SU}(1,1)$ und $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$. Schließlich beschreibe ich die Konstruktion und beweise, daß die Konstruktion zu einer Pflasterung von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ durch Fundamentalbereiche der Operation der diskreten Untergruppe führt.

§1. Die Überlagerungen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ und ihre metrischen Kegel

Drei Modelle der hyperbolischen Ebene ermöglichen die Identifikation der Gruppe ihrer orientierungserhaltenden Isometrien mit drei verschiedenen Liegruppen. Für die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}$ gilt $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}) = \mathrm{PSU}(1,1) = \mathrm{SU}(1,1)/\{\pm 1\}$, für die obere Halbebene $\mathbb{H}$ gilt $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ und für das Hyperquadrikenmodell H^2 gilt $\mathrm{Isom}^+(H^2) = \mathrm{SO}(2,1)_0$. Damit sind diese Gruppen isomorph, es gilt $\mathrm{PSU}(1,1) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(2,1)_0$ und $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

In dieser Arbeit betrachte ich immer die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}$ als Modell der hyperbolischen Ebene. Es sei ρ der hyperbolische und d der euklidische Abstand auf $\mathbb{D}$. Es gilt

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Ein Element $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(1,1)$ mit $g \neq 1$ heißt *elliptisch, hyperbolisch* bzw. *parabolisch,* je nachdem ob der Betrag der Spur $|\operatorname{Spur}(g)| = 2 \cdot |\mathrm{Re}(a)|$ kleiner, größer oder gleich 2 ist. Ein elliptisches Element in $\mathrm{SU}(1,1)$ hat in $\bar{\mathbb{D}}$ genau einen Fixpunkt, der in $\mathbb{D}$ liegt. Ein hyperbolisches Element in $\mathrm{SU}(1,1)$ hat in $\bar{\mathbb{D}}$ genau zwei verschiedene Fixpunkte, die in $\partial\mathbb{D}$ liegen. Ein parabolisches Element in $\mathrm{SU}(1,1)$ hat in $\bar{\mathbb{D}}$ genau einen Fixpunkt, der in $\partial\mathbb{D}$ liegt.

Die Abbildung $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \mapsto (\frac{a}{|a|}, b)$ ist ein Homöomorphismus von $\mathrm{SU}(1,1)$ auf den offenen Volltorus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$, die Fundamentalgruppen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ und $\mathrm{SU}(1,1)$ sind also unendliche zyklische Gruppen. Damit ist eine zusammenhängende Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$ (als Liegruppe) bis auf Isomorphie durch die Anzahl der Blätter (endlich oder abzählbar unendlich) eindeutig bestimmt. Die unendlichblättrige Überlagerung ist die universelle Überlagerung. Die Zentren der Überlagerungen sind die Urbilder des Einselements von $\mathrm{PSU}(1,1)$.

Es sei M eine Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$ (als Liegruppe). Es sei k die Killingform auf M. Die Form $\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot k$ induziert eine vollständige biinvariante Lorentz-Metrik g auf M mit konstanter Krümmung 1, die pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist also eine Lorentz-Raumform (Terminologie nach [KR]). Ich werde gleich eine Isometrie zwischen $\mathrm{SU}(1,1)$ und einer geeigneten Pseudosphäre angeben, dadurch wird diese Aussage für $\mathrm{SU}(1,1)$ und damit auch für alle Überlagerungen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ klar. Der *metrische Kegel*

$$K(M) = (\mathbb{R}_+ \times M, dt^2 + t^2 \cdot g)$$

von (M,g) ist das triviale $\mathbb{R}_+$-Bündel über M mit der Metrik $dt^2 + t^2 \cdot g$. Der Kegel $K(M)$ trägt auch eine Liegruppenstruktur als Produkt der Liegruppen $\mathbb{R}_+$ und M. Die Lorentz-Mannigfaltigkeit M kann als 1-Schnitt in $K(M)$ aufgefaßt werden.

Die Bilinearform $((w_1,z_1),(w_2,z_2)) := \operatorname{Re}(w_1\bar{w}_2 - z_1\bar{z}_2)$ induziert eine pseudo-Riemannsche Metrik auf $\mathbb{C}^2$. Die total geodätischen Untermannigfaltigkeiten sind die affinen Unterräume. Ich betrachte die Pseudosphäre bezüglich dieser Bilinearform

$$G := \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$$

und den positiven Kegel

$$L := \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : |w| > |z|\} = \mathbb{R}_+ \cdot G$$

als pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit der (induzierten) Metrik der Signatur $(+,-,-)$ bzw. $(+,+,-,-)$. Die radiale Projektion $\Psi : L \to G$ ist ein trivialisierbares $\mathbb{R}_+$-Bündel über G. Die total geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Dimension 1 bzw. 2 in G sind die (nicht leeren) Schnitte von G mit den linearen Unterräumen der (reellen) Dimension 2 bzw. 3 in $\mathbb{C}^2$. Es sei $\tilde{G}$ bzw. $\tilde{L}$ die universelle Überlagerung von G bzw. L mit der pseudo-Riemannschen Metrik der Signatur $(+,-,-)$ bzw. $(+,+,-,-)$, die durch das Zurückziehen der Metrik auf G bzw. L entsteht.

Das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
K(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)) \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & K(\mathrm{SU}(1,1)) \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& \tilde{L} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Psi"'] & L \arrow[d, "\Psi"] & \\
& \tilde{G} \arrow[r, "\pi"] & G & \\
\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1) \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & \mathrm{SU}(1,1), \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

wobei die Abbildung $K(\mathrm{SU}(1,1)) \to L$ durch $(\lambda, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)) \mapsto (\lambda a, \lambda b)$ gegeben ist. Die diagonalen Abbildungen sind Isometrien und induzieren Liegruppenstrukturen auf den Mannigfaltigkeiten des inneren Quadrats. Das Element $e := (1,0)$ ist das neutrale Element in G. Es sei $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ das neutrale Element in $\tilde{G}$. Die horizontalen Abbildungen sind die universellen Überlagerungen von Liegruppen und lokale Isometrien. Die vertikalen Abbildungen sind die Bündelabbildungen der $\mathbb{R}_+$-Bündel. Die pseudo-Riemannschen Metriken auf den Totalräumen der vier $\mathbb{R}_+$-Bündel sind invariant unter der Multiplikation mit Elementen der zugehörigen Basis von links oder rechts. Die Basen der vier $\mathbb{R}_+$-Bündel sind Lorentz-Raumformen.

Es sei $\arg : \tilde{L} \to \mathbb{R}$ die Hochhebung mit $\arg(\tilde{e}) = 0$ der durch $(a,b) \mapsto \frac{a}{|a|}$ gegebenen Abbildung $L \to \mathbb{S}^1$.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{L} \arrow[r, "\arg"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
L \arrow[r] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die (universelle) Überlagerung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ durch $t \mapsto e^{it}$ gegeben. Die durch
$$g \mapsto (\pi(g), \arg(g))$$
gegebene Abbildung $\tilde{L} \to L \times \mathbb{R}$ ist injektiv. Für $g \in \tilde{G}$ gilt $\arg(g^{-1}) = -\arg(g)$. Das Element $c \in \pi^{-1}(-e)$ mit $\arg(c) = \pi$ ist ein Erzeugendes von $Z(\tilde{G}) \cong \mathbb{Z}$.

Bei der Beschreibung der Isometrien von G und $\tilde{G}$ zitiere ich [KR].

Notation. Es sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Gruppe der Isometrien $\mathrm{Isom}(M)$ von (M, g) enthält die Untergruppe $\mathrm{Isom}^+(M)$ der orientierungserhaltenden Isometrien und die Zusammenhangskomponente $\mathrm{Isom}_0(M)$ der Identität.

Proposition 1. *Für $g \in G$ sei $L_g, R_g, K_g : G \to G$ die Links- bzw. Rechtsmultiplikation bzw. die Konjugation mit dem Element g, also $L_g(h) = gh$, $R_g(h) = hg$, $K_g(h) = ghg^{-1}$ und $K_g = L_g \circ R_g^{-1}$. Es seien $\eta, \varepsilon : G \to G$ definiert durch $\eta((a,b)) = (\bar{a}, \bar{b})$ und $\varepsilon((a,b)) = (\bar{a}, -b)$. Die Abbildung ε ist die Inversenbildung in G, es gilt $\varepsilon(g) = g^{-1}$. Die Abbildungen $L_g, R_g, K_g, \eta, \varepsilon$ sind Isometrien von G, die Abbildungen K_g und η sind Automorphismen, die Abbildung ε ist ein Antiautomorphismus. Es gilt*
$$\mathrm{Isom}_0(G) = \langle L_a, R_b \mid a, b \in G \rangle \cong (G \times G)/\{(z,z) : z \in Z(G)\}$$
und
$$\mathrm{Isom}^+(G) = \langle \mathrm{Isom}_0(G), \eta \rangle, \quad \mathrm{Isom}(G) = \langle \mathrm{Isom}^+(G), \varepsilon \rangle = \langle \mathrm{Isom}^+(G), \eta, \varepsilon \rangle.$$

Proposition 2. *Für $g \in \tilde{G}$ sei $L_g, R_g, K_g : \tilde{G} \to \tilde{G}$ die Links- bzw. Rechtsmultiplikation bzw. die Konjugation mit dem Element g, also $L_g(h) = gh$, $R_g(h) = hg$, $K_g(h) = ghg^{-1}$ und $K_g = L_g \circ R_g^{-1}$. Es seien $\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ die Hochhebungen der Isometrien η bzw. ε von G mit $\tilde{\eta}(\tilde{e}) = \tilde{e}$ und $\tilde{\varepsilon}(\tilde{e}) = \tilde{e}$. Es gilt $\arg \circ \tilde{\varepsilon} = -\arg$ und $\arg \circ \tilde{\eta} = -\arg$. Die Abbildungen $L_g, R_g, K_g, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}$ sind Isometrien von $\tilde{G}$, die Abbildungen K_g und $\tilde{\eta}$ sind Automorphismen, die Abbildung $\tilde{\varepsilon}$ ist ein Antiautomorphismus. Es gilt*
$$\mathrm{Isom}_0(\tilde{G}) = \langle L_a, R_b \mid a, b \in \tilde{G} \rangle \cong (\tilde{G} \times \tilde{G})/\{(z,z) : z \in Z(\tilde{G})\}$$
und
$$\mathrm{Isom}^+(\tilde{G}) = \langle \mathrm{Isom}_0(\tilde{G}), \tilde{\eta} \rangle, \quad \mathrm{Isom}(\tilde{G}) = \langle \mathrm{Isom}^+(\tilde{G}), \tilde{\varepsilon} \rangle = \langle \mathrm{Isom}^+(\tilde{G}), \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon} \rangle.$$

Bemerkung. Die Isometrie K_g mit $g \in \tilde{G}$ läßt sich durch $K_g(h) := ghg^{-1}$ für $h \in \tilde{L}$ zu einer Isometrie von $\tilde{L}$ fortsetzen. Auch die Isometrie $\tilde{\eta}$ von $\tilde{G}$ kann durch $\tilde{\eta}(\lambda \cdot h) := \lambda \cdot \tilde{\eta}(h)$ für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und $h \in \tilde{G}$ zu einer Isometrie von $\tilde{L}$ fortgesetzt werden. Diese Isometrien bezeichne ich auch mit K_g und $\tilde{\eta}$.

§2. Eingebettete Tangentialräume und Halbräume

Die Hyperebene $\hat{E}_g := \{y \in \mathbb{C}^2 : (y, g) = 1\}$ mit $g \in G$ zerlegt $\mathbb{C}^2$ in zwei Halbräume
$$\hat{H}_g := \{y \in \mathbb{C}^2 : (y,g) \leqslant 1\} \quad \text{und} \quad \hat{I}_g := \{y \in \mathbb{C}^2 : (y,g) \geqslant 1\}.$$
Dabei ist $\hat{H}_g$ der Halbraum, der den Punkt 0 enthält. Es sei ferner für $g \in G$
$$E_g = \hat{E}_g \cap L, \quad H_g = \hat{H}_g \cap L, \quad I_g = \hat{I}_g \cap L.$$
Die Untermannigfaltigkeit E_g bzw. $\hat{E}_g$ ist der *eingebettete Tangentialraum* in L bzw. $(\mathbb{C}^2, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ an G im Punkte g, das heißt die maximale total geodätische Untermannigfaltigkeit, die im Punkte g tangential an G ist.

Proposition 3. *Es gilt*

$$\hat{E}_e = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(w) = 1\},$$
$$\hat{I}_e = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(w) \geqslant 1\},$$
$$\hat{H}_e = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(w) \leqslant 1\}.$$

Es gilt ferner

$$E_e = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(w) = 1,\ |z| < |w|\},$$
$$I_e = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(w) \geqslant 1,\ |z| < |w|\},$$
$$H_e = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(w) \leqslant 1,\ |z| < |w|\}. \blacksquare$$

Proposition 4. *Für $a, g \in G$ gilt $a \cdot E_g = E_{ag}$, $a \cdot I_g = I_{ag}$ und $a \cdot H_g = H_{ag}$.* ■

Proposition 5. *Für jedes $g \in G$ liegt die gerade Strecke zwischen g und jedem Punkt von I_g in I_g und die gerade Strecke zwischen g und jedem Punkt von E_g in E_g. (Diese Aussage gilt nicht für H_g.)*

Beweis. Aus der Proposition 3 folgt die Behauptung für $g = e$, mit Hilfe der Proposition 4 folgt dann die Behauptung für jedes $g \in G$. ■

Korollar 6. *Die Mengen E_g und I_g sind kontrahierbar für jedes $g \in G$.* ■

Für $g \in \tilde{G}$ und $\bar{g} := \pi(g) \in G$ sei $\tilde{E}_g$ bzw. $\tilde{I}_g$ die Zusammenhangskomponente von $\pi^{-1}(E_{\bar{g}})$ bzw. $\pi^{-1}(I_{\bar{g}})$, die g enthält, und $\tilde{H}_g := \tilde{L} - (\tilde{I}_g)^\circ = (\tilde{L} - \tilde{I}_g) \cup \tilde{E}_g$. Die Untermannigfaltigkeit $\tilde{E}_g$ ist der eingebettete Tangentialraum in $\tilde{L}$ an $\tilde{G}$ im Punkte g, das heißt die (maximale) total geodätische Untermannigfaltigkeit, die im Punkte g tangential an $\tilde{G}$ ist. Die Untermannigfaltigkeit $\tilde{E}_g$ zerlegt $\tilde{L}$ in $\tilde{H}_g$ und $\tilde{I}_g$. Ich spreche dann auch von Halbräumen $\tilde{I}_g$ und $\tilde{H}_g$ in $\tilde{L}$.

Proposition 7. *Für $a, g \in \tilde{G}$ gilt $a \cdot \tilde{E}_g = \tilde{E}_{ag}$, $a \cdot \tilde{I}_g = \tilde{I}_{ag}$ und $a \cdot \tilde{H}_g = \tilde{H}_{ag}$.* ■

Proposition 8. *Es gilt*

$$\tilde{E}_{\tilde{e}} = \{g \in \tilde{L} : \pi(g) \in E_e,\ |\arg(g)| < \pi/2\},$$
$$\tilde{I}_{\tilde{e}} = \{g \in \tilde{L} : \pi(g) \in I_e,\ |\arg(g)| < \pi/2\},$$
$$\tilde{H}_{\tilde{e}} = \{g \in \tilde{L} : \pi(g) \in H_e,\ |\arg(g)| < \pi/2\} \dot{\cup} \{g \in \tilde{L} : |\arg(g)| \geqslant \pi/2\}.$$

Es gilt ferner

$$\tilde{H}_{\tilde{e}} = \pi^{-1}(H_e) \cup \bigcup_{g \in \pi^{-1}(e) - \{\tilde{e}\}} \tilde{I}_g. \blacksquare$$

Proposition 9. *Für $g \in \tilde{G}$ und $\bar{g} := \pi(g) \in G$ gilt $\pi(\tilde{E}_g) = E_{\bar{g}}$, $\pi(\tilde{I}_g) = I_{\bar{g}}$ und $\pi(\tilde{H}_g) = L$. Dabei sind $\pi|_{\tilde{E}_g} : \tilde{E}_g \to E_{\bar{g}}$ und $\pi|_{\tilde{I}_g} : \tilde{I}_g \to I_{\bar{g}}$ Homöomorphismen.*

Beweis. Aus der Proposition 8 folgt die Behauptung für $g = \tilde{e}$, mit Hilfe der Proposition 7 folgt dann die Behauptung für jedes $g \in \tilde{G}$. ■

Definition. Ein *partieller Schnitt* s im Bündel $\Psi : \tilde{L} \to \tilde{G}$ ist eine stetige Abbildung $s : \tilde{G} \to \hat{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Die Teilmenge $\mathrm{Tr}(s) = \{a \in \tilde{G} : s(a) \neq +\infty\}$ von $\tilde{G}$ ist der *Träger* des partiellen Schnitts s. Die Teilmengen

$$\overline{\mathrm{Gr}}(s) = \{\lambda \cdot a \in \tilde{L} : a \in \tilde{G},\ \lambda \geqslant s(a)\},$$
$$\mathrm{Gr}(s) = \{s(a) \cdot a \in \tilde{L} : a \in \mathrm{Tr}(s)\},$$
$$\underline{\mathrm{Gr}}(s) = \{\lambda \cdot a \in \tilde{L} : a \in \tilde{G},\ \lambda \leqslant s(a)\}$$

von $\tilde{L}$ sind der *Obergraph,* der *Graph* bzw. der *Untergraph* des partiellen Schnitts s.

Proposition 10. *Es sei s ein partieller Schnitt. Dann gilt $\Psi(\mathrm{Gr}(s)) = \Psi(\overline{\mathrm{Gr}}(s)) = \mathrm{Tr}(s)$ und $\Psi(\underline{\mathrm{Gr}}(s)) = \tilde{G}$, und die Abbildung $\Psi|_{\mathrm{Gr}(s)} : \mathrm{Gr}(s) \to \mathrm{Tr}(s)$ ist ein Homöomorphismus.* ∎

Proposition 11. *Es sei s ein partieller Schnitt mit Träger $\mathrm{Tr}(s) = \tilde{G}$. Dann sind $\mathrm{Gr}(s)$, $\underline{\mathrm{Gr}}(s)$ und $\overline{\mathrm{Gr}}(s)$ abgeschlossen, und es gilt $\partial\underline{\mathrm{Gr}}(s) = \partial\overline{\mathrm{Gr}}(s) = \mathrm{Gr}(s)$.* ∎

Proposition 12. *Es sei $(s_i)_{i\in I}$ eine Familie von partiellen Schnitten.*
Ist die Familie $(\underline{\mathrm{Gr}}(s_i))_{i\in I}$ lokal endlich, so ist $\max_{i\in I} s_i$ ein partieller Schnitt mit

$$\mathrm{Tr}(\max_{i\in I} s_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Tr}(s_i), \quad \underline{\mathrm{Gr}}(\max_{i\in I} s_i) = \bigcup_{i\in I} \underline{\mathrm{Gr}}(s_i), \quad \overline{\mathrm{Gr}}(\max_{i\in I} s_i) = \bigcap_{i\in I} \overline{\mathrm{Gr}}(s_i).$$

Ist die Familie $(\overline{\mathrm{Gr}}(s_i))_{i\in I}$ lokal endlich, so ist $\min_{i\in I} s_i$ ein partieller Schnitt mit

$$\mathrm{Tr}(\min_{i\in I} s_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Tr}(s_i), \quad \underline{\mathrm{Gr}}(\min_{i\in I} s_i) = \bigcap_{i\in I} \underline{\mathrm{Gr}}(s_i), \quad \overline{\mathrm{Gr}}(\min_{i\in I} s_i) = \bigcup_{i\in I} \overline{\mathrm{Gr}}(s_i).$$ ∎

Proposition 13. *Zu jedem $g \in \tilde{G}$ gibt es einen partiellen Schnitt s_g mit $\tilde{E}_g = \mathrm{Gr}(s_g)$, $\tilde{H}_g = \underline{\mathrm{Gr}}(s_g)$ und $\tilde{I}_g = \overline{\mathrm{Gr}}(s_g)$. Es gilt $\mathrm{Tr}(s_g) = g \cdot \mathrm{Tr}(s_e)$ und*

$$\mathrm{Tr}(s_e) = \{a \in \tilde{G} : |\arg(a)| < \pi/2\}.$$

Beweis. Für $g \in \tilde{G}$ mit $\pi(g) = (a, b)$ sei $s_e(g) := \frac{1}{\mathrm{Re}(a)}$, falls $|\arg(g)| < \frac{\pi}{2}$, und $s_e(g) := +\infty$ sonst. Dadurch wird ein partieller Schnitt s_e definiert. Aus den Propositionen 3 und 8 folgt $\tilde{E}_{\tilde{e}} = \mathrm{Gr}(s_e)$, $\tilde{H}_{\tilde{e}} = \underline{\mathrm{Gr}}(s_e)$ und $\tilde{I}_{\tilde{e}} = \overline{\mathrm{Gr}}(s_e)$. Für $g \in \tilde{G}$ gilt $\tilde{E}_g = \mathrm{Gr}(s_g)$, $\tilde{H}_g = \underline{\mathrm{Gr}}(s_g)$ und $\tilde{I}_g = \overline{\mathrm{Gr}}(s_g)$, wobei der partielle Schnitt s_g durch $s_g(a) := s_e(g^{-1}a)$ definiert wird. ∎

§3. Elliptische Elemente und ihre Hochhebungen

Definition. Es sei $x \in \mathbb{D}$.

Die Abbildung $\rho_x : \mathbb{R} \to \mathrm{PSU}(1,1) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ ordne $t \in \mathbb{R}$ die *Drehung* in x um den Winkel t zu, also das (für $t \neq 0$ elliptische) Element mit Fixpunkt x und Ableitung e^{it} in x.

Die Abbildung $r_x : \mathbb{R} \to G$ sei definiert durch

$$r_x(t) := \Big(\cos\frac{t}{2} + i\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\sin\frac{t}{2}, -i\frac{2x}{1-|x|^2}\sin\frac{t}{2}\Big).$$

Die Abbildung $\tilde{r}_x : \mathbb{R} \to \tilde{G}$ sei die Hochhebung von r_x mit $\tilde{r}_x(0) = \tilde{e}$.

Bemerkung. Für $x \neq 0$ gilt nach (A6.2)

$$r_x(t) = \Big(\cos\frac{t}{2} + i\cosh\rho(0,x)\sin\frac{t}{2}, -i\frac{x}{|x|}\sinh\rho(0,x)\sin\frac{t}{2}\Big).$$

Die Abbildungen ρ_x und r_x sind Homomorphismen. Die Elemente $\pm r_x(t)$ und $\tilde{r}_x(t)$ wirken auf $\mathbb{D}$ durch die Drehung in x um den Winkel t. Es gilt

$$\rho_x(2\pi) = \mathrm{id} \ \text{ und } \ r_x(2\pi) = -e$$

für jedes $x \in \mathbb{D}$. Die Beweise dieser Aussagen findet man in [P, §2, Prop. 1 und 2].

Proposition 14. *Die Abbildung* $\tilde{r}_x$ *ist ein Homomorphismus.*

Beweis. Es sei $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Die durch $t \mapsto \tilde{r}_x(t) \cdot \tilde{r}_x(\psi)$ und $t \mapsto \tilde{r}_x(t+\psi)$ gegebenen Wege $[0,\varphi] \to \tilde{G}$ sind Hochhebungen des durch $t \mapsto r_x(t) \cdot r_x(\psi) = r_x(t+\psi)$ gegebenen Weges $[0,\varphi] \to G$ mit Anfangspunkt $\tilde{r}_x(\psi)$, damit haben die beiden Wege auch den gleichen Endpunkt, also gilt $\tilde{r}_x(\varphi) \cdot \tilde{r}_x(\psi) = \tilde{r}_x(\varphi+\psi)$. ∎

Proposition 15. *Es gilt* $r_0(t) = (e^{it/2}, 0)$ *und* $\arg(\tilde{r}_0(2t)) = t$.

Beweis. Der Weg $\arg(\tilde{r}_0(2t))$ in $\mathbb{R}$ ist die Hochhebung des Weges e^{it} in $\mathbb{S}^1$ mit dem Wert 0 bei $t = 0$, damit gilt $\arg(\tilde{r}_0(2t)) = t$. ∎

Proposition 16. *Gilt* $g(0) = 0$ *oder* $h(0) = 0$, *so folgt* $\arg(g \cdot h) = \arg(g) + \arg(h)$.

Beweis. Es sei $g(0) = 0$, dann gilt $g = \tilde{r}_0(2\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Es sei $\pi(h) = (a, b)$. Der Weg $\arg(\tilde{r}_0(2t) \cdot h)$ in $\mathbb{R}$ ist die Hochhebung des Weges $e^{it} \cdot \frac{a}{|a|}$ in $\mathbb{S}^1$ mit dem Wert $\arg(h)$ bei $t = 0$, damit gilt $\arg(\tilde{r}_0(2t) \cdot h) = t + \arg(h)$ und folglich $\arg(g \cdot h) = \arg(g) + \arg(h)$. Im Falle $h(0) = 0$ verfährt man analog. ∎

Proposition 17. *Es gilt* $\tilde{r}_x(2\pi) = c$ *für jedes* $x \in \mathbb{D}$.

Beweis. Das Element $\tilde{r}_x(2\pi)$ ist ein Urbild von $r_x(2\pi) = -e$, liegt also im Zentrum von $\tilde{G}$. Die durch $x \mapsto \tilde{r}_x(2\pi)$ gegebene Abbildung $\mathbb{D} \to Z(\tilde{G})$ ist stetig, und $Z(\tilde{G})$ ist diskret, also ist diese Abbildung konstant. Damit gilt $\tilde{r}_x(2\pi) = \tilde{r}_0(2\pi)$ für jedes $x \in \mathbb{D}$. Aus der Proposition 15 folgt $\tilde{r}_0(2\pi) = c$. ∎

Proposition 18. *Es gilt* $\arg(\tilde{r}_x(2t)) \in (0, \pi)$ *für* $t \in (0, \pi)$ *und* $x \in \mathbb{D}$.

Beweis. Der Weg $\gamma(t) := \arg(\tilde{r}_x(2t))$ in $\mathbb{R}$ ist stetig, es gilt $\gamma(0) = \arg(\tilde{e}) = 0$, $\gamma(\pi) = \arg(c) = \pi$ und $\gamma(t) \notin \{0, \pi\}$ für $t \in (0, \pi)$. Damit gilt $\gamma(t) \in (0, \pi)$ für $t \in (0, \pi)$. ∎

Bemerkung. Es gilt $\arg(\tilde{r}_x(2t + 4\pi j)) = \arg(\tilde{r}_x(2t)) + 2\pi j$ für $t \in [-\pi, \pi)$, $j \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{D}$.

Proposition 19. *Es gilt* $\tilde{\eta}(\tilde{r}_x(t)) = \tilde{r}_x(-t)$ *für* $x \in (-1, 1) \subset \mathbb{D}$. ∎

§4. Diskrete Untergruppen von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$

Eine diskrete Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ heißt eine *Fuchssche Gruppe.* Eine Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ ist genau dann diskret, endlich erzeugt und cokompakt, wenn Γ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{D}$ operiert und $\mathbb{D}/\Gamma$ eine kompakte Riemannsche Fläche ist. Die Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma$ ist dann eine über endlich vielen Punkten verzweigte Überlagerung von Riemannschen Flächen. Die *Signatur* einer diskreten, endlich erzeugten, cokompakten Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ ist $(g; p_1, \ldots, p_m)$, wobei g das Geschlecht der Riemannschen Fläche $\mathbb{D}/\Gamma$ ist; m ist die Anzahl der Verzweigungspunkte der Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma$ und $p_1, \ldots, p_m$ sind die Verzweigungsordnungen dieser Punkte. Ein Tupel $(g; p_1, \ldots, p_m)$ ist genau dann Signatur einer Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$, wenn gilt

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 2(g-1) + m.$$

Damit sind genau die Tupel $(1;)$, $(0;2,2,2,2)$, $(0;2,2,p)$ mit $p \geqslant 2$, $(0;2,3,p)$ mit p aus $\{3,4,5,6\}$, $(0;2,4,4)$, $(0;3,3,3)$, $(0;)$, $(0;p)$ und $(0;p,q)$ keine Signaturen diskreter Untergruppen von $\mathrm{PSU}(1,1)$.

Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe von $\tilde{G}$ und Γ das Bild von $\tilde{\Gamma}$ in $\mathrm{PSU}(1,1)$. Die *Stufe* von $\tilde{\Gamma}$ sei der Index von $\tilde{\Gamma} \cap Z(\tilde{G})$ in $Z(\tilde{G})$. Wegen $Z(\tilde{G}) \cong \mathbb{Z}$ ist entweder $k := [Z(\tilde{G}) : Z(\tilde{\Gamma})]$ endlich und damit $Z(\tilde{\Gamma}) = kZ(\tilde{G})$, oder $[Z(\tilde{G}) : Z(\tilde{\Gamma})] = \infty$ und damit $Z(\tilde{\Gamma}) = \{e\}$.

Ich nehme nun an, daß $\tilde{\Gamma}$ einen Fixpunkt $u \in \mathbb{D}$ der Ordnung $p := |\Gamma_u| < \infty$ hat. Dann gilt $\rho_u(2\pi/p) \in \Gamma_u$ und damit $\tilde{r}_u(2\pi/p)c^m \in \tilde{\Gamma}_u$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Da aber $(\tilde{r}_u(2\pi/p)c^m)^p = c^{1+mp} \in Z(\tilde{G}) - \{\tilde{e}\}$ gilt, folgt $Z(\tilde{\Gamma}) \neq \{e\}$. Eine Untergruppe mit einem Fixpunkt endlicher Ordnung hat also endliche Stufe.

Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe endlicher Stufe k in $\tilde{G}$. Es sei

$$\bar{\pi} : \tilde{G} = \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1) \to \mathrm{PSU}(1,1)$$

die (über π faktorisierende) universelle Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$. Die Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ ist genau dann diskret, wenn ihr Bild $\Gamma := \bar{\pi}(\tilde{\Gamma})$ in $\mathrm{PSU}(1,1)$ diskret ist. Mehr zu Untergruppen von $\tilde{G}$ findet man in [KR] und [RV].

Proposition 20. *Es gilt* $k = [Z(\tilde{G}) : \tilde{\Gamma} \cap Z(\tilde{G})] = [\bar{\pi}^{-1}(\Gamma_u) : \tilde{\Gamma}_u] = [\bar{\pi}^{-1}(\Gamma) : \tilde{\Gamma}]$.

Beweis. Es sei Δ eine Untergruppe von $\Gamma = \bar{\pi}(\tilde{\Gamma})$ und $\tilde{\Delta} := \tilde{\Gamma} \cap \bar{\pi}^{-1}(\Delta)$. Die Untergruppe $Z := Z(\tilde{G})$ ist im Normalisator der Untergruppe $\tilde{\Delta}$ enthalten, also gilt

$$[Z \cdot \tilde{\Delta} : \tilde{\Delta}] = [Z : \tilde{\Delta} \cap Z].$$

Wegen $Z \cdot \tilde{\Delta} = \bar{\pi}^{-1}(\Delta)$ und $\tilde{\Delta} \cap Z = \tilde{\Gamma} \cap Z$ gilt

$$[\bar{\pi}^{-1}(\Delta) : \tilde{\Delta}] = [Z : \tilde{\Gamma} \cap Z] = k.$$

Für $\Delta = \Gamma$ gilt $\tilde{\Delta} = \tilde{\Gamma} \cap \bar{\pi}^{-1}(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$ und damit $[\bar{\pi}^{-1}(\Gamma) : \tilde{\Gamma}] = k$, und für $\Delta = \Gamma_u$ gilt $\tilde{\Delta} = \tilde{\Gamma} \cap \bar{\pi}^{-1}(\Gamma_u) = \tilde{\Gamma}_u$ und damit $[\bar{\pi}^{-1}(\Gamma_u) : \tilde{\Gamma}_u] = k$. ∎

§5. Elemente der Konstruktion

Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine diskrete Untergruppe der Stufe k in $\tilde{G}$. Die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ operiert auf $\tilde{G}$ durch Linksmultiplikation. Es sei $u \in \mathbb{D}$ ein Fixpunkt der Gruppe $\tilde{\Gamma}$ (und ihres Bildes $\Gamma := \bar{\pi}(\tilde{\Gamma})$). Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $u = 0$ gilt. Es sei $p := |\Gamma_u|$ die Ordnung von u. Es gilt $p < \infty$, denn das Bild Γ von $\tilde{\Gamma}$ in $\mathrm{PSU}(1,1)$ ist diskret. Das Element $\tilde{r}_u(2\pi/p)$ ist ein Erzeugendes der zyklischen Untergruppe $\bar{\pi}^{-1}(\Gamma_u)$ von $\tilde{G}$. Nach der Proposition 20 gilt $k = [\bar{\pi}^{-1}(\Gamma_u) : \tilde{\Gamma}_u]$, also ist das Element

$$r_d := (\tilde{r}_u(2\pi/p))^k = \tilde{r}_u(4\vartheta_d)$$

mit $\vartheta_d := \frac{\pi k}{2p}$ ein Erzeugendes der zyklischen Untergruppe $\tilde{\Gamma}_u$. Für $a \in \tilde{L}$ gilt

$$\arg(r_d \cdot a) = \arg(a) + 2\vartheta_d.$$

Voraussetzung für die Konstruktion. Die Ordnung $|\Gamma_u|$ des Fixpunktes u sei größer als die Stufe von $\tilde{\Gamma}$, es gelte also $p > k$.

Aus dieser Voraussetzung folgt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} < \frac{\pi}{2}$.

Proposition 21. *Die Familie* $(\tilde{I}_g)_{g\in\tilde{\Gamma}_u}$ *ist lokal endlich.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus $\Psi(\tilde{I}_{\tilde{e}}) = \{a \in \tilde{G} : |\arg(a)| < \pi/2\}$, $\Psi(\tilde{I}_g) = g\cdot\Psi(\tilde{I}_{\tilde{e}})$ und $\arg(r_d\cdot a) = \arg(a) + 2\vartheta_d$. ∎

Definition. Für $x \in \tilde{\Gamma}(u) = \Gamma(u)$ sei $T(x) := \{g \in \tilde{\Gamma} : gu = x\}$,

$$Q_x := \bigcap_{g\in T(x)} \tilde{H}_g \quad\text{und}\quad R_x := \bigcup_{g\in T(x)} \tilde{I}_g.$$

Proposition 22. *Es gilt* $T(u) = \tilde{\Gamma}_u$. *Es sei* $x \in \tilde{\Gamma}(u)$ *und* $a \in T(x)$. *Dann gilt* $T(x) = a\cdot T(u)$. *Aus der Proposition 7 folgt* $Q_x = a\cdot Q_u$ *und* $R_x = a\cdot R_u$. ∎

§6. Die Mengen Q_x

Proposition 23. *Für* $(w,z)\in\mathbb{C}^2$ *gilt*

(1) $|w| \leqslant 1 \Rightarrow \pi^{-1}((w,z)) \subset Q_u$,
(2) $(w,z)\in\pi(Q_u) \Rightarrow |w| \leqslant \frac{1}{\cos\vartheta_d}$.

Beweis.

(1) Es sei $g = (w,z) \in L$ mit $|w| \leqslant 1$. Dann gilt $g \in H_a$ für alle $a\in\Gamma_u$ und damit $\pi^{-1}(g) \subset \tilde{H}_a$ für alle $a \in \tilde{\Gamma}_u$, also gilt $\pi^{-1}(g)\subset Q_u$.
(2) Es sei $g \in Q_u$ und $(w,z) = \pi(g) \in \pi(Q_u)$. Wegen $\arg(r_d\cdot g) = \arg(g) + 2\vartheta_d$ gibt es ein $j\in\mathbb{Z}$ mit $|\arg(r_d^j\cdot g)| \leqslant \vartheta_d$. Es sei $(w',z') := \pi(r_d^j\cdot g)$. Es gilt $|w| = |w'|$. Es gilt ferner

$$r_d^j\cdot g \in r_d^j\cdot Q_u = Q_{r_d^j(u)} = Q_u \subset \tilde{H}_{\tilde{e}}.$$

Aus $r_d^j\cdot g\in\tilde{H}_{\tilde{e}}$ und $|\arg(r_d^j\cdot g)| \leqslant \vartheta_d < \pi/2$ folgt

$$|w'| = \frac{Re(w')}{\cos(\arg(r_d^j\cdot g))} \leqslant \frac{1}{\cos\vartheta_d}. \;∎$$

Proposition 24. *Für* $x\in\tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$ *und* $(w,z)\in L$ *gilt*

$$(w,z)\in\pi(Q_x) \Rightarrow |w - x\bar{z}| \leqslant \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos\vartheta_d} \Rightarrow ||w| - |x|\cdot|z|| \leqslant \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos\vartheta_d}$$

und

$$\left|z - \frac{\bar{w}}{\bar{x}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x|} \Rightarrow \pi^{-1}((w,z))\subset Q_x.$$

Beweis. Es sei $g = (a,b) \in G$ mit $gx = u$. Man rechnet leicht nach, daß dann $b = -ax$ und $|a| = \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}$ gilt. Es sei $(w,z)\in\mathbb{C}^2$ und $(w',z') := g\cdot(w,z)$. Nach der Proposition 22 gilt $\pi(Q_u) = g\pi(Q_x)$ und damit $(w,z)\in\pi(Q_x) \iff (w',z')\in\pi(Q_u)$. Dabei gilt

$$|w'| = |aw + b\bar{z}| = |aw - ax\bar{z}| = \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\cdot|w - x\bar{z}|.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Proposition 23. ∎

Korollar 25. *Für $x \in \tilde{\Gamma}(u) \backslash \{u\}$ und $(w,z) \in \pi(Q_x)$ gilt*

$$|w| - |z| < \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos \vartheta_d}.$$

Beweis. Wegen $|x| < 1$ gilt $|w| - |z| < |w| - |x| \cdot |z|$. Die Behauptung folgt nun mit Hilfe der Proposition 24. ∎

§7. Die Konstruktion

Ich formuliere nun das erste Hauptergebnis der Arbeit. Der Beweis ergibt sich aus den nachfolgenden Lemmata und Propositionen.

Satz 26. *Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine diskrete Untergruppe endlicher Stufe in $\tilde{G}$ mit einem Fixpunkt $u \in \mathbb{D}$. Die Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ operiert auf $\tilde{G}$ durch Linksmultiplikation. Es sei Γ das Bild von $\tilde{\Gamma}$ in* $\mathrm{PSU}(1,1)$. *Es sei die Stufe von $\tilde{\Gamma}$ kleiner als die Ordnung $|\Gamma_u|$ des Fixpunktes. Es sei $T(x) = \{g \in \tilde{\Gamma} : gu = x\}$ und $Q_x = \bigcap_{g \in T(x)} \tilde{H}_g$ für $x \in \tilde{\Gamma}(u)$. Es sei*

$$P = \bigcup_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} Q_x.$$

Dann gilt: Der Rand von P ist invariant unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$. Es sei $g \in \tilde{\Gamma}$. Die Teilmenge

$$F_g = \mathrm{Cl}_{\partial P}(\mathrm{Int}_{\partial P}(\tilde{E}_g \cap \partial P))$$

ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf ∂P. Die Projektion $\Psi : \tilde{L} \to \tilde{G}$ induziert einen $\tilde{\Gamma}$-äquivarianten Homöomorphismus $\Psi|_{\partial P} : \partial P \to \tilde{G}$. Die Teilmenge

$$\mathcal{F}_g = \Psi(F_g)$$

ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$. Die Überdeckung $(\mathcal{F}_g)_{g \in \tilde{\Gamma}}$ von $\tilde{G}$ ist lokal endlich.

Notation. Weiter in diesem Abschnitt bezeichne Int bzw. Cl das Innere bzw. die abgeschlossene Hülle bezüglich ∂P.

Lemma 27. *Die Familie $(\pi(Q_x))_{x \in \tilde{\Gamma}(u)}$ ist lokal endlich in L.*

Beweis. Es sei $(w_0, z_0) \in L$. Man wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $|w_0| - |z_0| > \varepsilon$. Dann ist die Menge

$$U := \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : |w| - |z| > \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von (w_0, z_0). Für $x \in \tilde{\Gamma}(u) \backslash \{u\}$ mit $|x|$ groß genug gilt nach Proposition 25

$$|w| - |z| \leqslant \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos \vartheta_d} < \varepsilon$$

für alle $(w,z) \in \pi(Q_x)$ und damit $\pi(Q_x) \cap U = \varnothing$. Zu jedem $(w_0, z_0) \in L$ gibt es also eine Umgebung U in L und eine Zahl $R \in (0,1)$ derart, daß nur die Teilmengen $\pi(Q_x)$ mit $|x| \leqslant R$ die Umgebung U schneiden können. Die Menge $\{x \in \tilde{\Gamma}(u) : |x| \leqslant R\}$ ist aber endlich, da $\tilde{\Gamma}$ diskret ist. ∎

Lemma 28. *Die Familie $(Q_x)_{x\in\tilde\Gamma(u)}$ ist lokal endlich.*

Beweis. Es sei $a \in \tilde L$. Nach Lemma 27 existiert eine Umgebung U von $\pi(a)$, die nur für endlich viele $x \in \tilde\Gamma(u)$ die Menge $\pi(Q_x)$ schneidet. Ist aber die Menge $\pi^{-1}(U)\cap Q_x$ nicht leer, so auch $U \cap \pi(Q_x)$. Damit schneidet die Umgebung $\pi^{-1}(U)$ von a nur für endlich viele $x \in \tilde\Gamma(u)$ die Menge Q_x. ∎

Proposition 29. *$\Psi|_{\partial P} : \partial P \to \tilde G$ ist ein $\tilde\Gamma$-äquivarianter Homöomorphismus.*

Beweis. Die Äquivarianz von $\Psi|_{\partial P}$ folgt aus der Äquivarianz von Ψ. Für $g \in \tilde G$ gilt $\tilde H_g = \underline{\mathrm{Gr}}(s_g)$ und $\tilde I_g = \overline{\mathrm{Gr}}(s_g)$. Die Familie $(\tilde I_g)_{g\in T(x)}$ ist nach der Proposition 21 lokal endlich, es gilt $\tilde H_g = \underline{\mathrm{Gr}}(s_g)$ und $\tilde I_g = \overline{\mathrm{Gr}}(s_g)$, also ist $s_x := \min\limits_{g\in T(x)} s_g$ nach der Proposition 12 ein partieller Schnitt mit

$$\underline{\mathrm{Gr}}(s_x) = \bigcap_{g\in T(x)} \tilde H_g = Q_x, \quad \overline{\mathrm{Gr}}(s_x) = \bigcup_{g\in T(x)} \tilde I_g = R_x, \quad \mathrm{Tr}(s_x) = \bigcup_{g\in T(x)} \mathrm{Tr}(s_g).$$

Es sei $a \in T(x)$. Wegen $\mathrm{Tr}(s_g) = g \cdot \mathrm{Tr}(s_e)$ gilt

$$\mathrm{Tr}(s_x) = T(x) \cdot \mathrm{Tr}(s_e) = (a \cdot \tilde\Gamma_u) \cdot \mathrm{Tr}(s_e) = a \cdot (\tilde\Gamma_u \cdot \mathrm{Tr}(s_e)).$$

Zu jedem $g \in \tilde G$ gibt es wegen $\arg(r_d \cdot g) = \arg(g) + 2\vartheta_d$ ein $j \in \mathbb{Z}$ derart, daß $|\arg(r_d^j \cdot g)| \leqslant \vartheta_d < \pi/2$ und damit $r_d^j \cdot g \in \mathrm{Tr}(s_e)$ gilt. Daraus folgt $\tilde\Gamma_u \cdot \mathrm{Tr}(s_e) = \tilde G$ und damit $\mathrm{Tr}(s_x) = a \cdot \tilde G = \tilde G$. Die Familie $(Q_x)_{x\in\tilde\Gamma(u)}$ ist nach dem Lemma 28 lokal endlich, es gilt $Q_x = \underline{\mathrm{Gr}}(s_x)$, also ist $s := \max\limits_{x\in\tilde\Gamma(u)} s_x$ nach der Proposition 12 ein partieller Schnitt mit

$$\underline{\mathrm{Gr}}(s) = \bigcup_{x\in\tilde\Gamma(u)} Q_x = P, \quad \overline{\mathrm{Gr}}(s) = \bigcap_{x\in\tilde\Gamma(u)} R_x, \quad \mathrm{Tr}(s) = \bigcap_{x\in\tilde\Gamma(u)} \mathrm{Tr}(s_x) = \tilde G.$$

Aus der Proposition 10 folgt nun die Behauptung. ∎

Proposition 30. *F_g ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde\Gamma$ auf ∂P. Die Überdeckung $(F_g)_{g\in\tilde\Gamma}$ ist lokal endlich (in ∂P).*

Beweis.

(1) Es gilt

$$\mathrm{Cl} \bigcup_{g\in\tilde\Gamma} \mathrm{Int}\, F_g = \partial P :$$

Es sei $a \in \partial P$. Nach Lemma 28 existieren Elemente $g_1, \ldots, g_n \in \tilde\Gamma$ und eine Umgebung U von a in $\tilde L$ derart, daß gilt

$$\partial P \cap U = \bigcup_{i=1}^{n} (\tilde E_{g_i} \cap \partial P \cap U).$$

Die Umgebung U sei so klein, daß $\pi|_U : U \to \pi(U)$ ein Homöomorphismus ist. Dieser Homöomorphismus bildet die Teilmenge $P \cap U$ homöomorph auf den Durchschnitt einer offenen Teilmenge von L mit einer endlichen Vereinigung endlicher Durchschnitte von Halbräumen H_g ab, die den Punkt $\pi(a)$ im Rand enthalten. Aus $a \notin \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}(\tilde E_{g_i} \cap \partial P)$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt, daß

$\tilde{E}_{g_i} \cap \partial P \cap U$ in einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\tilde{L}$ enthalten ist. Nach der Proposition 29 ist ∂P homöomorph zu der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\tilde{G}$, also liegt a in $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}(\tilde{E}_{g_i} \cap \partial P)$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) $\operatorname{Int}(F_g) \cap F_h \neq \varnothing \Rightarrow g = h$: Es sei $g \neq h$ mit $\operatorname{Int}(F_g) \cap F_h \neq \varnothing$. Dann gilt

$$\operatorname{Int}(\tilde{E}_g \cap \partial P) \cap \operatorname{Cl}\operatorname{Int}(\tilde{E}_h \cap \partial P) = \operatorname{Int}(F_g) \cap F_h \neq \varnothing$$

und damit $\operatorname{Int}(\tilde{E}_g \cap \tilde{E}_h \cap \partial P) \neq \varnothing$. Da sich aber $\tilde{E}_g$ und $\tilde{E}_h$ transversal schneiden, hat der Durchschnitt $\tilde{E}_g \cap \tilde{E}_h \cap \partial P$ keine inneren Punkte in ∂P.

(3) Die lokale Endlichkeit der Familie $(F_g)_{g \in \tilde{\Gamma}}$ folgt aus Lemma 28.

(4) Die Familie $(F_g)_{g \in \tilde{\Gamma}}$ ist lokal endlich in ∂P, also gilt

$$\bigcup_{g \in \tilde{\Gamma}} \operatorname{Cl}\operatorname{Int} F_g = \operatorname{Cl} \bigcup_{g \in \tilde{\Gamma}} \operatorname{Int} F_g = \partial P. \ \blacksquare$$

Der Beweis des Satzes 26 ergibt sich nun aus bereits bewiesenen Lemmata und Propositionen wie folgt

Beweis.

(1) Nach der Proposition 7 ist ∂P invariant unter $\tilde{\Gamma}$.

(2) Nach Proposition 29 ist $\Psi|_{\partial P} : \partial P \to \tilde{G}$ ein $\tilde{\Gamma}$-äquivarianter Homöomorphismus.

(3) Nach Proposition 30 gilt: F_g ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf ∂P. Die Überdeckung $(F_g)_{g \in \tilde{\Gamma}}$ von ∂P ist lokal endlich.

Definition. Für $g \in \tilde{\Gamma}$ sei $\tilde{S}_g := \tilde{E}_g \cap \partial Q_{gu}$.

Proposition 31. *Für $g \in \tilde{\Gamma}$ gilt $\tilde{S}_g = \tilde{E}_g \cap \tilde{H}_{gr_d} \cap \tilde{H}_{gr_d^{-1}}$, also insbesondere*

$$\tilde{S}_{\tilde{e}} = \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial Q_u = \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d} \cap \tilde{H}_{r_d^{-1}}.$$

Es gilt ferner mit $\omega_d := \tan \vartheta_d$

$$S_e := \pi(\tilde{S}_{\tilde{e}}) = \{(1 + \omega i, z) \in L : |\omega| \leqslant \omega_d\}. \ \blacksquare$$

Proposition 32. *Es gilt*

$$\partial P = \bigcup_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} \partial Q_x \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} R_x.$$

Beweis. Für den Schnitt s mit $P = \underline{\mathrm{Gr}}(s)$ (siehe Beweis der Proposition 29) gilt

$$\partial P = \underline{\mathrm{Gr}}(s) \cap \overline{\mathrm{Gr}}(s) = \bigcup_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} Q_x \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} R_x = \bigcup_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} \partial Q_x \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} R_x. \ \blacksquare$$

Proposition 33. *Es gilt* $\operatorname{Int} F_g \subset \partial Q_{gu}$.

Beweis. Es reicht aus, die Behauptung für $g = \tilde{e}$ zu zeigen. Es sei

$$a \in \operatorname{Int} F_{\tilde{e}} = \operatorname{Int}(\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial P) \quad \text{mit} \quad a \notin \partial Q_u.$$

Wegen $a \in \partial P$ gilt $a \in \partial Q_x$ für ein $x \in \tilde{\Gamma}(u) \backslash \{u\}$. Damit schneidet jede Umgebung von a die Menge $\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap (Q_x)^\circ \subset \tilde{E}_{\tilde{e}} \backslash \partial P$. Die Abbildung $\Psi : \tilde{L} \to \tilde{G}$ ist stetig und die Abbildung $\Psi|_{\partial P} : \partial P \to \tilde{G}$ ist ein Homöomorphismus, also schneidet jede Umgebung von a die Menge $(\Psi|_{\partial P})^{-1}(\Psi(\tilde{E}_{\tilde{e}} \backslash \partial P)) \subset \partial P \backslash \tilde{E}_{\tilde{e}}$. Damit hat der Punkt a keine Umgebung in ∂P, die in $\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial P$ enthalten ist, was der Annahme $a \in \operatorname{Int}(\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial P)$ widerspricht. $\blacksquare$

Definition. Für eine Teilmenge $N \subset \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$ sei

$$F_N := \tilde{S}_{\tilde{e}} \cap \bigcap_{x \in N} R_x = \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial Q_u \cap \bigcap_{x \in N} R_x.$$

Es sei $F_{\tilde{\Gamma}} := F_{\tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}}$.

Satz 34. *Es gilt* $\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}} = \operatorname{Int} F_{\tilde{e}} = \operatorname{Int}(\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial P)$ *und damit*

$$F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}}.$$

Es gilt ferner $F_{\tilde{e}} \subset F_{\tilde{\Gamma}}$ *und allgemeiner* $F_{\tilde{e}} \subset F_N$ *für jedes* $N \subset \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$.

Beweis. Wegen $\partial Q_u = \partial R_u$ und der Proposition 32 gilt

$$\partial Q_u \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}} R_x = \partial Q_u \cap \partial R_u \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}} R_x \subset \partial Q_u \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} R_x \subset \partial P \subset \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)} R_x$$

und damit

$$F_{\tilde{\Gamma}} \subset \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial P \subset \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}} R_x.$$

Aus $\operatorname{Int}(\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial P) = \operatorname{Int} F_{\tilde{e}}$ folgt

$$\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}} \subset \operatorname{Int} F_{\tilde{e}} \subset \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}} R_x.$$

Nach der Proposition 33 gilt $\operatorname{Int} F_{\tilde{e}} \subset \partial Q_u$, es gilt also

$$\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}} \subset \operatorname{Int} F_{\tilde{e}} \subset \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial Q_u \cap \bigcap_{x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}} R_x = F_{\tilde{\Gamma}}.$$

Damit gilt $\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}} = \operatorname{Int} F_{\tilde{e}}$ und folglich $F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}}$. Ferner ist $F_{\tilde{\Gamma}}$ abgeschlossen, es gilt also $F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} F_{\tilde{\Gamma}} \subset F_{\tilde{\Gamma}}$ und folglich $F_{\tilde{e}} \subset F_{\tilde{\Gamma}} \subset F_N$ für jedes $N \subset \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$. ∎

Satz 35. *Ist* $\tilde{\Gamma}$ *cokompakt, so ist* F_g *kompakt, und es existiert eine endliche Teilmenge* $N \subset \tilde{\Gamma}(u)$ *mit*

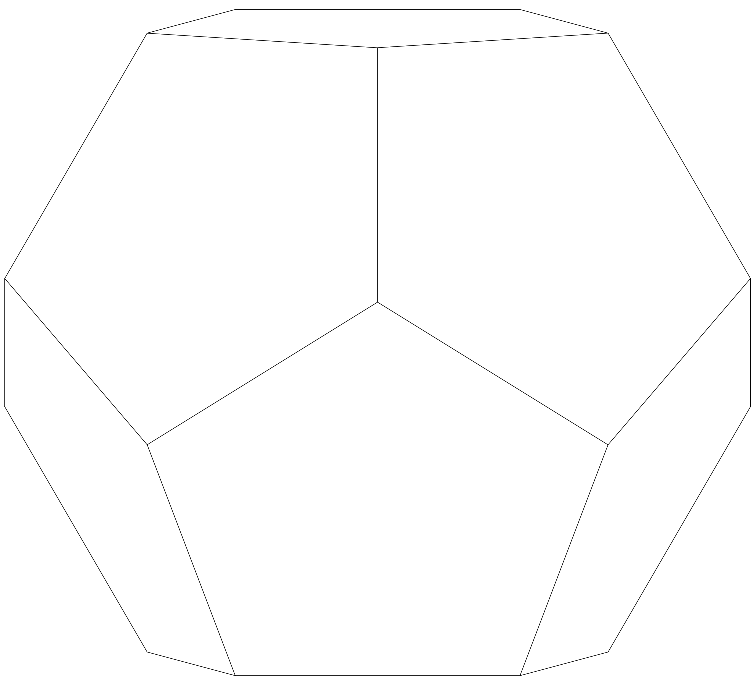
$$F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int}\Big(\tilde{S}_{\tilde{e}} \cap \bigcap_{x \in N} R_x\Big).$$

Beweis. F_g ist kompakt: Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{Int} F_g$. Es sei φ die Abbildung $\partial P \xrightarrow{\Psi} \tilde{G} \to \tilde{\Gamma}\backslash\tilde{G}$. Da $\tilde{\Gamma}\backslash\tilde{G}$ kompakt ist, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge $(\varphi(a_i))$ gegen einen Limes $\bar{a} \in \tilde{\Gamma}\backslash\tilde{G}$ konvergiert. φ ist surjektiv, also existiert ein $a \in \partial P$ mit $\varphi(a) = \bar{a}$ und damit auch eine Folge (h_i) in $\tilde{\Gamma}$ derart, daß die Folge $(h_i a_i)$ gegen a konvergiert. Nach Proposition 30 besitzt a eine Umgebung, die nur von endlich vielen Fundamentalbereichen getroffen wird, also tauchen in der Folge (h_i) nur endlich viele Werte auf. Damit enthält die Folge (h_i) eine konstante Teilfolge $(h_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$, das heißt es gibt ein $h \in \tilde{\Gamma}$ mit $h_{i_k} = h$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge (ha_{i_k}) gegen a und damit konvergiert die Folge (a_{i_k}) gegen $h^{-1}a$ und es gilt $h^{-1}a \in F_g$.

Nach Lemma 28 und da $F_{\tilde{e}}$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $N \subset \tilde{\Gamma}(u)$ mit $F_{\tilde{e}} \cap Q_x = \varnothing$ für $x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\} - N$. Damit gilt $F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int}(\tilde{S}_{\tilde{e}} \cap \cap_{x\in N} R_x)$. ∎

2

Fundamentalbereiche als kompakte Polytope



Nach Satz 26 ist das Polyeder $F_{\tilde{e}}$ kompakt, falls die Untergruppe Γ cokompakt ist. In diesem Fall existiert eine endliche Teilmenge N von $\tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$ derart, daß $F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int}(F_N)$ gilt. Der Satz 26 gibt aber keinen Hinweis darauf, wie man diese endliche Teilmenge findet. In diesem Kapitel werden einige Methoden beschrieben, um so eine endliche Darstellung des Fundamentalbereichs $F_{\tilde{e}}$ zu erhalten.

§8. Dreiecksgruppen

Eine *Dreiecksgruppe* ist die Untergruppe der orientierungserhaltenden Isometrien in der diskreten Gruppe der Isometrien der hyperbolischen Ebene, die von den Spiegelungen an den Seiten eines hyperbolischen Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ und $\frac{\pi}{r}$ mit $p, q, r \in \mathbb{N}$ erzeugt wird. Ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ und $\frac{\pi}{r}$ existiert bekanntlich genau dann, wenn die Summe der Winkel kleiner als π, das heißt, die rationale Zahl $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ kleiner als 1 ist. Die Dreiecksgruppen zu isometrischen Dreiecken sind in der Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien konjugiert.

Für die explizite Konstruktion zeichne ich in jeder Isometrieklasse solcher hyperbolischen Dreiecke ein Dreieck aus. Es sei $\Delta(p, q, r)$ das hyperbolische Dreieck in $\mathbb{D}$ mit den Ecken u, v und w derart, daß gilt

$$u = 0, \quad v \in \mathbb{R}, \quad v > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(w) > 0,$$

und mit den zugehörigen Winkeln

$$\alpha_u = \frac{\pi}{p}, \quad \alpha_v = \frac{\pi}{q} \quad \text{und} \quad \alpha_w = \frac{\pi}{r}.$$

Daraus folgt $w = |w| \cdot e^{i\frac{\pi}{p}}$. Die Seitenlängen $\ell_v := \rho(u, v)$, $\ell_w := \rho(u, w)$, $\ell_{vw} := \rho(v, w)$ des Dreiecks $\Delta(p, q, r)$ lassen sich nach der Cosinus-Regel (A4.2) aus den Winkeln berechnen.

Notation. Es sei $C := \cosh \ell_v$ und $S := \sinh \ell_v$.

Es sei $\Gamma(p, q, r)^* \subset \operatorname{Isom}(\mathbb{D})$ die von den Spiegelungen an den Seiten von $\Delta(p, q, r)$ erzeugte Gruppe und es sei

$$\Gamma(p, q, r) := \Gamma(p, q, r)^* \cap \operatorname{Isom}^+(\mathbb{D}).$$

$\Gamma(p, q, r)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1, 1)$ mit der Signatur $(0; p, q, r)$.

Definition. Die Elemente $\rho_u, \rho_v, \rho_w \in \mathrm{PSU}(1, 1)$ seien definiert durch

$$\rho_u := \rho_u(2\pi/p), \quad \rho_v := \rho_v(2\pi/q), \quad \rho_w := \rho_w(2\pi/r).$$

Die Elemente $r_u, r_v, r_w \in G$ seien definiert durch

$$r_u := r_u(2\pi/p), \quad r_v := r_v(2\pi/q), \quad r_w := r_w(2\pi/r).$$

Die Elemente $\tilde{r}_u, \tilde{r}_v, \tilde{r}_w \in \tilde{G}$ seien definiert durch

$$\tilde{r}_u := \tilde{r}_u(2\pi/p), \quad \tilde{r}_v := \tilde{r}_v(2\pi/q), \quad \tilde{r}_w := \tilde{r}_w(2\pi/r).$$

Bemerkung. Die Notation $\tilde{r}_u$ wird hier sowohl für die Abbildung $\mathbb{R} \to \tilde{G}$ als auch für den speziellen Wert dieser Abbildung, also ein Element von $\tilde{G}$, benutzt. Es wird aber aus dem Kontext klar sein, welche der beiden Bedeutungen gemeint ist, meistens wird es die zweite Bedeutung sein. Das Gleiche gilt für alle in der letzten Definition eingeführten Bezeichnungen.

Bemerkung. Es gilt $r_u = \pi(\tilde{r}_u)$, $r_v = \pi(\tilde{r}_v)$, $r_w = \pi(\tilde{r}_w)$.

Die Dreiecksgruppe $\Gamma(p,q,r)$ wird von den Elementen ρ_u und ρ_v erzeugt und besitzt eine Präsentation

$$\Gamma(p,q,r) \cong \langle a,b,c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1\rangle,$$

wobei der Isomorphismus durch die Zuordnung $a \mapsto \rho_u$, $b \mapsto \rho_v$ und $c \mapsto \rho_w$ gestiftet wird.

Proposition 36. *Es gilt* $\tilde{r}_u^p = \tilde{r}_v^q = \tilde{r}_w^r = \tilde{r}_u\tilde{r}_v\tilde{r}_w = c$.

Beweis. Nach der Proposition 17 gilt $(\tilde{r}_x(2\pi/n))^n = \tilde{r}_x(2\pi) = c$ für $x \in \mathbb{D}$ und $n \in \mathbb{N}$. In [Mi, Lemma 3.1] ist die Relation $\tilde{r}_u\tilde{r}_v\tilde{r}_w = c$ bewiesen. ∎

Proposition 37. *Es gilt* $r_u^p = r_v^q = r_w^r = r_u r_v r_w = -e$.

Beweis. Die Behauptung folgt wegen $\pi(\tilde{r}_x(t)) = r_x(t)$ und $\pi(c) = -e$ aus der Proposition 36. ∎

Satz 38. *Wenn die Bedingung*

$$(*) \qquad \mathrm{ggT}(k,p) = \mathrm{ggT}(k,q) = \mathrm{ggT}(k,r) = 1 \quad pqr - pq - qr - rp \equiv 0 \bmod k$$

erfüllt ist, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Untergruppe von $\tilde{G}$ der Stufe k mit Bild $\Gamma(p,q,r)$ in $\mathrm{PSU}(1,1)$. *Diese Untergruppe von $\tilde{G}$ bezeichne ich mit $\Gamma(p,q,r)^k$. Ist die Bedingung $(*)$ erfüllt, und sind n_u und n_v ganze Zahlen mit*

$$pn_u + 1 \equiv qn_v + 1 \equiv 0 \mod k,$$

so bilden die Elemente $\tilde{r}_u c^{n_u}$, $\tilde{r}_v c^{n_v}$ und c^k ein Erzeugendensystem von $\Gamma(p,q,r)^k$. Ist die Bedingung $(*)$ nicht erfüllt, so gibt es keine Untergruppe von $\tilde{G}$ der Stufe k mit Bild $\Gamma(p,q,r)$ in $\mathrm{PSU}(1,1)$.

Es gilt insbesondere:

Ist $q = r = 3$, $k \not\equiv 0 \bmod 3$ und $p \equiv 3 \bmod k$, so ist die Bedingung $(*)$ erfüllt. Die Untergruppe $\Gamma(p,3,3)^k$ wird von den Elementen $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^n$ und c^k erzeugt, wobei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $3n+1 \equiv 0 \mod k$ und $0 \leqslant n < k$ ist.

Ist $q = 3$, $r = 2$, k ungerade, $k \not\equiv 0 \bmod 3$ und $p \equiv 6 \bmod k$, so ist die Bedingung $(*)$ erfüllt. Die Untergruppe $\Gamma(p,3,2)^k$ wird von den Elementen $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^{2n}$ und c^k erzeugt, wobei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $6n+1 \equiv 0 \mod k$ und $0 \leqslant n < k$ ist.

Ist $q = 4$, $r = 2$, k ungerade und $p \equiv 4 \bmod k$, so ist die Bedingung $(*)$ erfüllt. Die Untergruppe $\Gamma(p,4,2)^k$ wird von den Elementen $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^n$ und c^k erzeugt, wobei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $4n+1 \equiv 0 \mod k$ und $0 \leqslant n < k$ ist.

Beweis. Der Beweis der ersten Behauptung ergibt sich aus der Proposition 36 und dem Beweis von [P, Satz 7].

Es sei $q = r = 3$, $k \not\equiv 0 \bmod 3$ und $p \equiv 3 \bmod k$, dann gilt

$$pqr - pq - qr - rp = 3p - 9 \equiv 0 \mod k,$$

die Bedingung $(*)$ ist also erfüllt. Es sei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $0 \leqslant n < k$ und $3n + 1 \equiv 0 \mod k$. Es sei $n_u := n$ und $n_v := n$. Es gilt $qn_v + 1 = 3n + 1 \equiv 0 \mod k$. Wegen $p \equiv 3 \bmod k$ gilt $pn_u + 1 = pn + 1 \equiv 3n + 1 \equiv 0 \mod k$. Damit bilden die Elemente $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^n$ und c^k ein Erzeugendensystem von $\Gamma(p, 3, 3)^k$.

Es sei $q = 3$, $r = 2$, k ungerade, $k \not\equiv 0 \bmod 3$ und $p \equiv 6 \bmod k$, dann gilt

$$pqr - pq - qr - rp = p - 6 \equiv 0 \mod k,$$

die Bedingung $(*)$ ist also erfüllt. Es sei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $0 \leqslant n < k$ und $6n + 1 \equiv 0 \mod k$. Es sei $n_u := n$ und $n_v := 2n$. Es gilt $qn_v + 1 = 6n + 1 \equiv 0 \mod k$. Wegen $p \equiv 6 \bmod k$ gilt $pn_u + 1 = pn + 1 \equiv 6n + 1 \equiv 0 \mod k$. Damit bilden die Elemente $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^{2n}$ und c^k ein Erzeugendensystem von $\Gamma(p, 3, 2)^k$.

Es sei $q = 4$, $r = 2$, k ungerade und $p \equiv 4 \bmod k$, dann gilt

$$pqr - pq - qr - rp = 2p - 8 \equiv 0 \mod k,$$

die Bedingung $(*)$ ist also erfüllt. Es sei n die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $0 \leqslant n < k$ und $4n + 1 \equiv 0 \mod k$. Es sei $n_u := n$ und $n_v := n$. Es gilt $qn_v + 1 = 4n + 1 \equiv 0 \mod k$. Wegen $p \equiv 4 \bmod k$ gilt $pn_u + 1 = pn + 1 \equiv 4n + 1 \equiv 0 \mod k$. Damit bilden die Elemente $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^n$ und c^k ein Erzeugendensystem von $\Gamma(p, 4, 2)^k$. ■

Proposition 39. *Es gilt*

$$\begin{aligned} r_u &= (e^{i\pi/p}, 0), \\ r_v &= (\cos\frac{\pi}{q} + i\cosh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}, -i\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}), \\ r_w &= (\cos\frac{\pi}{r} + i\cosh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}, -ie^{i\frac{\pi}{p}} \sinh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$r_u = (e^{i\pi/p}, 0), \quad r_v = (\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB)$$

und für $j \in \mathbb{Z}$

$$r_u^j = (e^{i\pi j/p}, 0), \quad r_v^j = (\cos\frac{\pi j}{q} + iC\sin\frac{\pi j}{q}, -iS \cdot \sin\frac{\pi j}{q})$$

mit $C := \cosh\ell_v$, $S := \sinh\ell_v$ *und* $B := \sinh\ell_v \cdot \sin\frac{\pi}{q}$. *Es gilt insbesondere*

$$r_v^{q-1} = (-\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB).$$

Beweis. Die Formeln für $r_u = r_u(2\pi/p)$, $r_v = r_v(2\pi/q)$, $r_w = r_w(2\pi/r)$ und $r_u^j = r_u(2\pi j/p)$, $r_v^j = r_v(2\pi j/q)$ folgen aus der Definition wegen $u = 0$, $v = |v|$, $w = |w| \cdot e^{i\frac{\pi}{p}}$ und $\ell_v = \rho(0, v)$, $\ell_w = \rho(0, w)$. ■

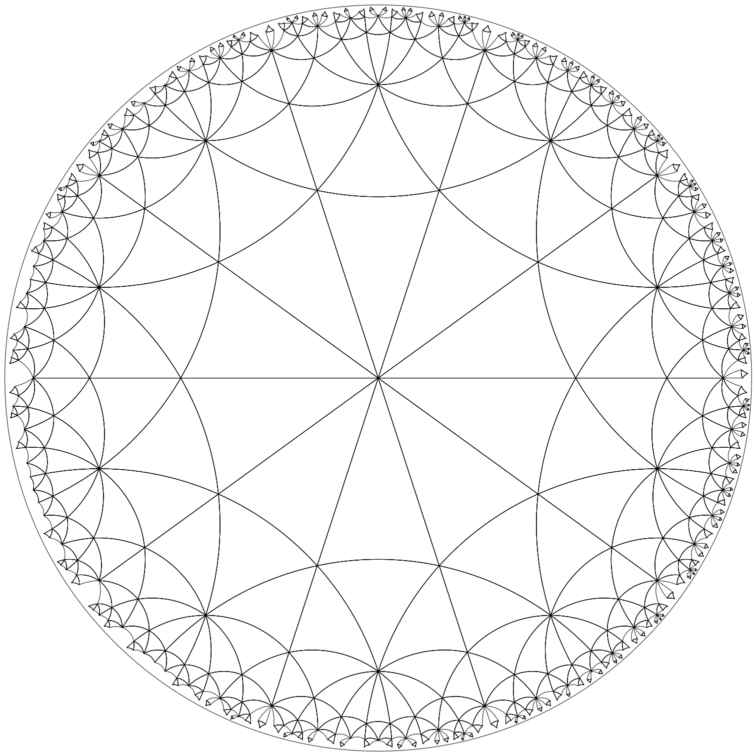


ABBILDUNG 2. Die Pflasterung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{D}$ für $\Gamma(5,3,3)^*$.

§9. Die Koronen einer Dreiecksgruppe

Die Bahn des hyperbolischen Dreiecks $\Delta(p,q,r)$ unter der Operation der Gruppe $\Gamma(p,q,r)^*$ ergibt eine Pflasterung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{D}$ mit Dreiecken. Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt dieser Pflasterung für die volle Dreiecksgruppe $\Gamma(5,3,3)^*$.

Es sei $\Gamma := \Gamma(p,q,r)$. Die (abgeschlossene) *Dirichletzelle* von $x \in \mathbb{D}$ ist

$$D(x) := \{y \in \mathbb{D} : \forall\, z \in \Gamma x \quad \rho(y,x) \leqslant \rho(y,z)\}.$$

Die Dirichletzelle von $x \in \Gamma(u)$ kann auch als die Vereinigung aller den Punkt x enthaltenden Bilder von $\Delta(p,q,r)$ unter den Elementen von $\Gamma(p,q,r)^*$ beschrieben werden.

Ich betrachte nun die Bahn der Ecke $u = 0$ des Dreiecks $\Delta(p,q,r)$ unter der Operation von $\Gamma(p,q,r)$ und zeichne gewisse Teilmengen darin aus. Die *Eckenkorona* $\mathcal{E}_x$ von $x \in \Gamma(u)$ besteht aus allen Punkten in $\Gamma(u)\backslash\{x\}$, deren Dirichletzellen mindestens einen Punkt mit der Dirichletzelle von x gemeinsam haben, während die *Kantenkorona* $\mathcal{K}_x$ von $x \in \Gamma(u)$ aus allen Punkten in $\Gamma(u)\backslash\{x\}$ besteht, deren Dirichletzellen mindestens eine Kante mit der Dirichletzelle von x gemeinsam haben. Es sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}_u$ und $\mathcal{K} := \mathcal{K}_u$. Es gilt

$$\mathcal{E} = \{x_{m,t} \,|\, 0 \leqslant m < p,\ 1 \leqslant t < q\} \cup \{x'_{m,t} \,|\, 0 \leqslant m < p,\ 1 \leqslant t < r\}$$

und

$$\mathcal{K} = \{x_{0,1}, \ldots, x_{p-1,1}, x'_{0,1}, \ldots, x'_{p-1,1}\}$$

mit $x_{m,t} := (\rho_u^m \rho_v^t)(u)$ und $x'_{m,t} := (\rho_u^m \rho_w^t)(u)$ für $m,t \in \mathbb{Z}$.

Proposition 40. *Es gilt* $x_{m,q-1} = x'_{m,1}$ *und* $x_{m+1,1} = x'_{m,r-1}$. *Im Falle* $r = 2$ *gilt* $x_{m,q-1} = x_{m+1,1}$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus $\rho_v^{q-1} = \rho_v^{-1} = \rho_w \rho_u$ und $\rho_w^{r-1} = \rho_w^{-1} = \rho_u \rho_v$. Die zweite Aussage folgt aus $x_{m,q-1} = x'_{m,1} = x'_{m,r-1} = x_{m+1,1}$. ∎

Proposition 41. *Für alle* $x \in \mathcal{K}$ *gilt mit* $B = \sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}$

$$\cosh \rho(u,x) = 2B^2 + 1 \quad \textit{und} \quad |x| = \frac{B}{\sqrt{B^2+1}}.$$

Beweis. Es sei $x \in \{x_{0,1}, x_{0,q-1}\} \subset \mathcal{K}$. Aus der Kosinus-Regel (A4.4) für das gleichschenklige Dreieck mit den Ecken u, v und x folgt

$$\cosh \rho(u,x) = 2 \sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1 = 2B^2 + 1.$$

Die anderen Elemente der Kantenkorona entstehen aus $x_{0,1}$ bzw. $x_{0,q-1}$ durch Drehung um u, haben also den gleichen (hyperbolischen) Abstand von $u = 0$. Aus dem hyperbolischen Abstand $\rho(u,x) = 2B^2 + 1$ berechnet sich der euklidische Abstand nach der Formel (A6.1) wie folgt

$$|x| = \sqrt{\frac{\cosh \rho(u,x) - 1}{\cosh \rho(u,x) + 1}} = \frac{B}{\sqrt{B^2+1}}. \ \blacksquare$$

Proposition 42. *Für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\cosh \rho(x_{m,1}, x_{m,q-1}) &= 2 \sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{2\pi}{q} + 1, \\
\cosh \rho(x_{m,q-1}, x_{m+1,1}) &= 2 \sinh^2 \ell_w \sin^2 \frac{2\pi}{r} + 1, \\
|x_{m,1} - x_{m,q-1}| &= \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{2\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}, \\
|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}| &= \frac{\sinh \ell_w \sin \frac{2\pi}{r}}{\sinh^2 \ell_w \sin^2 \frac{\pi}{r} + 1}.
\end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$\frac{|x_{m,1} - x_{m,q-1}|}{\cos \frac{\pi}{q}} = \frac{|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|}{\cos \frac{\pi}{r}}.$$

Beweis. Aus der Kosinus-Regel (A4.4) für das gleichschenklige Dreieck mit den Ecken v, $x_{m,1}$ und $x_{m,q-1}$ folgt

$$\cosh \rho(x_{m,1}, x_{m,q-1}) = 2 \sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{2\pi}{q} + 1.$$

Wegen $\rho(u, x_{m,1}) = \rho(u, x_{m,q-1})$ berechnet sich der euklidische Abstand nach der Formel (A6.4) wie folgt

$$|x_{m,1} - x_{m,q-1}| = \frac{\sqrt{2(\cosh \rho(x_{m,1}, x_{m,q-1}) - 1)}}{\cosh \rho(u, x_{m,1}) + 1} = \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{2\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}.$$

Analog berechnet man

$$\cosh \rho(x_{m,q-1}, x_{m+1,1}) = \cosh \rho(\tilde{x}_{m,1}, \tilde{x}_{m,r-1}) = 2 \sinh^2 \ell_w \sin^2 \frac{2\pi}{r} + 1$$

und

$$|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}| = |\tilde{x}_{m,1} - \tilde{x}_{m,r-1}| = \frac{\sinh \ell_w \sin \frac{2\pi}{r}}{\sinh^2 \ell_w \sin^2 \frac{\pi}{r} + 1}.$$

Aus der Sinus-Regel (A4.1) für das hyperbolische Dreieck $\Delta(p,q,r)$ folgt

$$\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q} = \sinh \ell_w \sin \frac{\pi}{r}$$

und damit

$$\frac{|x_{m,1} - x_{m,q-1}|}{\cos \frac{\pi}{q}} = \frac{2 \sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1} = \frac{2 \sinh \ell_w \sin \frac{\pi}{r}}{\sinh^2 \ell_w \sin^2 \frac{\pi}{r} + 1} = \frac{|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|}{\cos \frac{\pi}{r}}. \blacksquare$$

§10. Die Durchschnitte $E_g \cap E_e$

Proposition 43. *Es sei $g = (a,b) \in G$ mit $b \neq 0$ und damit $|a|^2 = 1 + |b|^2 > 1$. Im Falle $\mathrm{Re}(a) > -1$ ist die Menge $E_g \cap E_e$ zusammenhängend. Im Falle $\mathrm{Re}(a) < -1$ besteht die Menge $E_g \cap E_e$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, ihr Bild unter der Projektion $(1 + i\omega, z) \mapsto \omega$ ist das Komplement eines kompakten Intervalls.*

Beweis. Für $M \subset \mathbb{C}^2$ und $\omega \in \mathbb{R}$ sei $M(\omega) := \{z \in \mathbb{C} : (1 + i\omega, z) \in M\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} d(0, \hat{E}_g(\omega)) < \sqrt{1+\omega^2} &\iff (E_g \cap E_e)(\omega) \neq \varnothing, \\ d(0, \hat{E}_g(\omega)) \geqslant \sqrt{1+\omega^2} &\iff (E_g \cap E_e)(\omega) = \varnothing, \end{aligned}$$

denn $E_e(\omega)$ ist das Innere des Kreises mit Radius $\sqrt{1+\omega^2}$ und $\hat{E}_g(\omega)$ ist eine Gerade. Es sei $a = a_1 + ia_2$ und $b = b_1 + ib_2$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Geraden $\hat{E}_g(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$ ist

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 = a_1 + a_2 \omega - 1,$$

also gilt

$$d(0, \hat{E}_g(\omega)) = \frac{|a_1 + a_2 \omega - 1|}{|b|}.$$

Es gilt ferner wegen $|b|^2 = |a|^2 - 1 = a_1^2 + a_2^2 - 1$

$$\begin{aligned} \frac{|a_1 + a_2\omega - 1|}{|b|} < \sqrt{1+\omega^2} &\iff (a_1 + a_2\omega - 1)^2 < (a_1^2 + a_2^2 - 1)(1 + \omega^2) \\ &\iff (1 - a_1^2)\omega^2 + 2a_2(a_1 - 1)\omega - (a_2^2 + 2a_1 - 2) < 0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante des Polynoms ist $D = 8(1 - a_1) \cdot |b|^2$, der Koeffizient bei ω^2 ist $c = 1 - a_1^2$. Es gibt also die folgenden Möglichkeiten: Im Falle $a_1 > 1$ gilt $c < 0$, $D < 0$, also ist die Ungleichung immer erfüllt, es gilt $(E_g \cap E_e)(\omega) \neq \varnothing$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$, der Durchschnitt $E_g \cap E_e$ ist zusammenhängend. Im Falle $a_1 \in (-1, 1)$ gilt $c > 0$, $D > 0$, also ist $(E_g \cap E_e)(\omega)$ nicht leer für alle $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ und leer sonst, wobei $\omega_1 < \omega_2$ die (reellen) Wurzeln des Polynoms sind. Damit ist der Durchschnitt $E_g \cap E_e$ zusammenhängend. Im Falle $a_1 < -1$ gilt $c < 0$, $D > 0$, also ist $(E_g \cap E_e)(\omega)$ leer für alle $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ und nicht leer sonst, wobei $\omega_1 < \omega_2$ die (reellen) Wurzeln des Polynoms sind. Damit besteht der Durchschnitt $E_g \cap E_e$ aus zwei Zusammenhangskomponenten. ∎

§11. Die Durchschnitte $\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$

Lemma 44. *Es sei $\bar{g} = (a, b) \in G$.*

Es sei $\operatorname{Re}(a) \geqslant 0$, dann gibt es ein $g \in \tilde{G}$ mit $\pi(g) = \bar{g}$ und $|\arg(g)| \leqslant \pi/2$, und es gilt $I_{\bar{g}} \cap E_e = \pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$.

Es sei $\operatorname{Re}(a) < 0$, dann gibt es $g', g'' \in \tilde{G}$ mit $\pi(g') = \pi(g'') = \bar{g}$, $\arg(g') \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ und $\arg(g'') \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Es sei $t := \tan(\arg(g')) = \tan(\arg(g''))$. Für einen Punkt $\bar{p} = (1 + i\omega, z)$ aus $I_{\bar{g}} \cap E_e$ gilt $\bar{p} \in \pi(\tilde{I}_{g'} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ im Falle $\omega > t$, es gilt $\bar{p} \in \pi(\tilde{I}_{g''} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ im Falle $\omega < t$, und der Fall $\omega = t$ tritt nicht auf.

Beweis. Nach der Proposition 9 gilt $\pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \subset \pi(\tilde{I}_g) \cap \pi(\tilde{E}_{\tilde{e}}) = I_{\bar{g}} \cap E_e$. Ich betrachte einen Punkt $\bar{p} = (1+i\omega, z) \in I_{\bar{g}} \cap E_e$ und den Weg $\bar{s} : [0, 2] \to L$ mit $\bar{s}(0) = e$, $\bar{s}(1) = \bar{p}$ und $\bar{s}(2) = \bar{g}$, der aus zwei geraden Strecken von e nach $\bar{p}$ und von $\bar{p}$ nach $\bar{g}$ besteht. Es sei $s : [0, 2] \to \tilde{L}$ die Hochhebung des Weges $\bar{s}$ mit Anfangspunkt $s(0) = \tilde{e}$. Nach der Proposition 5 verläuft der Weg $\bar{s}$ in $E_e \cup I_{\bar{g}}$. (Daraus folgt $\omega \neq \tan(\arg(g))$ im Falle $\operatorname{Re}(a) < 0$.) Es sei $p := s(1)$. Es gilt $\pi(p) = \bar{p} \in I_{\bar{g}} \cap E_e$, also liegt der Punkt p in $\pi^{-1}(I_{\bar{g}}) \cap \pi^{-1}(E_e)$. Der Punkt $p = s(1)$ ist durch den Weg $s|_{[0,1]}$ mit $s(0) = \tilde{e}$ und durch den Weg $s|_{[1,2]}$ mit $s(2)$ verbunden, also gilt $p \in \tilde{I}_{s(2)} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$. Das Bild des Weges $\bar{s}$ unter der Projektion $(w, z) \mapsto w$ ist der Weg in $\mathbb{C}$, der aus den geraden Strecken von 1 nach $1 + i\omega$ und von $1 + i\omega$ nach a besteht. Der Weg $\arg \circ s$ in $\mathbb{R}$ ist die Hochhebung des Weges in $\mathbb{S}^1$, der als Bild des Weges $\bar{s}$ unter der Abbildung $(w, z) \mapsto \frac{w}{|w|}$ entsteht.

Es sei $\operatorname{Re}(a) \geqslant 0$. Es sei $g \in \tilde{G}$ mit $\pi(g) = \bar{g}$ und $|\arg(g)| \leqslant \pi/2$. Es gilt $|\arg(s(2))| \leqslant \frac{\pi}{2}$ und damit $s(2) = g$, also gilt $p \in \tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$.

Es sei $\operatorname{Re}(a) < 0$. Es sei $g', g'' \in \tilde{G}$ mit $\pi(g') = \pi(g') = \bar{g}$, $\arg(g') \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ und $\arg(g'') \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Es sei $t := \tan(\arg(g')) = \tan(\arg(g''))$. Im Falle $\omega > t$ gilt $\arg(s(2)) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ und damit $s(2) = g'$, also gilt $p \in \tilde{I}_{g'} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$. Im Falle $\omega < t$ gilt $\arg(s(2)) \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ und damit $s(2) = g''$, also gilt $p \in \tilde{I}_{g''} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$. ∎

Notation. Für $M \subset E_e$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $M[< t] := \{(1 + i\omega, z) \in M \mid \omega < t\}$ und $M[> t] := \{(1 + i\omega, z) \in M \mid \omega > t\}$.

Proposition 45. *Es sei $g \in \tilde{G}$ und $\varphi := \arg(g) \in \mathbb{R}$. Im Falle $|\varphi| \geqslant \frac{3\pi}{2}$ sind die Mengen $\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ und $\pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ leer. Im Falle $|\varphi| < \frac{3\pi}{2}$ ist $\pi|_{\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}} : \tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}} \to \pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$*

ein Homöomorphismus und es gilt

$$\pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = I_{\pi(g)} \cap E_e, \quad \textit{falls } |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = (I_{\pi(g)} \cap E_e)[> \tan\varphi], \quad \textit{falls } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\pi(\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = (I_{\pi(g)} \cap E_e)[< \tan\varphi], \quad \textit{falls } \varphi \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Beweis. Nach der Proposition 9 ist die Einschränkung von π auf $\tilde{E}_{\tilde{e}}$ ein Homöomorphismus auf das Bild. Aus dem Lemma 44 folgen die Aussagen über das Bild von $\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$, falls $|\varphi| < 3\pi/2$. Ferner folgt aus dem Lemma 44, daß die Menge $I_{\bar{g}} \cap E_e$ für jedes $\bar{g} \in G$ in der Vereinigung von $\pi(\tilde{I}_h \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ mit $\pi(h) = \bar{g}$ und $|\arg(h)| < 3\pi/2$ enthalten ist, also gilt $\tilde{I}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}} = \varnothing$, falls $|\arg(g)| \geqslant 3\pi/2$. ∎

§12. Netzabschätzung

Es sei $\tilde{\Gamma}$ eine diskrete Untergruppe der Stufe k in $\tilde{G}$. Ich zeige durch die Approximation der Mengen $\pi(Q_x)$ durch die ihnen einbeschriebenen Zylinder eine Abschätzung für die Punkte in $\pi(F_{\mathcal{K}})$.

Notation. In einem metrischen Raum X bezeichne $U(x,r)$ den offenen und $B(x,r)$ den abgeschlossenen Ball mit Zentrum $x \in X$ vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$.

Definition. Ein *s-Netz* vom Radius d ist eine endliche Teilmenge der Kreislinie vom Radius d mit Zentrum 0 in $\mathbb{C}$, so daß für eine Numerierung $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1$ im Umlaufsinn $\max_i |x_i - x_{i+1}| = s \neq 0$ gilt. Es gilt dann $s \leqslant 2d$.

Definition. Es sei $N \subset \tilde{\Gamma}(u) \backslash \{u\}$ ein s-Netz vom Radius $d < 1$ mit $s < 2d$. Es sei

$$R_N := \frac{2d^2}{\sqrt{4d^2 - s^2}}.$$

Es sei $R_N < 1$, dann folgt $s < 2d\sqrt{1-d^2}$, also gibt es ein $\vartheta_N \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit

$$\cos\vartheta_N = \frac{s}{2d\sqrt{1-d^2}}.$$

Für $\vartheta \in [-\vartheta_N, \vartheta_N]$ sei

$$\ell_N^{\pm}(\vartheta) := \frac{1}{R_N} \pm \frac{1}{2d^2}\sqrt{4d^2(1-d^2)\cos^2\vartheta - s^2}.$$

Bemerkung. Aus $R_N < 1$ folgt $\ell_N^+(\vartheta) \geqslant \frac{1}{R_N} > 1$. Die Funktionen $\ell_N^{\pm}$ sind gerade. Die Funktion ℓ_N^- bzw. ℓ_N^+ ist monoton steigend bzw. fallend auf $[0, \vartheta_N]$.

Satz 46. *Es sei $N \subset \tilde{\Gamma}(u)$ ein s-Netz vom Radius $d < 1$ mit $R_N < 1$ und $\vartheta_N \geqslant \vartheta_d$ (mit $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p}$). Wegen $\vartheta_d \leqslant \vartheta_N$ ist die Funktion $\ell_N^{\pm}$ auf $[-\vartheta_d, \vartheta_d]$ definiert. Es sei $\ell_N^-(\vartheta_d) \leqslant 1$. Dann gilt für $w = 1 + i\tan\vartheta$ mit $|\vartheta| \leqslant \vartheta_d$*

$$(w, z) \in \pi(F_N) \Rightarrow |z| < \ell_N^-(\vartheta) \cdot |w|.$$

Beweis. Es sei $x_1, \ldots, x_m$ eine Numerierung von N mit $\max\limits_{i=1,\ldots,m} |x_i - x_{i+1}| = s$, dabei sei $x_{m+1} := x_1$. Es gilt $|x_i| = d$. Es sei $z_i = \frac{\bar{w}}{\bar{x}_i}$ und $r = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$. Nach der Proposition 24 gilt $(w, z) \in \pi(Q_{x_i} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ für $z \in B\,(z_i, r) \cap U\,(0, |w|)$. Es sei

$$\hat{d} := |z_i| = \frac{|w|}{d} \quad \text{und} \quad 2\hat{s} := \max_{i=1,\ldots,m} |z_i - z_{i+1}| = \frac{s \cdot |w|}{d^2}.$$

Somit bilden $z_1, \ldots, z_m$ ein $2\hat{s}$-Netz vom Radius $\hat{d}$. Aus $|\vartheta| \leqslant \vartheta_d \leqslant \vartheta_N$ folgt

$$|w| = \frac{1}{\cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\cos\vartheta_N} = \frac{2d\sqrt{1-d^2}}{s}$$

und damit $\hat{s} \leqslant r$. Bei $\hat{s} \leqslant r$ schneiden sich die Kreise $B\,(z_i, r)$ und $B\,(z_{i+1}, r)$ in zwei Punkten mit Abstand zum Nullpunkt gleich

$$\sqrt{\hat{d}^2 - \hat{s}^2} \pm \sqrt{r^2 - \hat{s}^2} = \ell_N^{\pm}(\vartheta) \cdot |w|.$$

Damit ist der Ring $\{z \in \mathbb{C} : \ell_N^-(\vartheta) \leqslant \frac{|z|}{|w|} \leqslant \ell_N^+(\vartheta)\}$ in der Vereinigung der Kreise $B\,(z_i, r)$ enthalten. Es gilt

$$\ell_N^-(\vartheta) \leqslant \ell_N^-(\vartheta_d) \leqslant 1 \leqslant \ell_N^+(\vartheta_d) \leqslant \ell_N^+(\vartheta).$$

Damit gilt $(w, z) \in \cup_{x \in N} \pi(Q_x)$, falls $|z| \geqslant \ell_N^-(\vartheta) \cdot |w|$. Daraus folgt $|z| < \ell_N^-(\vartheta) \cdot |w|$, falls $(w, z) \in \pi(F_N)$. ∎

Die Netzabschätzungen sollen nun auf die Kantenkorona $\mathcal{K}$ angewandt werden.

Proposition 47. *Es sei $\Gamma = \Gamma(p, q, r)$ mit $p \geqslant q \geqslant r$. Es sei $B = \sinh \ell_v \cdot \sin \frac{\pi}{q}$. Die Kantenkorona $\mathcal{K}$ ist ein s-Netz vom Radius d mit*

$$s = \frac{2B\cos\frac{\pi}{q}}{B^2 + 1} \quad \textit{und} \quad d = \frac{B}{\sqrt{B^2+1}}.$$

Es gilt $d < 1$, $R_{\mathcal{K}} = \tanh \ell_v < 1$, $\vartheta_{\mathcal{K}} = \frac{\pi}{q}$ und

$$\ell_{\mathcal{K}}^{\pm}(\vartheta) = \frac{1}{R_{\mathcal{K}}} \pm \frac{1}{B} \cdot \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\frac{\pi}{q}}.$$

Beweis. Nach Proposition 41 ist $\mathcal{K}$ ein s-Netz vom Radius d mit

$$s = \max\{|x_{m,1} - x_{m,q-1}|, |x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|\} \quad \text{und} \quad d = \frac{B}{\sqrt{B^2+1}}.$$

Nach Proposition 42 und wegen $q \geqslant r$ gilt

$$|x_{m,1} - x_{m,q-1}| = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{r}} \cdot |x_{m,q-1} - x_{m+1,1}| \geqslant |x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|$$

und folglich

$$s = |x_{m,1} - x_{m,q-1}| = \frac{\sinh \ell_v \sin\frac{2\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2\frac{\pi}{q} + 1} = \frac{2B\cos\frac{\pi}{q}}{B^2+1}.$$

Aus den Formeln für s und d leitet man die Formeln für $R_{\mathcal{K}}$, $\vartheta_{\mathcal{K}}$ und $\ell_{\mathcal{K}}^{\pm}(\vartheta)$ ab. ∎

Damit läßt sich der Satz 46 wie folgt spezialisieren:

Satz 48. *Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^k$ mit $p \geqslant q \geqslant r$. Es gelte $\vartheta_d \leqslant \frac{\pi}{q}$ und $\ell_{\mathcal{K}}^-(\vartheta_d) \leqslant 1$. Dann gilt für $w = 1 + i\tan\vartheta$ mit $|\vartheta| \leqslant \vartheta_d$*

$$(w,z) \in \pi(F_{\mathcal{K}}) \Rightarrow |z| < \ell_{\mathcal{K}}^-(\vartheta)\cdot|w|. \blacksquare$$

§13. Anwendung der Netzabschätzung

Proposition 49. *Für $x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$ mit $|x| \geqslant R > 0$ und $(w,z) \in \pi(Q_x)$ gilt*

$$|z| \geqslant \left(\frac{1}{R} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R|w|\cos\vartheta_d}\right)\cdot|w|.$$

Beweis. Es sei $(w,z) \in \pi(Q_x)$. Nach Proposition 24 gilt $|z| \geqslant f(|x|)\cdot|w|$ mit $f(t) := \frac{1}{t}(1 - c\sqrt{1-t^2})$ und $c := \frac{1}{|w|\cos\vartheta_d} \geqslant 1$. Die Funktion f ist wegen $f'(t) = \frac{c-\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}$ monoton steigend auf $(0,1)$. Damit gilt $|z| \geqslant f(|x|)\cdot|w| > f(R)\cdot|w|$. $\blacksquare$

Im letzten Abschnitt wurde eine Abschätzung für $\pi(F_{\mathcal{K}})$ bewiesen, andererseits liefert die Proposition 49 eine Abschätzung für $\pi(Q_x)$. Aus diesen Abschätzungen folgt unter bestimmten Voraussetzungen, daß die Mengen $\pi(Q_x)$ mit $x \notin \mathcal{K} \cup \{u\}$ keine Punkte mit $\pi(F_{\mathcal{K}})$ und folglich auch nicht mit $\pi(F_{\tilde{e}}) \subset \pi(F_{\mathcal{K}})$ gemeinsam haben, es gilt also $\pi(F_{\tilde{e}}) = \pi(F_{\mathcal{K}})$ und damit $F_{\tilde{e}} = F_{\mathcal{K}}$.

Notation. Für $R \in (0,1)$ sei $\mathcal{M}_R := \frac{1-\sqrt{1-R^2}}{R}$. Es gilt $\mathcal{M}_R \in (0,1)$.

Proposition 50. *Es sei $N \subset \tilde{\Gamma}(u)$ ein s-Netz vom Radius $d < 1$ mit $R_N < 1$ und $\vartheta_N \geqslant \vartheta_d$. Wegen $\vartheta_d \leqslant \vartheta_N$ ist die Funktion $\ell_N^{\pm}$ auf $[-\vartheta_d, \vartheta_d]$ definiert. Es sei $\ell_N^+(\vartheta_d) \geqslant 1$ und $\ell_N^-(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R$ für ein $R \geqslant R_N$. Dann gilt $\pi(Q_x) \cap \pi(F_N) = \varnothing$ für alle $x \in \tilde{\Gamma}(u)$ mit $|x| \geqslant R$.*

Beweis. Es sei $x \in \tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$ mit $|x| \geqslant R$. Es sei $w = 1 + i\tan\vartheta$ mit $|\vartheta| \leqslant \vartheta_d$. Es gilt $\ell_N^-(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R < 1$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 46 erfüllt, also gilt für alle $(w,z) \in \pi(F_N)$

$$|z| < \ell_N^-(\vartheta)\cdot|w|.$$

Nach der Proposition 49 gilt für alle $(w,z) \in \pi(Q_x)$

$$|z| \geqslant \left(\frac{1}{R} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R|w|\cos\vartheta_d}\right)\cdot|w|,$$

Damit genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$\Delta(\vartheta) := \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_d}\cdot\frac{\sqrt{1-R^2}}{R}\right) - \ell_N^-(\vartheta)$$

auf $[0, \vartheta_d]$ nicht negativ ist. Die Funktion $\Delta(\vartheta)$ läßt sich schreiben als

$$\Delta(\vartheta) = a(\vartheta)\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_d} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N}\right)$$

mit
$$a(\vartheta) = \left(\frac{1}{R_N} - \ell_N^-(\vartheta)\right) \cdot \frac{\cos\vartheta_d}{\cos\vartheta} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R}.$$
Wegen
$$\left(\frac{1}{R_N} - \ell_N^-(\vartheta)\right) \cdot \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{1}{2d^2} \cdot \sqrt{4d^2(1-d^2) - \frac{s^2}{\cos^2\vartheta}}$$
gilt für $\vartheta \in [-\vartheta_d, \vartheta_d]$
$$\begin{aligned} a(\vartheta) \geqslant a(\vartheta_d) &= \left(\frac{1}{R_N} - \ell_N^-(\vartheta_d)\right) - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R} \\ &= \left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R}\right) + (\mathcal{M}_R - \ell_N^-(\vartheta_d)) \geqslant 0 \end{aligned}$$
und damit
$$\begin{aligned} \Delta(\vartheta) &\geqslant \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_d}\left(\left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R}\right) + (\mathcal{M}_R - \ell_N^-(\vartheta_d))\right) + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N}\right) \\ &\geqslant \left(\left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R}\right) + (\mathcal{M}_R - \ell_N^-(\vartheta_d))\right) + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N}\right) = \mathcal{M}_R - \ell_N^-(\vartheta_d) \geqslant 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Diese Proposition kann wie folgt auf die Kantenkorona $\mathcal{K}$ spezialisiert werden:

Proposition 51. *Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^k$ mit $p \geqslant q \geqslant r$. Es sei weiter $\vartheta_d \leqslant \frac{\pi}{q}$ und $\ell_{\mathcal{K}}^-(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R$ für ein $R \geqslant R_{\mathcal{K}}$. Dann gilt $\pi(Q_x) \cap \pi(F_{\mathcal{K}}) = \varnothing$ für alle $x \in \tilde{\Gamma}(u)$ mit $|x| \geqslant R$.* $\blacksquare$

Satz 52. *Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^k$ mit $p \geqslant q \geqslant r$. Es sei $\vartheta_d \leqslant \frac{\pi}{q}$. Es sei ferner $R \geqslant R_{\mathcal{K}}$ mit $\tilde{\Gamma}(u) \cap U(u,R) \subset \mathcal{K} \cup \{u\}$ und $\ell_{\mathcal{K}}^-(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R$. Dann gilt $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{K}} = F_{\mathcal{E}}$.*

Beweis. Es gilt $\ell_{\mathcal{K}}^-(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R < 1$. Nach Proposition 51 gilt $\pi(Q_x) \cap \pi(F_{\mathcal{K}}) = \varnothing$ für alle $x \in \tilde{\Gamma}(u) \backslash (\mathcal{K} \cup \{u\})$ und damit $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{K}}$. Wegen $F_{\tilde{\Gamma}} \subset F_{\mathcal{E}} \subset F_{\mathcal{K}}$ folgt dann $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{E}} = F_{\mathcal{K}}$. $\blacksquare$

§14. Ein kombinatorisches Kriterium

In diesem Abschnitt wird eine Aussage vom Typ des Poincaré-Maskit-Satzes bewiesen, die ein hinreichendes Kriterium dafür liefert, daß eine zu einem Polyeder homöomorphe Teilmenge einer 3-Mannigfaltigkeit ein Fundamentalbereich für eine Gruppenoperation ist.

Es sei M ein Hausdorffraum und Γ eine Gruppe, die durch Homöomorphismen auf M operiert.

Notation. Für $U, V \subset M$ sei $\Gamma(U,V) := \{\gamma \in \Gamma : \gamma U \cap V \neq \varnothing\}$.

Proposition 53.

(1) $U \subset U', V \subset V' \Rightarrow \Gamma(U,V) \subset \Gamma(U',V')$.
(2) $\Gamma(\gamma U, V) = \Gamma(U,V) \cdot \gamma^{-1}$.
(3) $\Gamma(U \cup U', V) = \Gamma(U,V) \cup \Gamma(U',V)$.
(4) $\Gamma(U, V \cup V') = \Gamma(U,V) \cup \Gamma(U,V')$. $\blacksquare$

PROPOSITION 54. *Ist für eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von M die Familie $(\gamma\mathcal{F})_{\gamma\in\Gamma}$ eine lokal endliche Überdeckung von M, so ist die Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ lokal endlich für jede kompakte Teilmenge $\mathcal{P}$ von M.*

BEWEIS. Die Familie $(\gamma\mathcal{F})_{\gamma\in\Gamma}$ ist lokal endlich. Das bedeutet: Jeder Punkt $x \in M$ hat eine (offene) Umgebung U_x derart, daß die Menge $\Gamma(\mathcal{F}, U_x)$ endlich ist. Zuerst zeige ich, daß diese lokale Eigenschaft der Umgebungen U_x sich auf kompakte Teilmengen von M übertragen läßt. Da $\mathcal{P}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $I \subset \mathcal{P}$, so daß $\mathcal{P} \subset \cup_{x\in I} U_x$ gilt. Damit ist

$$\Gamma(\mathcal{F}, \mathcal{P}) \subset \Gamma(\mathcal{F}, \cup_{x\in I} U_x) = \cup_{x\in I} \Gamma(\mathcal{F}, U_x)$$

endlich. Da die Familie $(\gamma\mathcal{F})_{\gamma\in\Gamma}$ eine Überdeckung von M ist und $\Gamma(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ endlich ist, gibt es eine endliche Teilmenge Δ von Γ mit $\mathcal{P} \subset \cup_{\gamma\in\Delta} \gamma\mathcal{F}$. Nun zeige ich, daß auch die Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ lokal endlich ist. Es sei $x \in M$ und es sei U eine (offene) Umgebung von x derart, daß die Menge $\Gamma(\mathcal{F}, U)$ endlich ist. Dann ist auch die Menge $\Gamma(\mathcal{P}, U)$ endlich, denn es gilt

$$\Gamma(\mathcal{P}, U) \subset \Gamma(\cup_{\gamma\in\Delta} \gamma\mathcal{F}, U) = \cup_{\gamma\in\Delta} \Gamma(\gamma\mathcal{F}, U) = \cup_{\gamma\in\Delta} \Gamma(\mathcal{F}, U) \cdot \gamma^{-1}. \ \blacksquare$$

Es sei M eine einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand, Γ eine diskrete Gruppe, die durch Homöomorphismen eigentlich diskontinuierlich auf M operiert. Es gebe eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von M derart, daß $(\gamma\mathcal{F})_{\gamma\in\Gamma}$ eine lokal endliche Überdeckung von M ist.

SATZ 55. *Es sei $\mathcal{P}$ eine Teilmenge von M mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathcal{P}$ ist zusammenhängend, der Rand von $\mathcal{P}$ ist eine Mannigfaltigkeit.*

(2) *Es sei ein Homöomorphismus von $\mathcal{P}$ auf ein kompaktes Polytop in $\mathbb{R}^3$ mit homogenem dreidimensionalen Fahnenkomplex gegeben. Dann ist klar, was die Menge der Seitenflächen $\mathfrak{F}$ bzw. die Menge der Kanten $\mathfrak{K}$ von $\mathcal{P}$ ist. Es sei*

$$\mathfrak{C} := \{(f, k) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{K} : k \subset f\}$$

und $\tau : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ die Involution derart, daß für $(g, l) := \tau(f, k)$ gilt $f \cap g = k = l$.

(3) *Es gibt eine Involution σ auf $\mathfrak{C}$ und eine Familie $(\gamma_f)_{f\in\mathfrak{F}}$ von Elementen aus Γ mit folgenden Eigenschaften:*
- *Es gilt $\sigma(f, k) = (\gamma_f f, \gamma_f k)$ für jedes $(f, k) \in \mathfrak{C}$.*
- *Zu jeder Seite $f \in \mathfrak{F}$ und jedem Punkt $x \in f^\circ$ gibt es eine Umgebung U von x mit $\gamma_f(U \cap (\mathcal{P})^\circ) \cap (\mathcal{P})^\circ = \varnothing$.*
- *Es gilt $\gamma_{\gamma_f f} = \gamma_f^{-1}$ für jedes $f \in \mathfrak{F}$.*
- *Γ wird erzeugt von $\{\gamma_f \mid f \in \mathfrak{F}\}$.*

(4) *Es sei $(f, k) \in \mathfrak{C}$ und m die Länge des $\tau\sigma$-Orbits von (f, k). Für $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ sei $(f_i, k_i) := (\tau\sigma)^{i-1}(f, k)$, $\gamma_i := (\gamma_{f_i} \cdot \ldots \cdot \gamma_{f_1})^{-1}$, $\mathcal{P}_i := \gamma_i \mathcal{P}$ und $h_i := \gamma_i f_{i+1}$.*
- *Es gilt $\gamma_m = 1$.*
- *Zu jedem Punkt $x \in k^\circ$ gibt es eine Umgebung U von x mit*

$$U \cap \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_{i+1} = U \cap h_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ und

$$U \cap \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = U \cap k$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, m+1\}$ *mit* $i < j-1$.

Es sei $N := \Gamma \times \mathcal{P}/\sim$ *mit* $(\delta\gamma_f, x) \sim (\delta, \gamma_f x)$ *für* $\delta \in \Gamma$, $f \in \mathfrak{F}$ *und* $x \in f$. $\mathrm{pr} : N \to M$ *sei definiert durch* $\mathrm{pr} : [(\gamma, x)] \mapsto \gamma x$.

Dann ist pr *ein Homöomorphismus und* $\mathcal{P}$ *ein Fundamentalbereich für die Operation von* Γ *auf* M.

Beweis.

(1) Die Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ ist lokal endlich nach der Proposition 54.

(2) pr ist ein lokaler Homöomorphismus: Es sei $a \in M$ und $\xi = [\gamma, x]$ mit $\mathrm{pr}(\xi) = a$. Ich zeige, daß pr lokal um ξ und a ein Homöomorphismus ist. Dazu unterscheide ich nun einige Fälle:

(a) Der Punkt x liegt im Inneren von $\mathcal{P}$: Es sei U offen mit $x \in U \subset \mathcal{P}$, dann ist die Menge $\{\gamma\} \times U/\sim$ nach Definition von N eine offene Umgebung von ξ, die unter pr zu der offenen Umgebung γU von a homöomorph ist.

(b) Der Punkt x liegt im Inneren einer Seitenfläche von $\mathcal{P}$: Es sei U offen mit $x \in U \subset \mathcal{P} \cup \gamma_f^{-1}\mathcal{P}$, dann ist die Menge

$$((\{\gamma\} \times U \cap \mathcal{P}) \cup (\{\gamma\gamma_f^{-1}\} \times \gamma_f U \cap \mathcal{P}))/\sim$$

eine offene Umgebung von ξ, die unter pr zu der offenen Umgebung γU von a homöomorph ist.

(c) Der Punkt x liegt im Inneren einer Kante von $\mathcal{P}$: Aufgrund der Homogenität des Fahnenkomplexes von $\mathcal{P}$ gibt es ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $(f, k) \in \mathfrak{C}$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x mit

$$U \cap \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_{i+1} = U \cap h_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m(f,k)+1\}$ und

$$U \cap \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = U \cap k$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, m(f,k)+1\}$ mit $i < j-1$. Die Menge

$$((\{\gamma\gamma_1\} \times \gamma_1^{-1} U \cap \mathcal{P}) \cup \cdots \cup (\{\gamma\gamma_m\} \times \gamma_m^{-1} U \cap \mathcal{P}))/\sim$$

ist eine offene Umgebung von ξ, die unter pr zu der offenen Umgebung γU von a homöomorph ist.

(d) Der Punkt x ist eine Ecke von $\mathcal{P}$: Es sei W eine so kleine offene Kugel um a, daß für kein $a' \in W\backslash\{a\}$ das Urbild $\mathrm{pr}^{-1}(\{a'\})$ eine Ecke von N enthält. Unter einer Ecke von N verstehe ich dabei einen Punkt $\xi' = [\gamma', x']$, wo x' eine Ecke von $\mathcal{P}$ ist. Nach Definition von N ist dann, falls $\xi' = [\gamma'', x'']$, auch x'' stets eine Ecke von $\mathcal{P}$. Die obige Wahl ist möglich aufgrund der lokalen Endlichkeit der Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ und der offensichtlichen Tatsache, daß $\mathcal{P}$ nur endlich viele Ecken besitzt. (Außerdem folgt aus der lokalen Endlichkeit der Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$, daß $\mathrm{pr}^{-1}(\{a'\})$ aus nur endlich vielen Punkten besteht.) Da N Hausdorffsch ist, kann W weiterhin so klein gewählt werden, daß jede Zusammenhangskomponente $\tilde{V}$ von $\mathrm{pr}^{-1}(W)$ genau einen Punkt $\tilde{\xi} \in \mathrm{pr}^{-1}(\{a\})$ enthält. Sei V die Zusammenhangskomponente von $\mathrm{pr}^{-1}(W)$, die den Punkt ξ enthält. Dann enthält $V\backslash\{\xi\}$ nur noch Punkte $\xi' = [\gamma', x']$, so daß x' keine

Ecke von $\mathcal{P}$ ist, also so, daß x' ein innerer Punkt von $\mathcal{P}$, von einer Seitenfläche von $\mathcal{P}$ oder von einer Seitenkante von $\mathcal{P}$ ist. Diese drei Fälle wurden bereits behandelt. Die abbildung $\mathrm{pr}|_{V\backslash\{\xi\}} : V\backslash\{\xi\} \to W\backslash\{a\}$ ist also ein lokaler Homöomorphismus, also ist das Bild $\mathrm{pr}(V\backslash\{\xi\})$ offen. Die Teilmengen $\gamma\mathcal{P}$ von M sind kompakt, der Raum M ist Hausdorffsch, also sind die Teilmengen $\gamma\mathcal{P}$ abgeschlossen. Die Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ ist lokal endlich, damit ist das Bild $\mathrm{pr}(V\backslash\{\xi\})$ abgeschlossen. Da $W\backslash\{a\}$ zusammenhängend ist, folgt $\mathrm{pr}(V\backslash\{\xi\}) = W\backslash\{a\}$. Damit ist $\mathrm{pr}|_{V\backslash\{\xi\}} : V\backslash\{\xi\} \to W\backslash\{a\}$ eine Überlagerung von zusammenhängenden Räumen. Alle geschlossenen Wege in $W\backslash\{a\}$ sind nullhomotop, werden durch pr also in nullhomotope Wege in $V\backslash\{\xi\}$ hochgehoben. Folglich ist diese Überlagerung trivial, also ein Homöomorphismus. Damit ist auch $\mathrm{pr}|_V : V \to W$ ein Homöomorphismus.

(3) N ist zusammenhängend: Die Gruppe Γ wird erzeugt von $\{\gamma_f \,|\, f \in \mathfrak{F}\}$, also gibt es zu jedem $\gamma \in \Gamma$ eine Folge $f_1, \ldots, f_n$ von Seitenflächen von $\mathcal{P}$ mit $\gamma = \gamma_{f_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{f_n}$. Es sei $\mathcal{P}_0 = \{1\} \times \mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_j = \{\gamma_{f_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{f_j}\} \times \mathcal{P}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $\mathcal{P}_{j-1} \cap \mathcal{P}_j \neq \varnothing$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Also läßt sich jeder Punkt von $\{\gamma\} \times \mathcal{P}$ durch einen stetigen Weg mit einem Punkt von $\{1\} \times \mathcal{P}$ verbinden.

(4) pr ist surjektiv: pr ist ein lokaler Homöomorphismus, also ist das Bild $\mathrm{pr}(N)$ offen. Die Teilmengen $\gamma\mathcal{P}$ von M sind kompakt, der Raum M ist Hausdorffsch, also sind die Teilmengen $\gamma\mathcal{P}$ abgeschlossen. Die Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ ist lokal endlich, damit ist das Bild $\mathrm{pr}(N) = \cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\mathcal{P}$ abgeschlossen als die Vereinigung der lokal endlichen abgeschlossenen Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$. Da M zusammenhängend ist, folgt $\mathrm{pr}(N) = M$.

(5) pr ist eine Überlagerung, da pr ein surjektiver lokaler Homöomorphismus, die Familie $(\gamma\mathcal{P})_{\gamma\in\Gamma}$ lokal endlich und der Raum N Hausdorffsch ist. pr ist ein Homöomorphismus, da N zusammenhängend und M einfach zusammenhängend ist.

Bemerkung. Mit zusätzlichen Voraussetzungen (Es wurde vorausgesetzt, daß $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich der Operation von Γ auf M ist und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ gilt.) wurde dieser Satz im Korollar 10.2 in [KNRS] bewiesen. Er geht auf Ludwig Balke zurück.

Bemerkung. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$, und gilt $\mathcal{P} = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathcal{P}$ und $\mathcal{F} = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathcal{F}$, so folgt $\mathcal{P} = \mathcal{F}$. Ist andererseits $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, ist dabei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ auf M, und gilt $\mathcal{P} = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathcal{P}$ und $\mathcal{F} = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathcal{F}$, so folgt auch $\mathcal{P} = \mathcal{F}$.

§15. Anwendung des kombinatorischen Kriteriums

Ich wende das Kriterium in der folgenden Situation an: $M := \tilde{G}$ ist eine einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^k$ ist eine Untergruppe der Stufe k in $\tilde{G}$. Die Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von $\tilde{G}$ operiert auf $M = \tilde{G}$ eigentlich diskontinuierlich durch Homöomorphismen. Es gibt eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\tilde{G}$ derart, daß $(\gamma\mathcal{F})_{\gamma\in\Gamma}$ eine lokal endliche Überdeckung von $\tilde{G}$ ist, nämlich $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\tilde{e}}$. Ich gebe eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \tilde{S}_{\tilde{e}}$ an, für die ich $\mathcal{P} = F_{\tilde{e}}$ zeigen will. Erfüllt $\Psi(\mathcal{P})$ die Voraussetzungen (1)–(6), so kann ich den Satz anwenden und es folgt, daß $\Psi(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_{\tilde{e}}$ und $\mathcal{P} = F_{\tilde{e}}$ gilt.

Ich liste nun die Voraussetzungen auf und beschreibe etwas genauer, wie ich bei ihrer Überprüfung vorgehen werde.

Die ersten beiden Voraussetzungen werde ich mit Hilfe der genauen Beschreibung von $\mathcal{P}$ nachprüfen können: $\mathcal{P}$ ist zusammenhängend und homöomorph zu einem kompakten Polytop in $\mathbb{R}^3$ mit homogenem dreidimensionalen Fahnenkomplex.

Die nächsten beiden Voraussetzungen werden mit kombinatorischen Mitteln überprüft. Es genügt, diese Bedingungen für $\mathcal{P}$ statt $\Psi(\mathcal{P})$ zu überprüfen, da $\Psi|_{\tilde{S}_{\tilde{e}}}$ ein äquivarianter Homöomorphismus auf das Bild ist.

Man kann zeigen, daß zu jeder Seitenfläche f von $\mathcal{P}$ ein eindeutig bestimmtes $g \in \tilde{\Gamma}$ mit $f \subset \tilde{E}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ existiert, falls die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ keine parabolischen Elemente enthält. Es sei $\gamma_f := g^{-1}$.

Es gilt $\sigma(f,k) = (\gamma_f f, \gamma_f k)$ für jedes $(f,k) \in \mathfrak{C}$: Für jede Seitenfläche f von $\mathcal{P}$ berechne ich, wie f unter γ_f abgebildet wird. Da die Multiplikation mit γ_f eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ist, genügt es, die Bilder der Ecken von f auszurechnen. Es sei f eine Seitenfläche von $\mathcal{P}$, die in $\tilde{E}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthalten ist. Eine Ecke von f kann als Durchschnitt $\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_g \cap \tilde{E}_{h_1} \cap \tilde{E}_{h_2}$ von vier Hyperebenen dargestellt werden. Dadurch ergibt sich eine Darstellung des Bildes dieser Ecke unter $\gamma_f = g^{-1}$ als

$$g^{-1} \cdot (\tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_g \cap \tilde{E}_{h_1} \cap \tilde{E}_{h_2}) = \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_{g^{-1}} \cap \tilde{E}_{g^{-1}h_1} \cap \tilde{E}_{g^{-1}h_2}.$$

Sind die Bilder aller Ecken von f wieder Ecken einer Seitenfläche f' von $\mathcal{P}$ in richtiger Reihenfolge, das heißt so, daß die Bilder der von einer Kante verbundenen Ecken wieder durch eine Kante verbunden sind, so bildet die Multiplikation mit $\gamma_f = g^{-1}$ die Seitenfläche f bijektiv auf die Seitenfläche f' ab und überführt dabei die Ecken und Kanten von f in die Ecken und Kanten von f'.

Zu jeder Seite $f \in \mathfrak{F}$ und jedem Punkt $x \in f^\circ$ gibt es eine Umgebung U von x mit $\gamma_f(U \cap (\mathcal{P})^\circ) \cap (\mathcal{P})^\circ = \varnothing$: Die Seitenfläche f sei in $\tilde{E}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthalten. Die durch Multiplikation mit $\gamma_f = g^{-1}$ gegebene Abbildung ist orientierungstreu und überführt die Seite f in die in $\tilde{E}_{g^{-1}} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltene Seite. Bei vorgegebener Orientierung des Kantenzuges der Seite f kann man an der von der Multiplikation mit g^{-1} induzierten Orientierung der Bildseite sehen, daß es zu jedem $x \in f^\circ$ eine Umgebung U mit $g^{-1} \cdot (U \cap (\mathcal{P})^\circ) \cap (\mathcal{P})^\circ = \varnothing$ gibt.

Es gilt $\gamma_{\gamma_f f} = \gamma_f^{-1}$ für jedes $f \in \mathfrak{F}$: Die Seitenfläche f sei in $\tilde{E}_g$ enthalten, dann gilt $\gamma_f = g^{-1}$. Da $\gamma_f f$ in $g^{-1} \cdot (\tilde{E}_g \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = \tilde{E}_{g^{-1}} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthalten ist, folgt

$$\gamma_{\gamma_f f} = (g^{-1})^{-1} = g = \gamma_f^{-1}.$$

$\tilde{\Gamma}$ ist erzeugt von $\{\gamma_f \mid f \in \mathfrak{F}\}$: Nach dem Satz 38 wird die Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von $\tilde{r}_u c^{n_u}$, $\tilde{r}_v c^{n_v}$ und c^k erzeugt, wobei $n_u p + 1$ und $n_v q + 1$ durch k teilbar sind. Es genügt, die erzeugenden Elemente von $\tilde{\Gamma}$ darzustellen. In allen in dieser Arbeit genauer betrachteten Fällen gilt, daß für eine Seite von $\mathcal{P}$, nämlich für den Boden b, gilt $\gamma_b = r_d = \tilde{r}_u^k$, und für eine andere Seite f von $\mathcal{P}$ gilt $\gamma_f = (\tilde{r}_v c^{n_v})(\tilde{r}_u c^{n_u})^j (c^k)^l$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
c^k &= (\tilde{r}_u^p)^k = (\tilde{r}_u^k)^p = (\gamma_b)^p, \\
\tilde{r}_u c^{n_u} &= \tilde{r}_u (\tilde{r}_u^p)^{n_u} = \tilde{r}_u^{n_u p+1} = (\tilde{r}_u^k)^{\frac{n_u p+1}{k}} = (\gamma_b)^{\frac{n_u p+1}{k}}, \\
\tilde{r}_v c^{n_v} &= \gamma_f (\tilde{r}_u c^{n_u})^{-j} (c^k)^{-l}.
\end{aligned}$$

Im Weiteren notiere ich die in $\tilde{E}_a \cap \tilde{E}_b \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltene Kante der in $\tilde{E}_a \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltenen Seitenfläche als $(a;b)$. Diese Notation ist nicht eindeutig, die folgenden Aussagen gelten aber für alle solche Kanten und Seitenflächen, falls es mehrere gibt. Nachdem ich die Wirkung der Involution σ beschrieben habe, kann ich für jedes Paar $(f,k) \in \mathfrak{C}$ den Kantenzyklus, also die Folge der Paare $(f_i,k_i) := (\tau\sigma)^{i-1}(f,k)$ ausrechnen. In allen in dieser Arbeit genauer betrachteten Fällen gehören die Kantenzyklen zu einem der zwei folgenden Typen:

- ℵ Der Zykel besteht aus drei konvexen Kanten, die nicht im Deckel oder Boden enthalten sind.
- ב Der Zykel besteht aus drei Kanten, von denen zwei konvex und im Deckel bzw. Boden enthalten sind, während die dritte Kante nicht konvex und nicht im Deckel bzw. Boden enthalten ist.

Die Zyklen sehen so aus:

$$\begin{array}{ccccc}
(a;b) & \xrightarrow{\sigma} & (a^{-1};a^{-1}b) & \xrightarrow{\tau} & (a^{-1}b;a^{-1}) \\
\uparrow\tau & & & & \downarrow\sigma \\
(b;a) & \xleftarrow{\sigma} & (b^{-1};b^{-1}a) & \xleftarrow{\tau} & (b^{-1}a;b^{-1})
\end{array}$$

oder, in Kurzschreibweise,

$$(a;b) \mapsto (a^{-1}b;a^{-1}) \mapsto (b^{-1};b^{-1}a).$$

Damit gilt $\gamma_1 = a$, $\gamma_2 = aa^{-1}b = b$ und $\gamma_3 = bb^{-1} = e$. Für einen Zykel vom Typ ℵ gilt für eine genügend kleine Umgebung U eines inneren Punktes der Kante $(a;b)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \cap U &= (\tilde{I}_a \cap \tilde{I}_b \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U, \\
\gamma_1\mathcal{P} \cap U &= a(\tilde{I}_{a^{-1}b} \cap \tilde{I}_{a^{-1}} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U = (\tilde{I}_b \cap \tilde{I}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_a) \cap U, \\
\gamma_2\mathcal{P} \cap U &= b(\tilde{I}_{b^{-1}} \cap \tilde{I}_{b^{-1}a} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U = (\tilde{I}_{\tilde{e}} \cap \tilde{I}_a \cap \tilde{E}_b) \cap U.
\end{aligned}$$

Damit sind

$$\mathcal{P} \cap \gamma_1\mathcal{P} \cap U = (\tilde{I}_b \cap \tilde{E}_a \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U$$

und

$$\mathcal{P} \cap \gamma_2\mathcal{P} \cap U = (\tilde{I}_a \cap \tilde{E}_b \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U$$

gleich den Durchschnitten der Umgebung U mit den in $\tilde{E}_a \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ bzw. $\tilde{E}_b \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltenen Seitenflächen. Ferner ist

$$\gamma_1\mathcal{P} \cap \gamma_2\mathcal{P} \cap U = (\tilde{I}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_a \cap \tilde{E}_b) \cap U = a(\tilde{I}_{a^{-1}} \cap \tilde{E}_{a^{-1}b} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U$$

gleich dem Bild der in $\tilde{E}_{a^{-1}b} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltenen Seitenfläche von $\mathcal{P}$ unter der Multiplikation mit $\gamma_1 = a$. Für einen Zykel vom Typ ב gilt für eine genügend kleine Umgebung U eines inneren Punktes der Kante $(a;b)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \cap U &= ((\tilde{I}_a \cup \tilde{I}_b) \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U, \\
\gamma_1\mathcal{P} \cap U &= a(\tilde{H}_{a^{-1}b} \cap \tilde{I}_{a^{-1}} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U = (\tilde{H}_b \cap \tilde{I}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_a) \cap U, \\
\gamma_2\mathcal{P} \cap U &= b(\tilde{I}_{b^{-1}} \cap \tilde{H}_{b^{-1}a} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U = (\tilde{I}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_a \cap \tilde{E}_b) \cap U.
\end{aligned}$$

Damit sind

$$\mathcal{P} \cap \gamma_1 \mathcal{P} \cap U = (\tilde{H}_b \cap \tilde{E}_a \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U$$

und

$$\mathcal{P} \cap \gamma_2 \mathcal{P} \cap U = (\tilde{H}_a \cap \tilde{E}_b \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U$$

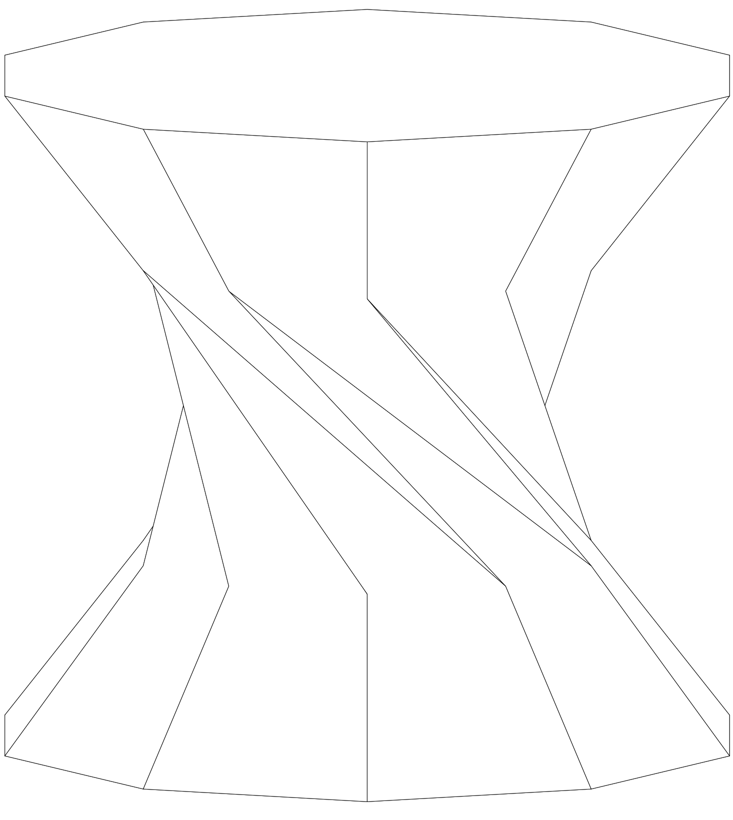
gleich den Durchschnitten der Umgebung U mit den in $\tilde{E}_a \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ bzw. $\tilde{E}_b \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltenen Seitenflächen. Ferner ist

$$\gamma_1 \mathcal{P} \cap \gamma_2 \mathcal{P} \cap U = (\tilde{I}_{\tilde{e}} \cap \tilde{E}_b \cap \tilde{E}_a) \cap U = a(\tilde{I}_{a^{-1}} \cap \tilde{E}_{a^{-1}b} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) \cap U$$

gleich dem Bild der in $\tilde{E}_{a^{-1}b} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthaltenen Seitenfläche von $\mathcal{P}$ unter der Multiplikation mit $\gamma_1 = a$.

3

Die Serien E, Z und Q



Es sei $l \in \{1, 2, 3\}$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 3)^k$ mit $p = lk + 3$ bzw. $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 2)^k$ mit $p = lk + 6$ bzw. $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 4, 2)^k$ mit $p = lk + 4$. Dabei entsprechen die Fälle $l = 1$, 2 und 3 den Serien E, Z und Q. Für die Konstruktion des Fundamentalbereichs von $\tilde{\Gamma}$ sei der Fixpunkt $u = 0$ der Ordnung p gewählt.

§16. Vorüberlegungen

Notation. Der Koeffizient λ und der Winkel α seien wie folgt definiert

$$\begin{array}{lll} \lambda = 2, & \alpha = \frac{\pi}{2p} & \text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k \\ \lambda = 1, & \alpha = \frac{\pi}{p} & \text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k \\ \lambda = 2, & \alpha = \frac{\pi}{p} & \text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k \end{array}$$

Bemerkung. Die Notation ist so gewählt, um die Fälle $\Gamma(p, 3, 2)^k$ und $\Gamma(p, 3, 3)^k$ einheitlich behandeln zu können. Der Grund dafür, daß die Beweise für diese zwei Fälle analog verlaufen, ist die Tatsache, daß die Gruppe $\Gamma(p, 3, 3)$ eine Untergruppe vom Index 2 in $\Gamma(2p, 3, 2)$ ist.

Erinnerung. Ich trage nun die Notation für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, q, r)^k$ aus dem Kapitel I und den Propositionen 39 und 47 zusammen. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p}$ und $r_d = (\tilde{r}_u)^k = \tilde{r}_u(4\vartheta_d)$. Es gilt ferner $C = \cosh \ell_v$, $S = \sinh \ell_v$, $B = \sinh \ell_v \cdot \sin \frac{\pi}{q}$ und $R_{\mathcal{K}} = \tanh \ell_v$.

Proposition 56. *In den hier zu betrachtenden Fällen gilt nach (A5)*

$$C = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{q} \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Proposition 57. *Es gilt*

$$\begin{array}{ll} l \cdot \vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 3\alpha & \textit{in den Fällen } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k \textit{ und } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k, \\ l \cdot \vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 2\alpha & \textit{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k. \end{array}$$

Beweis. Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 3)^k$ gilt

$$l \cdot \vartheta_d = \frac{\pi l k}{2p} = \frac{\pi(p-3)}{2p} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2p} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha,$$

im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 2)^k$ gilt

$$l \cdot \vartheta_d = \frac{\pi l k}{2p} = \frac{\pi(p-6)}{2p} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{p} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha,$$

im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 4, 2)^k$ gilt

$$l \cdot \vartheta_d = \frac{\pi l k}{2p} = \frac{\pi(p-4)}{2p} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha. \blacksquare$$

Erinnerung. Für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, q, r)^k$ gilt $r_u = r_u(2\pi/p)$, $r_v = r_v(2\pi/q)$, $r_w = r_w(2\pi/r)$.

Proposition 58. *Es sei*

$$A = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\alpha}.$$

Dann gilt

$$r_u = (e^{i\pi/p}, 0), \quad r_v = (iA\cdot e^{-i\alpha}, -iB), \quad r_v^{q-1} = (iA\cdot e^{i\alpha}, -iB).$$

Im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ *gilt außerdem* $r_v^2 = (iC, -iS)$.

Beweis. Nach der Proposition 39 gilt

$$r_u = (e^{i\pi/p}, 0), \quad r_v = (\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB), \quad r_v^{q-1} = (-\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB),$$

und im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ gilt $r_v^2 = (iC, -iS)$. Wegen $C = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{q}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$ folgt

$$\pm\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q} = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\alpha}(\pm\sin\alpha + i\cos\alpha) = Aie^{\mp i\alpha}.$$

Damit gilt $r_v = (Aie^{-i\alpha}, -iB)$ und $r_v^{q-1} = (Aie^{i\alpha}, -iB)$. ∎

Erinnerung. Für $\tilde\Gamma = \Gamma(p,q,r)^k$ gilt

$$\tilde r_u = \tilde r_u(2\pi/p), \quad \tilde r_v = \tilde r_v(2\pi/q), \quad \tilde r_w = \tilde r_w(2\pi/r)$$

und $\tilde r_u^p = \tilde r_v^q = \tilde r_w^r = \tilde r_u\tilde r_v\tilde r_w = c$.

Proposition 59. *Im Falle* $\tilde\Gamma = \Gamma(p,q,2)^k$ *gilt* $\tilde r_u\tilde r_v\tilde r_u = \tilde r_v^{q-1}$.

Beweis. Es gilt $\tilde r_u\tilde r_v\tilde r_u\tilde r_v = (\tilde r_u\tilde r_v)^2 = (\tilde r_w^{-1}c)^2 = c$ und damit $\tilde r_u\tilde r_v\tilde r_u = \tilde r_v^{-1}c = \tilde r_v^{q-1}$. ∎

Proposition 60. *Es gilt*

$$\arg(\tilde r_u) = \frac{\pi}{p}, \quad \arg(\tilde r_v) = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \arg(\tilde r_v^{q-1}) = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

und im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ *gilt außerdem* $\arg(\tilde r_v^2) = \frac{\pi}{2}$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Propositionen 18 und 58. ∎

Definition. Es sei $\tilde\rho : \tilde L \to \tilde L$ die Konjugation mit dem Element $a := \tilde r_u(2\alpha)$, also $\tilde\rho(g) := aga^{-1}$. Die Abbildung $\tilde\rho$ ist eine Isometrie von $\tilde L$, die Abbildung $\tilde\rho|_{\tilde G}$ ist ein Automorphismus.

Proposition 61. *Es gilt* $\pi(\tilde\rho(g)) = (w, ze^{2i\alpha})$ *und* $\arg(\tilde\rho(g)) = \arg(g)$ *für* $g \in \tilde L$ *mit* $\pi(g) = (w,z)$. *Damit gilt* $\tilde\rho(\tilde r_u) = \tilde r_u$ *und* $\tilde\rho(c) = c$.

Im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k$ *gilt*

$$\tilde\rho^2(g) = \tilde r_u g\tilde r_u^{-1}, \quad \tilde\rho^{2k}(g) = r_d g r_d^{-1}, \quad \tilde\rho^{2p} = \mathrm{id}, \quad \tilde\rho(\tilde r_v) = \tilde r_v^{q-1}\tilde r_u^{-1}.$$

In den Fällen $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,2)^k$ *und* $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ *gilt*

$$\tilde\rho(g) = \tilde r_u g\tilde r_u^{-1}, \quad \tilde\rho^k(g) = r_d g r_d^{-1}, \quad \tilde\rho^p = \mathrm{id}, \quad \tilde\rho(\tilde r_v) = \tilde r_v^{q-1}\tilde r_u^{-2}.$$

Beweis. Es sei $a := \tilde{r}_u(2\alpha)$ und $g \in \tilde{G}$ mit $\pi(g) = (w, z)$. Es gilt $\pi(a^{\pm 1}) = (e^{\pm i\alpha}, 0)$ und damit

$$\pi(\tilde{\rho}(g)) = (e^{i\alpha}, 0) \cdot (w, z) \cdot (e^{-i\alpha}, 0) = (e^{i\alpha}, 0) \cdot (we^{-i\alpha}, ze^{i\alpha}) = (w, ze^{2i\alpha}).$$

Nach der Proposition 16 gilt

$$\arg(\tilde{\rho}(g)) = \arg(a) + \arg(g) + \arg(a^{-1}) = \arg(a) + \arg(g) - \arg(a) = \arg(g).$$

Wegen $\pi(\tilde{r}_u) = (e^{i\pi/p}, 0)$ und $\pi(c) = -e = (-1, 0)$ gilt also $\tilde{\rho}(\tilde{r}_u) = \tilde{r}_u$ und $\tilde{\rho}(c) = c$. Im ersten Fall gilt $\tilde{r}_u(2\alpha)^2 = \tilde{r}_u(4\alpha) = \tilde{r}_u(2\pi/p) = \tilde{r}_u$ und damit $\tilde{\rho}^2(g) = \tilde{r}_u g \tilde{r}_u^{-1}$ und $\tilde{\rho}^{2k}(g) = \tilde{r}_u^k g \tilde{r}_u^{-k} = r_d g r_d^{-1}$. Wegen $\tilde{r}_u^p = c$ folgt $\tilde{\rho}^{2p}(g) = \tilde{r}_u^p g \tilde{r}_u^{-p} = cgc^{-1} = g$. Im zweiten Fall gilt $\tilde{r}_u(2\alpha) = \tilde{r}_u(2\pi/p) = \tilde{r}_u$ und damit $\tilde{\rho}(g) = \tilde{r}_u g \tilde{r}_u^{-1}$ und $\tilde{\rho}^k(g) = \tilde{r}_u^k g \tilde{r}_u^{-k} = r_d g r_d^{-1}$. Wegen $\tilde{r}_u^p = c$ folgt $\tilde{\rho}^p(g) = \tilde{r}_u^p g \tilde{r}_u^{-p} = cgc^{-1} = g$. Im ersten Fall zeigt man $\tilde{\rho}(\tilde{r}_v) = \tilde{r}_v^{q-1}\tilde{r}_u^{-1}$ durch explizite Rechnung mit Hilfe der Proposition 58. Im zweiten Fall gilt $\tilde{r}_u\tilde{r}_v\tilde{r}_u = \tilde{r}_v^{q-1}$ nach der Proposition 59 und damit $\tilde{\rho}(\tilde{r}_v) = \tilde{r}_u\tilde{r}_v\tilde{r}_u^{-1} = \tilde{r}_v^{q-1}\tilde{r}_u^{-2}$. ∎

Definition. Die Elemente $g_{m,t,j} \in \tilde{G}$ für $m, t, j \in \mathbb{Z}$ seien definiert durch

$$g_{m,t,j} := \tilde{r}_u^m \tilde{r}_v^t \tilde{r}_u^j c^{-1}.$$

Proposition 62. *Es gilt* $g_{m,t,j}(u) = x_{m,t}$. ∎

Proposition 63. *Es gilt* $(g_{m,t,j})^{-1} = g_{p-j,q-t,-m}$.

Beweis. Es gilt $(g_{m,t,j})^{-1} = (\tilde{r}_u^m\tilde{r}_v^t\tilde{r}_u^j c^{-1})^{-1} = \tilde{r}_u^{-j}\tilde{r}_v^{-t}\tilde{r}_u^{-m}c$. Wegen $\tilde{r}_u^p = \tilde{r}_v^q = c$ gilt $\tilde{r}_u^{-j}\tilde{r}_v^{-t}\tilde{r}_u^{-m}c = \tilde{r}_u^{p-j}\tilde{r}_v^{q-t}\tilde{r}_u^{-m}c^{-1} = g_{p-j,q-t,-m}$. ∎

Proposition 64. *Nach der Proposition 59 gilt im Falle* $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(p, q, 2)^k$

$$g_{m,1,j} = g_{m-1,q-1,j-1} \quad \textit{und} \quad g_{m,q-1,j} = g_{m+1,1,j+1}. \ ∎$$

Proposition 65. *Im Falle* $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 3)^k$ *gilt* $\tilde{\rho}^2(g_{m,t,j}) = g_{m+1,t,j-1}$ *und* $\tilde{\rho}(g_{m,1,j}) = g_{m,2,j-1}$. *In den Fällen* $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 2)^k$ *und* $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 4, 2)^k$ *gilt* $\tilde{\rho}(g_{m,t,j}) = g_{m+1,t,j-1}$ *und* $\tilde{\rho}(g_{m,1,j}) = g_{m,q-1,j-2}$.

Beweis. Nach der Proposition 61 gilt im ersten Fall $\tilde{\rho}^2(g) = \tilde{r}_u g \tilde{r}_u^{-1}$ und im zweiten Fall $\tilde{\rho}(g) = \tilde{r}_u g \tilde{r}_u^{-1}$. Dabei gilt

$$\tilde{r}_u g_{m,t,j} \tilde{r}_u^{-1} = \tilde{r}_u(\tilde{r}_u^m \tilde{r}_v^t \tilde{r}_u^j c^{-1})\tilde{r}_u^{-1} = \tilde{r}_u^{m+1}\tilde{r}_v^t\tilde{r}_u^{j-1}c^{-1} = g_{m+1,t,j-1}.$$

Wiederum nach der Proposition 61 gilt $\tilde{\rho}(\tilde{r}_u) = \tilde{r}_u$ und $\tilde{\rho}(c) = c$, ferner gilt im ersten Fall $\tilde{\rho}(\tilde{r}_v) = \tilde{r}_v^{q-1}\tilde{r}_u^{-1}$ und im zweiten Fall $\tilde{\rho}(\tilde{r}_v) = \tilde{r}_v^{q-1}\tilde{r}_u^{-2}$. Damit gilt

$$\tilde{\rho}(g_{m,1,j}) = \tilde{\rho}(\tilde{r}_u^m\tilde{r}_v\tilde{r}_u^j c^{-1}) = \tilde{\rho}(\tilde{r}_u)^m\tilde{\rho}(\tilde{r}_v)\tilde{\rho}(\tilde{r}_u)^j\tilde{\rho}(c)^{-1} = \tilde{r}_u^m\tilde{\rho}(\tilde{r}_v)\tilde{r}_u^j c^{-1}$$

und folglich

$$\tilde{\rho}(g_{m,1,j}) = \tilde{r}_u^m(\tilde{r}_v^2\tilde{r}_u^{-1})\tilde{r}_u^j c^{-1} = g_{m,2,j-1}$$

im ersten Fall und

$$\tilde{\rho}(g_{m,1,j}) = \tilde{r}_u^m(\tilde{r}_v^{q-1}\tilde{r}_u^{-2})\tilde{r}_u^j c^{-1} = g_{m,q-1,j-2}$$

im zweiten Fall. ∎

Definition. Es sei $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \equiv l \mod 2$. Es sei

$$\begin{aligned} &\text{im Falle } \tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k: && f_{m,j} := \tilde\rho^m(g_{0,1,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\ &\text{im Falle } \tilde\Gamma = \Gamma(p,3,2)^k: && f_{m,j} := \tilde\rho^m(g_{0,1,4+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\ &\text{im Falle } \tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k: && f_{2m,j} := \tilde\rho^m(g_{0,1,3+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\ &&& f_{2m+1,j} := \tilde\rho^m(g_{0,2,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}). \end{aligned}$$

Aus der Proposition 65 folgt

$$\begin{aligned} &\text{im Falle } \tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k: && f_{m,j} = \tilde\rho^m(g_{0,1,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = \tilde\rho^{m-1}(g_{0,2,1+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\ &\text{im Falle } \tilde\Gamma = \Gamma(p,3,2)^k: && f_{m,j} = \tilde\rho^m(g_{0,1,4+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = \tilde\rho^{m-1}(g_{0,2,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\ &\text{im Falle } \tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k: && f_{2m,j} = \tilde\rho^m(g_{0,1,3+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = \tilde\rho^{m-1}(g_{0,3,1+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\ &&& f_{2m+1,j} = \tilde\rho^m(g_{0,2,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}). \end{aligned}$$

Definition. Eine Isometrie φ von $\tilde L$ ist eine *Symmetrie* des Fundamentalbereichs $F_{\tilde e}$, wenn $\varphi(\partial P) = \partial P$ und $\varphi(F_{\tilde e}) = F_{\tilde e}$ gilt. Dabei ist $P = \bigcup_{x\in\tilde\Gamma(u)} Q_x$.

Bemerkung. Für jede Isometrie φ von $\tilde L$ gilt $\varphi(\tilde H_g) = \tilde H_{\varphi(g)}$. Damit folgt aus der Definition von ∂P und $F_{\tilde e}$, daß eine Isometrie φ von $\tilde L$ genau dann eine Symmetrie von $F_{\tilde e}$ ist, wenn $\varphi(\tilde\Gamma) = \tilde\Gamma$, $\varphi(g\tilde\Gamma_u) = \varphi(g)\cdot\tilde\Gamma_u$ für alle $g \in \tilde\Gamma$ und $\varphi(\tilde e) = \tilde e$ gilt. Ist φ eine Isometrie von $\tilde L$ und $\varphi|_{\tilde G}$ ein Automorphismus, so ist φ genau dann eine Symmetrie von $F_{\tilde e}$, wenn $\varphi(\tilde\Gamma) = \tilde\Gamma$ und $\varphi(\tilde\Gamma_u) = \tilde\Gamma_u$ gilt.

Erinnerung. Die Isometrie $\tilde\eta$ von $\tilde L$ ist definiert als die Hochhebung der durch

$$\eta((w,z)) = (\bar w, \bar z)$$

gegebenen Isometrie von L mit $\tilde\eta(\tilde e) = \tilde e$. Es gilt $\arg\circ\tilde\eta = -\arg$. Die Isometrie $\tilde\eta|_{\tilde G}$ ist ein Automorphismus.

Proposition 66. *Die Isometrien $\tilde\rho$ und $\tilde\eta$ von $\tilde L$ sind Symmetrien von $F_{\tilde e}$.*

Beweis. Die Isometrien $\tilde\rho|_{\tilde G}$ und $\tilde\eta|_{\tilde G}$ sind Automorphismen, also bleibt es zu überprüfen, daß $\tilde\Gamma$ und $\tilde\Gamma_u$ unter $\tilde\rho$ und $\tilde\eta$ invariant sind. Dabei wird $\tilde\Gamma$ nach dem Satz 38 von $\tilde r_u c^{n_u}$, $\tilde r_v c^{n_v}$ und c^k und $\tilde\Gamma_u$ von $r_d = \tilde r_u^k$ erzeugt. Nach der Proposition 61 gilt $\tilde\rho(\tilde r_u) = \tilde r_u$, $\tilde\rho(c) = c$, im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k$ gilt $\tilde\rho(\tilde r_v) = \tilde r_v^{q-1}\tilde r_u^{-1}$ und in den Fällen $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,2)^k$ und $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ gilt $\tilde\rho(\tilde r_v) = \tilde r_v^{q-1}\tilde r_u^{-2}$. Nach der Proposition 19 gilt $\tilde\eta(\tilde r_u) = \tilde r_u^{-1}$, $\tilde\eta(\tilde r_v) = \tilde r_v^{-1}$ und $\tilde\eta(c) = c^{-1}$ wegen $u, v \in [0,1) \subset \mathbb{D}$. ∎

Proposition 67. *In den Fällen $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k$ und $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,2)^k$ gilt $\tilde\rho(f_{m,j}) = f_{m+1,j}$ und $\tilde\eta(f_{0,j}) = f_{1,-j}$. Im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ gilt $\tilde\rho(f_{m,j}) = f_{m+2,j}$, $\tilde\eta(f_{0,j}) = f_{2,-j}$ und $\tilde\eta(f_{1,j}) = f_{1,-j}$.*

Beweis. In den Fällen $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k$ und $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,2)^k$ gilt $f_{m,j} = \tilde\rho^m(f_{0,j})$ und damit $\tilde\rho(f_{m,j}) = \tilde\rho^{m+1}(f_{0,j}) = f_{m+1,j}$. Im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,4,2)^k$ gilt $f_{2m,j} = \tilde\rho^m(f_{0,j})$ und $f_{2m+1,j} = \tilde\rho^m(f_{1,j})$. Damit gilt $\tilde\rho(f_{2m,j}) = \tilde\rho^{m+1}(f_{0,j}) = f_{2m+2,j}$ und $\tilde\rho(f_{2m+1,j}) = \tilde\rho^{m+1}(f_{0,j}) = f_{(2m+1)+2,j}$. Im Falle $\tilde\Gamma = \Gamma(p,3,3)^k$ gilt

$$\tilde\eta(f_{0,j}) = \tilde\eta(g_{0,1,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = (g_{0,-1,-2-k\cdot\frac{l+j}{2}})c^2 = g_{0,3-1,p-2-k\cdot\frac{l+j}{2}} = g_{0,2,1+k\cdot\frac{l-j}{2}} = f_{1,-j}.$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$ gilt

$$\tilde{\eta}(f_{0,j}) = \tilde{\eta}(g_{0,1,4+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = (g_{0,-1,-4-k\cdot\frac{l+j}{2}})c^2 = g_{0,3-1,p-4-k\cdot\frac{l+j}{2}} = g_{0,2,2+k\cdot\frac{l-j}{2}} = f_{1,-j}.$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k$ gilt

$$\tilde{\eta}(f_{0,j}) = \tilde{\eta}(g_{0,1,3+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = g_{0,-1,-3-k\cdot\frac{l+j}{2}}c^2 = g_{0,4-1,p-3-k\cdot\frac{l+j}{2}} = g_{0,3,1+k\cdot\frac{l-j}{2}} = f_{2,-j}$$

und

$$\tilde{\eta}(f_{1,j}) = \tilde{\eta}(g_{0,2,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = g_{0,-2,-2-k\cdot\frac{l+j}{2}}c^2 = g_{0,4-2,p-2-k\cdot\frac{l+j}{2}} = g_{0,2,2+k\cdot\frac{l-j}{2}} = f_{1,-j}. \blacksquare$$

Bemerkung. Die Gruppe $\langle\tilde{\rho},\tilde{\eta}\rangle$ ist isomorph zur Diedergruppe der Ordnung $4p$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ und zur Diedergruppe der Ordnung $2p$ in den Fällen $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k$. Analog zu [Ba, Proposition 8] kann man zeigen, daß die Gruppe aller Symmetrien von $F_{\tilde{e}}$ gleich der Gruppe $\langle\tilde{\rho},\tilde{\eta}\rangle$ ist.

Proposition 68. *Es gilt*

$$\begin{array}{ll}
\textit{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k: & T(x_{m,1}) = \{f_{2m,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}, \\
 & T(x_{m,2}) = \{f_{2m+1,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}, \\
\textit{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k: & T(x_{m,1}) = T(x_{m-1,2}) = \{f_{m,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}, \\
\textit{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k: & T(x_{m,1}) = T(x_{m-1,3}) = \{f_{2m,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}, \\
 & T(x_{m,2}) = \{f_{2m+1,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}.
\end{array}$$

Beweis. Ich zeige, daß $T(x_{m,1}) = \{f_{2m,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ gilt, die anderen Aussagen zeigt man analog. Die Gruppe $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ wird nach dem Satz 38 von den Elementen $\tilde{r}_u c^n$, $\tilde{r}_v c^n$ und c^k erzeugt, wobei $3n+1$ durch k teilbar ist. Dabei gilt

$$f_{0,-l} = \tilde{r}_v\tilde{r}_u^2 c^{-1} = (\tilde{r}_v c^n)(\tilde{r}_u c^n)^2 (c^k)^{-\frac{3n+1}{k}} \in \tilde{\Gamma}.$$

Es gilt ferner

$$f_{2m,-l} = \tilde{\rho}^{2m}(f_{0,-l}) = \tilde{r}_u^m f_{0,-l}\tilde{r}_u^{-m} = (\tilde{r}_u c^n)^m f_{0,-l}(\tilde{r}_u c^n)^{-m} \in \tilde{\Gamma}.$$

Nach der Proposition 62 gilt $f_{2m,-l}(u) = x_{m,1}$. Aus $f_{2m,-l} \in \tilde{\Gamma}$ und $f_{2m,-l}(u) = x_{m,1}$ folgt $f_{2m,-l} \in T(x_{m,1})$. Damit gilt (wegen $T(u) = \tilde{\Gamma}_u = \{r_d^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$)

$$\begin{aligned} T(x_{m,1}) &= f_{2m,-l}\cdot T(u) = \{f_{2m,-l}r_d^j \mid j \in \mathbb{Z}\} = \{f_{2m,-l+2j} \mid j \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f_{2m,j} \mid j \in \mathbb{Z},\ j \equiv l \mod 2\}. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 69. *Es sei $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \equiv l \mod 2$. Dann gilt $\arg(f_{m,j}) = j\cdot\vartheta_d$ und damit $|\arg(f_{m,j})| < \frac{\pi}{2}$, falls $|j| \leqslant l$.*

Beweis. Nach der Proposition 61 gilt $\arg(\tilde{\rho}(g)) = \arg(g)$ für $g \in \tilde{\Gamma}$. Daraus folgt $\arg(f_{2m,j}) = \arg(f_{0,j})$ und $\arg(f_{2m+1,j}) = \arg(f_{1,j})$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k$, sowie $\arg(f_{m,j}) = \arg(f_{0,j})$ in den Fällen $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$. Ich zeige nun, daß $\arg(f_{m,-l}) = -l \cdot \vartheta_d$ gilt. Dabei benutze ich die Propositionen 16, 57 und 60. Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ gilt

$$\arg(f_{0,-l}) = \arg(\tilde{r}_v \tilde{r}_u^2 c^{-1}) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2 \cdot 2\alpha - \pi = -\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = -l \cdot \vartheta_d.$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$ gilt

$$\arg(f_{0,-l}) = \arg(\tilde{r}_v \tilde{r}_u^4 c^{-1}) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 4 \cdot \alpha - \pi = -\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = -l \cdot \vartheta_d.$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k$ gilt

$$\begin{aligned} \arg(f_{0,-l}) &= \arg(\tilde{r}_v \tilde{r}_u^3 c^{-1}) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \cdot \alpha - \pi = -\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = -l \cdot \vartheta_d, \\ \arg(f_{1,-l}) &= \arg(\tilde{r}_v^2 \tilde{r}_u^2 c^{-1}) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \alpha - \pi = -\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = -l \cdot \vartheta_d. \end{aligned}$$

Es gilt ferner $\arg(f_{m,j+2}) = \arg(f_{m,j} r_d) = \arg(f_{m,j}) + 2\vartheta_d$. Damit gilt $\arg(f_{m,j}) = j\vartheta_d$. Im Falle $|j| \leqslant l$ gilt

$$|\arg(f_{m,j})| \leqslant |\arg(f_{m,\pm l})| = l \cdot \vartheta_d < \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

Definition. Es sei

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{m,j} &= \tilde{E}_{f_{m,j}}, & \tilde{H}_{m,j} &= \tilde{H}_{f_{m,j}}, & \tilde{I}_{m,j} &= \tilde{I}_{f_{m,j}}, \\ E_{m,j} &= E_{\pi(f_{m,j})}, & H_{m,j} &= H_{\pi(f_{m,j})}, & I_{m,j} &= I_{\pi(f_{m,j})}, \\ \hat{E}_{m,j} &= \hat{E}_{\pi(f_{m,j})}, & \hat{H}_{m,j} &= \hat{H}_{\pi(f_{m,j})}, & \hat{I}_{m,j} &= \hat{I}_{\pi(f_{m,j})}. \end{aligned}$$

Proposition 70. *Nach der Proposition 40 können die Ecken- und Kantenkorona wie folgt beschrieben werden:*

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ *gilt* $\quad \mathcal{E} = \mathcal{K} = \{x_{m,1}, x_{m,2} \mid 0 \leqslant m < p\}$.

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$ *gilt* $\quad x_{m,2} = x_{m+1,1}$,
$\mathcal{E} = \mathcal{K} = \{x_{m,1} \mid 0 \leqslant m < p\}$.

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,4,2)^k$ *gilt* $\quad x_{m,3} = x_{m+1,1}$,
$\mathcal{E} = \{x_{m,1}, x_{m,2} \mid 0 \leqslant m < p\}$,
$\mathcal{K} = \{x_{m,1} \mid 0 \leqslant m < p\}$. $\blacksquare$

Notation. Es sei $a_m := f_{m,-l}$, $b_m := f_{m,-l+2}$, $c_m := f_{m,-l+4}$ und $d_m := f_{m,-l+6}$. Zur besseren Lesbarkeit schreibe ich $\tilde{I}A_m$ statt $\tilde{I}_{a_m}$, $\hat{I}A_m$ statt $\hat{I}_{\pi(a_m)}$ und IA_m statt $I_{\pi(a_m)}$ und so weiter.

Notation. Es gilt

$$S_e = \pi(\tilde{S}_{\tilde{e}}) = \{(1 + \omega i, z) \in L : |\omega| \leqslant \omega_d\}$$

und

$$\tilde{S}_{\tilde{e}} = \{g \in \tilde{L} : \pi(g) \in S_e, \ |\arg(g)| \leqslant \vartheta_d\}.$$

Es sei $\hat{S}_e = \{(1+\omega i, z) \in \mathbb{C}^2 : |\omega| \leqslant \omega_d\}$. Es gilt $S_e = \hat{S}_e \cap L$. Für eine Teilmenge N von $\tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}$ gilt

$$F_N = \tilde{S}_{\tilde{e}} \cap \bigcap_{x\in N} R_x = \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \partial Q_u \cap \bigcap_{x\in N} R_x.$$

Es gilt ferner $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\tilde{\Gamma}(u)\backslash\{u\}}$.

Ich skizziere jetzt den Gang der Berechnungen von $F_{\tilde{e}}$ (zur Vereinfachung der Darstellung gehe ich jetzt nur auf die Fälle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$ ein). Zunächst gebe ich ein Polyeder $P \subset \tilde{S}_{\tilde{e}}$ mit $P \subset F_{\mathcal{K}}$ an, beschreibe sein Bild $\pi(P)$ in S_e und gebe ein Polyeder $\hat{P}$ in $\hat{S}_e$ mit $\pi(P) = \hat{P} \cap L$ an. Ich untersuche das Polyeder $\hat{P}$, beschreibe die kombinatorische Struktur seiner Seitenflächen und veranschauliche sie durch Abbildungen, die schematische Darstellungen eines Ausschnitts der Oberfläche von $\hat{P}$ (ohne die Seiten, die in $\hat{E}_{\pi(r_d)}$ bzw. $\hat{E}_{\pi(r_d^{-1})}$ enthalten sind) zeigen. Dann zeige ich, daß $\hat{P} \subset L$ und damit $\pi(P) = \hat{P} \cap L = \hat{P}$ gilt. Auf $\Psi(P)$ wende ich den Satz 55 an, wie es im Abschnitt über die Anwendung des kombinatorischen Kriteriums angedeutet wurde. In allen Fällen werde ich mit Hilfe der expliziten Beschreibung der kombinatorischen Struktur von $\hat{P} = \pi(P) \simeq P \simeq \Psi(P)$ die Voraussetzungen des Satzes nachprüfen können, also ist $\Psi(P)$ ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$. In den Fällen $l \geqslant 2$ zeige ich mit Hilfe des Satzes 52, daß $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{K}}$ gilt. Dann gilt: Sowohl $\Psi(P)$ als auch $\Psi(F_{\tilde{\Gamma}})$ sind Fundamentalbereiche der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$, dabei gilt $\Psi(P) \subset \Psi(F_{\mathcal{K}}) = \Psi(F_{\tilde{\Gamma}})$, woraus $\Psi(P) = \Psi(F_{\tilde{\Gamma}})$ und $P = F_{\tilde{\Gamma}}$ folgt. In den Fällen $l = 1$ untersuche ich $\hat{P} = \pi(P)$ weiter, um zu zeigen, daß nicht nur $P \subset F_{\mathcal{K}}$, sondern auch $P = F_{\mathcal{K}}$ und damit $F_{\tilde{\Gamma}} \subset F_{\mathcal{K}} = P$ gilt. Dann gilt: Sowohl $\Psi(P)$ als auch $\Psi(F_{\tilde{\Gamma}})$ sind Fundamentalbereiche der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$, dabei gilt $\Psi(F_{\tilde{\Gamma}}) \subset \Psi(P)$, woraus $\Psi(P) = \Psi(F_{\tilde{\Gamma}})$ und $P = F_{\tilde{\Gamma}}$ folgt.

NOTATION. Für $-\omega_d \leqslant \omega' < \omega'' \leqslant \omega_d$ und $M \subset \tilde{L}$ sei

$$M[\omega', \omega''] := \{g \in M \cap \tilde{S}_{\tilde{e}} : \pi(g) = (1+\omega i, z),\ \omega \in [\omega', \omega'']\}.$$

Die Teilmengen $M[\omega', \omega''] \subset S_e \cap M$ für $M \subset L$ und $M[\omega', \omega''] \subset \hat{S}_e \cap M$ für $M \subset \mathbb{C}^2$ werden analog definiert.

BEMERKUNG. Die Isometrien $\tilde{\rho}$ bzw. $\tilde{\eta}$ von $\tilde{L}$ induzieren auf

$$S_e \subset \{1\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

eine Drehung $(\omega, z) \mapsto (\omega, ze^{2i\alpha})$ um die ω-Achse um den Winkel 2α bzw. die Abbildung $(\omega, z) \mapsto (-\omega, \bar{z})$.

§17. Die Fälle $\Gamma(p,3,3)^k$ und $\Gamma(p,3,2)^k$

Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ mit $p = lk+3$ bzw. $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$ mit $p = lk+6$. Es sei Γ das Bild von $\tilde{\Gamma}$ in $\mathrm{PSU}(1,1)$. Für die Konstruktion des Fundamentalbereichs von $\tilde{\Gamma}$ sei der Fixpunkt $u = 0$ der Ordnung p gewählt.

BEMERKUNG. Es gilt $\alpha = \frac{\pi}{2p} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right]$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$ und $\alpha = \frac{\pi}{p} \in \left(0, \frac{\pi}{7}\right]$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$.

Es gilt $\mathcal{E} = \mathcal{K}$. Es gilt nach der Proposition 47 mit Hilfe von (A5)

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad A = \frac{1}{2\sin\alpha} > 1,$$

$$\frac{1}{S} = \sqrt{3}\sin\alpha \cdot D, \quad \frac{1}{R_{\mathcal{K}}} = \cos\alpha \cdot D, \quad \frac{1}{B} = 2\sin\alpha \cdot D$$

mit

$$D := \sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}} > 1.$$

Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{2l} - \frac{3\alpha}{l} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, also $\vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$ für $l = 1$, $\vartheta_d = \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}$ für $l = 2$ und $\vartheta_d = \frac{\pi}{6} - \alpha$ für $l = 3$. Es gilt $\lambda = 1$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 2)^k$ und $\lambda = 2$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 3, 3)^k$.

Proposition 71. *Es sei $l \geqslant 2$, dann gilt $\vartheta_d \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, also ist $\ell_{\mathcal{K}}^{-}(\vartheta_d)$ nach der Proposition 47 definiert, und es gilt*

$$\ell_{\mathcal{K}}^{-}(\vartheta_d) = D \cdot \left(\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{4\cos^2\vartheta_d - 1}\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\ell_{\mathcal{K}}^{-}(\vartheta_d) = \frac{1}{R_{\mathcal{K}}} - \frac{1}{B} \cdot \sqrt{\cos^2\vartheta_d - \cos^2\frac{\pi}{q}} = D \cdot \left(\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{4\cos^2\vartheta_d - 1}\right). \blacksquare$$

Es wird nun ein $R \geqslant R_{\mathcal{K}}$ mit $\tilde{\Gamma}(u) \cap U(u, R) \subset \mathcal{K} \cup \{u\}$ benötigt, um den Satz 52 anwenden zu können.

Proposition 72. *Es gilt $R > R_{\mathcal{K}}$ und $\tilde{\Gamma}(u) \cap U(u, R) \subset \mathcal{K} \cup \{u\}$ für*

$$R := \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1}{D}.$$

Beweis. Für jedes $x \in \tilde{\Gamma}(u) \backslash \{u\} - \mathcal{K}$ gilt

$$\cosh\rho(0, x) \geqslant \frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1.$$

Für den Fall $\Gamma = \Gamma(p, 3, 3)$ folgt es aus dem Lemma 11.2 und der Formel (11.6) in [KNRS] mit Hilfe von (A1.4), wobei der Winkel α_u in [KNRS] dem Winkel 2α hier entspricht. Für den Fall $\Gamma = \Gamma(p, 3, 2)$ folgt es aus dem Lemma 6.1 und der Formel (6.15) in [Fi] mit Hilfe von (A3.2), dabei entspricht ω aus [Fi] hier $2\cos\alpha$. Es gilt ferner

$$\begin{aligned} 2\cos^2 2\alpha - 2\sin^2\alpha &= (\cos 4\alpha + 1) + (\cos 2\alpha - 1) = \cos 4\alpha + \cos 2\alpha \\ &= 2\cos\alpha\cos 3\alpha \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{2\cos\alpha\cos 3\alpha}{\sin^2\alpha} + 1.$$

Damit gilt nach der Formel (A6.1)

$$|x|^2 = \frac{\cosh\rho(0, x) - 1}{\cosh\rho(0, x) + 1} \geqslant \frac{\cos\alpha\cos 3\alpha}{\cos^2 2\alpha} = R^2$$

für jedes $x \in \tilde{\Gamma}(u) \backslash \{u\} - \mathcal{K}$. Es gilt ferner

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \cdot D < \cos\alpha \cdot D = \frac{1}{R_{\mathcal{K}}}. \blacksquare$$

Erinnerung. Es gilt $\mathcal{M}_R = \frac{1-\sqrt{1-R^2}}{R} \in (0,1)$.

Proposition 73. *Es gilt*

$$\mathcal{M}_R = D \cdot \frac{\cos 2\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus $D = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}}$, $\frac{1}{R} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \cdot D$ und

$$\frac{1}{D} \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha - \cos\alpha\cos 3\alpha}{\cos^2\alpha}} = \tan\alpha. \ \blacksquare$$

Damit läßt sich der Satz 52 wie folgt spezialisieren:

Satz 74. *In den Fällen $l \geqslant 2$ gilt $\ell_{\mathcal{K}}^{-}(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R$ und damit $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{K}}$.*

Beweis. Ich wende den Satz 52 für den in der Proposition 72 definierten Radius R an. Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{M}_R \geqslant \ell_{\mathcal{K}}^{-}(\vartheta_d)$ gilt. Benutzt man die Propositionen 71 und 73 und formt die Ungleichung um, so sieht man, daß

$$\sqrt{4\cos^2\vartheta_d - 1} \geqslant \frac{\cos^2\alpha - \cos 2\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

zu zeigen ist. Es gilt nach (A1.9) und (A1.10)

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos 2\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

und

$$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + 1 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Es ist also zu zeigen, daß

$$2\cos\vartheta_d \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 1$$

gilt. Im Falle $l \geqslant 2$ gilt $0 < \vartheta_d \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ und damit $\cos\vartheta_d \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right)$. Es genügt also, die Ungleichung

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 1$$

zu zeigen. Dabei gilt

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) &= \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \\ &= \sin\alpha + \cos 2\alpha = \sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha \\ &= 1 + \sin\alpha(1 - 2\sin\alpha) \geqslant 1 \end{aligned}$$

wegen $\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

ERINNERUNG. Für $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \equiv l \mod 2$ gilt

$$\begin{aligned}
&\text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k: && f_{m,j} = \tilde{\rho}^m(g_{0,1,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = \tilde{\rho}^{m-1}(g_{0,2,1+k\cdot\frac{l+j}{2}}),\\
&\text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k: && f_{m,j} = \tilde{\rho}^m(g_{0,1,4+k\cdot\frac{l+j}{2}}) = \tilde{\rho}^{m-1}(g_{0,2,2+k\cdot\frac{l+j}{2}}).
\end{aligned}$$

Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
&\text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k: && f_{2m,-l} = g_{m,1,2-m}, \quad f_{2m,l} = g_{m,1,p-1-m},\\
& && f_{2m+1,-l} = g_{m,2,1-m}, \quad f_{2m+1,l} = g_{m,2,p-2-m},\\
&\text{im Falle } \tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k: && f_{m,-l} = g_{m,1,4-m} = g_{m-1,2,3-m},\\
& && f_{m,l} = g_{m-1,2,p-3-m} = g_{m,1,p-2-m}.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 75. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
&f_{m,j}r_d = f_{m,j+2}, \quad f_{m,j+2}r_d^{-1} = f_{m,j},\\
&r_d f_{m,j} = f_{m+\lambda k,j+2}, \quad r_d^{-1} f_{m,j} = f_{m-\lambda k,j-2},\\
&f_{m,l-2j}^{-1} = f_{m+3+\lambda kj,-(l-2j)},\\
&f_{m,l}^{-1} = f_{m+3,-l}, \quad f_{m,-l}^{-1} = f_{m-3,l},\\
&\text{und außerdem im Falle } l=2 \quad f_{m,0}^{-1} = f_{m-\frac{\lambda p}{2},0} = f_{m+\frac{\lambda p}{2},0},\\
&f_{m+1,-l}f_{m-1,-l} = f_{m,-l},\\
&f_{m,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(f_{m-1,l})f_{m+1,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(f_{m+1,-l})f_{m-1,-l}^{-1},\\
&f_{m,-l+2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(\lambda kj+3)}(f_{m-1,l})f_{m+1,-l+2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(\lambda kj+3)}(f_{m+1,-l})f_{m-1,-l+2j}^{-1}.
\end{aligned}$$

Mit $a_m = f_{m,-l}$, $b_m = f_{m,-l+2}$ *und* $c_m = f_{m,-l+4}$ *gilt also*

$$\begin{aligned}
&a_m r_d = b_m, \quad b_m r_d = c_m, \quad b_m r_d^{-1} = a_m, \quad c_m r_d^{-1} = b_m,\\
&a_{m+1}a_{m-1} = a_m,\\
&a_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(f_{m-1,l})a_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(a_{m+1})a_{m-1}^{-1},\\
&b_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-(\lambda k+3)}(f_{m-1,l})b_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(\lambda k+3)}(a_{m+1})b_{m-1}^{-1},\\
&c_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2\lambda k+3)}(f_{m-1,l})c_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2\lambda k+3)}(a_{m+1})c_{m-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

BEWEIS. Nach der Proposition 61 gilt $\tilde{\rho}^{\lambda k}(g) = r_d g r_d^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
r_d f_{m,j} &= \tilde{\rho}^{\lambda k}(f_{m,j}r_d) = \tilde{\rho}^{\lambda k}(f_{m,j+2}) = f_{m+\lambda k,j+2},\\
r_d^{-1} f_{m,j} &= \tilde{\rho}^{-\lambda k}(f_{m,j}r_d^{-1}) = \tilde{\rho}^{-\lambda k}(f_{m,j-2}) = f_{m-\lambda k,j-2}.
\end{aligned}$$

Nach der Proposition 63 gilt im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$

$$f_{0,l}^{-1} = g_{0,1,p-1}^{-1} = g_{1,2,0} = f_{3,-l}$$

und im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$

$$f_{0,l}^{-1} = g_{0,1,p-2}^{-1} = g_{2,2,0} = f_{3,-l}.$$

Damit gilt

$$f_{0,l-2j}^{-1} = (f_{0,l} r_d^{-j})^{-1} = r_d^j f_{0,l}^{-1} = r_d^j f_{3,-l} = f_{3+\lambda kj,-l+2j} = f_{3+\lambda kj,-(l-2j)}$$

und

$$f_{m,l-2j}^{-1} = (\tilde{\rho}^m(f_{0,l-2j}))^{-1} = \tilde{\rho}^m(f_{0,l-2j}^{-1}) = \tilde{\rho}^m(f_{3+\lambda kj,-(l-2j)}) = f_{m+3+\lambda kj,-(l-2j)}.$$

Es gilt im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^k$

$$f_{1,-l} f_{-1,-l} = g_{0,2,1} g_{-1,2,2} = g_{0,4,2} c^{-1} = g_{0,1,2} = f_{0,-l}$$

und im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,2)^k$

$$f_{1,-l} f_{-1,-l} = g_{0,2,2} g_{-2,2,4} = g_{0,4,4} c^{-1} = g_{0,1,4} = f_{0,-l}.$$

Damit gilt

$$f_{m+1,-l} f_{m-1,-l} = \tilde{\rho}^m(f_{1,-l}) \tilde{\rho}^m(f_{-1,-l}) = \tilde{\rho}^m(f_{1,-l} f_{-1,-l}) = \tilde{\rho}^m(f_{0,-l}) = f_{m,-l}.$$

Es gilt ferner

$$\tilde{\rho}^{-3}(f_{m-1,l}) f_{m+1,-l}^{-1} = f_{m-4,l} f_{m+1,-l}^{-1} = f_{m-1,-l}^{-1} f_{m+1,-l}^{-1} = (f_{m+1,-l} f_{m-1,-l})^{-1} = f_{m,-l}^{-1}$$

und

$$\tilde{\rho}^{-3}(f_{m+1,-l}) f_{m-1,-l}^{-1} = f_{m-2,-l}(f_{m,-l} f_{m-2,-l})^{-1} = f_{m,-l}^{-1}.$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} f_{m,-l+2j}^{-1} &= (f_{m,-l} r_d^j)^{-1} = r_d^{-j} f_{m,-l}^{-1} = r_d^{-j} f_{m-4,l} f_{m+1,-l}^{-1} = f_{m-4-\lambda kj,l-2j} f_{m+1,-l}^{-1} \\ &= f_{m-4-\lambda kj,l} r_d^{-j} f_{m+1,-l}^{-1} = f_{m-4-\lambda kj,l}(f_{m+1,-l} r_d^j)^{-1} = f_{m-4-\lambda kj,l} f_{m+1,-l+2j}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(\lambda kj+3)}(f_{m-1,l}) f_{m+1,-l+2j}^{-1} \end{aligned}$$

und analog $f_{m,-l+2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(\lambda kj+3)}(f_{m+1,-l}) f_{m-1,-l+2j}^{-1}$. ∎

NOTATION. Für $M \subset \mathbb{C}^2$ und $\omega \in \mathbb{R}$ sei $M(\omega) := \{z \in \mathbb{C} : (1+i\omega, z) \in M\}$.

PROPOSITION 76. *Nach der Proposition 58 gilt*

$$\pi(f_{0,j}) = (A \cdot e^{ij\vartheta_d}, B \cdot e^{-i(\alpha+j\vartheta_d)}), \quad \pi(f_{1,j}) = (A \cdot e^{ij\vartheta_d}, B \cdot e^{i(\alpha-j\vartheta_d)})$$

und somit

$$z \in \hat{I}_{0,j}(\omega) \iff z_1 \cos(\alpha + j\vartheta_d) - z_2 \sin(\alpha + j\vartheta_d) \leqslant \frac{A(\cos(j\vartheta_d) + \omega \sin(j\vartheta_d)) - 1}{B}$$

$$z \in \hat{I}_{1,j}(\omega) \iff z_1 \cos(\alpha - j\vartheta_d) + z_2 \sin(\alpha - j\vartheta_d) \leqslant \frac{A(\cos(j\vartheta_d) + \omega \sin(j\vartheta_d)) - 1}{B}$$

mit $z_1 = \mathrm{Re}(z)$ *und* $z_2 = \mathrm{Im}(z)$. *Es gilt insbesondere*

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}_{0,-l}(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha + z_2 \cos 4\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha - \omega \cos 3\alpha) - 1), \\ z \in \hat{I}_{0,0}(\omega) &\iff z_1 \cos \alpha - z_2 \sin \alpha \leqslant \frac{1}{B}(A - 1), \\ z \in \hat{I}_{0,l}(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega \cos 3\alpha) - 1), \\ z \in \hat{I}_{1,-l}(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha - \omega \cos 3\alpha) - 1), \\ z \in \hat{I}_{1,0}(\omega) &\iff z_1 \cos \alpha + z_2 \sin \alpha \leqslant \frac{1}{B}(A - 1), \\ z \in \hat{I}_{1,l}(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha - z_2 \cos 4\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega \cos 3\alpha) - 1). \end{aligned}$$ ∎

§18. Die Fälle $\Gamma(k+3,3,3)^k$ und $\Gamma(k+6,3,2)^k$

NOTATION. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$ und $\omega_d = \tan\vartheta_d = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

NOTATION. Es gilt $a_m = f_{m,-1}$, $b_m = f_{m,1}$ und $c_m = f_{m,3}$.

UNGLEICHUNGEN. *Nach der Proposition 76 und der Formel (A1.11) gilt mit*

$$D = \frac{A}{B} = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}} > 1$$

und $\omega = \tan\vartheta$

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}A_0(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha + z_2 \cos 4\alpha \leqslant \frac{1}{D}(\sin\alpha - \omega\cos\alpha) = \frac{1}{D}\cdot\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta},\\
z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{D}(\sin\alpha + \omega\cos\alpha) = \frac{1}{D}\cdot\frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\cos\vartheta}\\
&\qquad = \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}A_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{D}(\sin\alpha - \omega\cos\alpha) = \frac{1}{D}\cdot\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\cos\vartheta},\\
z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha - z_2 \cos 4\alpha \leqslant \frac{1}{D}(\sin\alpha + \omega\cos\alpha) = \frac{1}{D}\cdot\frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\cos\vartheta}\\
&\qquad = \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \sin 8\alpha - z_2 \cos 8\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 9\alpha + \omega\cos 9\alpha) + 1)\\
&\qquad = D\cdot\frac{\sin(9\alpha+\vartheta) + 2\sin\alpha\cos\vartheta}{\cos\vartheta},\\
z \in \hat{I}C_1(\omega) &\iff z_1 \sin 10\alpha - z_2 \cos 10\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 9\alpha + \omega\cos 9\alpha) + 1).
\end{aligned}$$

PROPOSITION 77. *Es gilt* $0 \notin (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$.

BEWEIS. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{H}A_0(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha + z_2 \cos 4\alpha \geqslant \frac{1}{D}(\sin\alpha - \omega\cos\alpha),\\
z \in \hat{H}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \geqslant \frac{1}{D}(\sin\alpha + \omega\cos\alpha).
\end{aligned}$$

Aus $0 \in (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$ würde also $\sin\alpha \pm \omega\cos\alpha \leqslant 0$ und damit $\sin\alpha \leqslant 0$ folgen. ∎

PROPOSITION 78. *Die Winkelhalbierende des Sektors* $(HA_0 \cap HB_0)(0)$ *geht durch den Koordinatenursprung.*

BEWEIS. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}A_0(0)$ und $H^+ = \hat{H}B_0(0)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{H}A_0(0) &\iff z_1 \sin 4\alpha + z_2 \cos 4\alpha \geqslant \frac{1}{D}\sin\alpha,\\
z \in \hat{H}B_0(0) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \geqslant \frac{1}{D}\sin\alpha. \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 79. *Die Geraden $\hat{E}B_0(\omega^*)$, $\hat{E}B_1(\omega^*)$ und $\hat{E}A_1(\omega^*)$ mit*

$$\omega^* := \tan\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha} \cdot \omega_d \in (0, \omega_d)$$

schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Gleichungen:

$$\begin{aligned}
z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha = \frac{1}{D}(\sin\alpha + \omega\cos\alpha),\\
z \in \hat{E}B_1(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha - z_2 \cos 4\alpha = \frac{1}{D}(\sin\alpha + \omega\cos\alpha),\\
z \in \hat{E}A_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha = \frac{1}{D}(\sin\alpha - \omega\cos\alpha),
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.2) an. Es gilt $\delta = \sin 2\alpha \neq 0$. Mit Hilfe der Formel (A1.12) folgt

$$\begin{aligned}
D \cdot \Delta(\omega) &= (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha)(\sin\alpha + \omega\cos\alpha) + \sin 2\alpha(\sin\alpha - \omega\cos\alpha)\\
&= (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha + \sin 2\alpha)\sin\alpha + (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha - \sin 2\alpha)\omega\cos\alpha\\
&= 4\sin\alpha(\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha - \omega\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha)\\
&= 4\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha(\omega^* - \omega). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Definition. Es sei

$$P := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}A_m \cup \tilde{I}B_m)[-\omega_d, \omega_d].$$

Aus der Proposition 68 folgt $P \subset F_{\mathcal{K}}$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß

$$\pi(P) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (IA_m \cup IB_m)[-\omega_d, \omega_d]$$

gilt und $\pi|_P : P \to \pi(P)$ ein Homöomorphismus ist. Es sei

$$\hat{P} := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}A_m \cup \hat{I}B_m)[-\omega_d, \omega_d].$$

Ich untersuche nun die kombinatorische Struktur des Randes von $\hat{P}$. Dafür wende ich die Proposition (A7.6) mit $H^- = \hat{H}A_0$, $H^+ = \hat{H}B_0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = 3\alpha$, $\omega^\circ = 0$, $\omega^+ = \omega^*$ an. In den Propositionen 77, 78 und 79 wurden die Voraussetzungen der Proposition (A7.6) überprüft. Ferner entsteht $\hat{P}[-\omega_d, 0]$ aus $\hat{P}[0, \omega_d]$ durch Anwendung der von $\tilde{\eta}$ induzierten Isometrie von S_e. Die Kombinatorik der Seitenfläche von $\hat{P}$ ist in der Abbildung dargestellt.

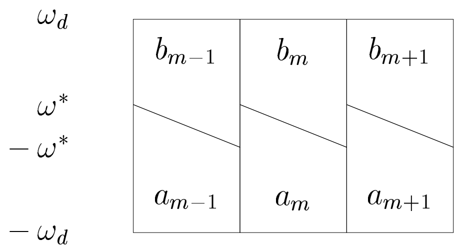


Abbildung 3. Die Seitenfläche von $\hat{P}$ für $l = 1$.

Ich zeige nun, daß $\hat{P} \subset L$ gilt. Aus der Beschreibung von $P[0, \omega^*]$ sieht man, daß es dafür genügt, für die Kanten von $\hat{P}$ zu zeigen, daß sie in L liegen. Aus Symmetriegründen reicht es aus, die Kanten

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_1)[\omega^*, \omega_d], \quad (\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)[0, \omega^*] \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_1)[0, \omega^*]$$

zu betrachten. Aus der Beschreibung von $P[0, \omega^*]$ ist klar, daß für $\omega \in [0, \omega^*]$ der Punkt $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)[0, \omega^*]$ im Dreieck mit den Ecken

$$0, \quad (\hat{E}B_{-1} \cap \hat{E}A_0)(\omega), \quad (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_1)(\omega)$$

liegt. Damit genügt es zu zeigen, daß die Kanten

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_1)[\omega^*, \omega_d] \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_1)[0, \omega^*]$$

in L liegen.

Proposition 80. *Es gilt $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega) \in L(\omega)$ für alle $\omega \in [0, \omega_d]$.*

Beweis. Berechnet man den Schnittpunkt $z(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}B_1(\omega)$, so sieht man, daß mit $\omega = \tan\vartheta$ und $0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$, also $\alpha \leqslant \alpha + \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, gilt

$$\frac{|z(\omega)|}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\cos\alpha} < \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\cos\alpha} \leqslant \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} < 1. \blacksquare$$

Proposition 81. *Es gilt $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_1)(\omega) \in L(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Berechnet man den Schnittpunkt $z(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}A_1(\omega)$, so sieht man, daß gilt

$$\begin{aligned} |\, z_1(\omega)\,| &= \frac{1}{D} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} < 1, \\ \left|\frac{z_2(\omega)}{\omega}\right| &= \frac{1}{D} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \sqrt{\frac{\cos\alpha\cos 3\alpha}{\cos^2 2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}} < 1. \end{aligned}$$

Damit gilt $|z_1(\omega)| < 1$ und $|z_2(\omega)| < |\omega|$, also folgt $|z(\omega)| < \sqrt{1+\omega^2}$. $\blacksquare$

Aus den Propositionen 80 und 81 folgt $\hat{P} \subset L$ und damit $\pi(P) = \hat{P} \cap L = \hat{P}$.

Proposition 82. *Es gilt $a_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(b_m)$, $b_m^{-1} = \tilde{\rho}^3(a_m)$, $a_m r_d = b_m$, $b_m r_d^{-1} = a_m$, $r_d^{-1} b_m = \tilde{\rho}^6(a_m)$, $r_d a_m = \tilde{\rho}^{-6}(b_m)$ und*

$$a_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(b_{m-1})a_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(a_{m+1})a_{m-1}^{-1}.$$

Es gilt ferner $f_{m,3}^{-1} = f_{m+9,-3}$, $f_{m,-3}^{-1} = f_{m-9,3}$ und

$$f_{m,-3}^{-1} = f_{m-10,1} f_{m+1,-3}^{-1} = f_{m-8,-1} f_{m-1,-3}^{-1}.$$

Beweis. Es gilt $p = k + \frac{6}{\lambda}$ und folglich $\lambda k = \lambda p - 6$. Damit gilt $f_{m-\lambda k,j} = f_{m+6-\lambda p,j} = f_{m+6,j}$. Mit Hilfe dieser Überlegung folgt die Behauptung aus der Proposition 75. $\blacksquare$

SATZ 83. *$\Psi(P)$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$.*

BEWEIS. Um den Satz 55 anzuwenden, beschreibe ich die Identifikationen am Rande von $P \simeq \pi(P) = \hat{P}$ unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$ und die Kantenzyklen. Die Seitenidentifikationen sind

$$\begin{aligned}
&(r_d; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^6(r_d^{-1}; a_m),\\
&(a_m; r_d^{-1}, a_{m-1}, b_{m-1}, b_m, a_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-3}(b_m; a_m, a_{m+1}, b_{m+1}, r_d, b_{m-1}),\\
&(b_m; r_d, b_{m+1}, a_{m+1}, a_m, b_{m-1}) \mapsto \tilde{\rho}^3(a_m; b_m, b_{m-1}, a_{m-1}, r_d^{-1}, a_{m+1}),
\end{aligned}$$

dabei benutzt man die Relationen aus der Proposition 82; die dritte Seitenidentifikation kann man auch als Umkehrung aus der zweiten ausrechnen. Aus den Seitenidentifikationen und der Kombinatorik der Seitenfläche berechnet man die Kantenzyklen

$$\begin{aligned}
&(b_m; b_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^2(b_m; a_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^4(a_m; a_{m+1}),\\
&(b_m; r_d) \mapsto \tilde{\rho}^3(b_m; a_m) \mapsto \tilde{\rho}^6(r_d^{-1}; a_m).
\end{aligned}$$

Der erste Zykel ist vom Typ $\aleph$, der zweite Zykel ist vom Typ $\beth$. ∎

Es bleibt zu zeigen, daß $P = F_{\tilde{e}}$ gilt. Dafür zeige ich $P = F_{\mathcal{K}}$.

PROPOSITION 84. *Es gilt $(\hat{H}B_0 \cap \hat{I}C_0)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega)$ für $\omega \leqslant \omega_d$.*

BEWEIS. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{H}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega \cos 3\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \sin 8\alpha - z_2 \cos 8\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1),\\
z \in \hat{H}B_1(\omega) &\iff z_1 \sin 4\alpha - z_2 \cos 4\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega \cos 3\alpha) - 1).
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.3) an. Es gilt

$$\delta_1 = -\sin 4\alpha < 0, \quad \delta_2 = -\sin 2\alpha < 0, \quad \delta_3 = \sin 6\alpha > 0,$$

es bleibt also zu zeigen, daß $\Delta(\omega) < 0$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta_1 + \delta_3 &= \sin 6\alpha - \sin 4\alpha = 2 \sin\alpha \cos 5\alpha,\\
\delta_2 \quad &= -\sin 2\alpha = -2 \sin\alpha \cos\alpha,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\Delta(\omega) \cdot B =\\
&\quad = (\delta_1 + \delta_3)(A(\sin 3\alpha + \omega \cos 3\alpha) - 1) + \delta_2(A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1)\\
&\quad = 2 \sin\alpha(\cos 5\alpha(A(\sin 3\alpha + \omega \cos 3\alpha) - 1) - \cos\alpha(A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1))
\end{aligned}$$

und folglich gilt mit (A1.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(\omega) \cdot B}{2 \sin\alpha} &= A((\sin 3\alpha \cos 5\alpha - \sin 9\alpha \cos\alpha) + \omega(\cos 3\alpha \cos 5\alpha - \cos 9\alpha \cos\alpha))\\
&\qquad - (\cos\alpha + \cos 5\alpha)\\
&= A \sin 6\alpha(\omega \sin 4\alpha - \cos 4\alpha) - 2 \cos 2\alpha \cos 3\alpha\\
&= 2 \cos 3\alpha(A \sin 3\alpha(\omega \sin 4\alpha - \cos 4\alpha) - \cos 2\alpha).
\end{aligned}$$

Für $\omega \leqslant \omega_d$ gilt also

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(\omega)\cdot B}{4\sin\alpha\cos 3\alpha} \leqslant \frac{\Delta(\omega_d)\cdot B}{4\sin\alpha\cos 3\alpha} &= A\sin 3\alpha(\omega_d\sin 4\alpha - \cos 4\alpha) - \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{2\sin\alpha}\cdot\sin 3\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} - \cos 2\alpha = \frac{1}{2} - \cos 2\alpha < 0. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Bemerkung. Aus der Proposition 84 kann man folgern, daß eine der Zusammenhangskomponenten von $F_{\mathcal{K}}$ gleich P ist. Wenn man zeigen könnte, daß $F_{\tilde{e}}$ zusammenhängend ist und $\tilde{e} \in F_{\tilde{e}}$ gilt, so würde daraus bereits $F_{\tilde{e}} = P$ folgen. Da ich es aber nicht direkt zeigen kann, wird im Folgenden $F_{\mathcal{K}} = P$ durch Abschätzungen gezeigt.

Proposition 85. *Im Falle $\alpha < \pi/9$ gilt $\pi(\tilde{I}_{m,\pm 3} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega) = \varnothing$ für $\pm\omega \leqslant \operatorname{ctg} 9\alpha$. Im Falle $\alpha < \pi/15$ gilt $(\tilde{I}_{m,\pm j} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = \varnothing$ für $j \geqslant 5$.*

Beweis. Nach der Proposition 69 gilt $|\arg(f_{m,\pm j})| = j\cdot\vartheta_d$. Damit gilt

$$\arg(f_{m,\pm 3}) = \pm 3\vartheta_d = \pm\Big(\frac{3\pi}{2} - 9\alpha\Big).$$

Für $\alpha < \pi/9$ gilt $|\arg(f_{m,\pm 3})| > \pi/2$. Für $j \geqslant 5$ und $\alpha < \pi/15$ gilt

$$|\arg(f_{m,\pm j})| \geqslant 5\vartheta_d > \frac{3\pi}{2}.$$

Damit folgt die Behauptung nach der Proposition 45. $\blacksquare$

Proposition 86. *Für $\alpha \leqslant \frac{\pi}{12}$ gibt es ein $\omega_c \geqslant \operatorname{ctg} 9\alpha$ mit $\pi(\tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega) \neq \varnothing$ für $\omega > \omega_c$ iund $\pi(\tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega) = \varnothing$ für $\omega \leqslant \omega_c$.*

Beweis. Nach der Proposition 76 gilt $\pi(c_0) = \pi(f_{0,3}) = (A\cdot e^{3i\vartheta_d}, B\cdot e^{-i(\alpha+3\vartheta_d)})$. Es gilt $A\cos 3\vartheta_d = -\frac{\sin 9\alpha}{2\sin\alpha}$. Für $\alpha \leqslant \frac{\pi}{12}$ folgt mit (A1.5), daß

$$\begin{aligned}\frac{\sin 9\alpha}{\sin\alpha} &= (2\cos 2\alpha + 1)\cdot(2\cos 6\alpha + 1) \\ &\geqslant (2\cos\frac{\pi}{6} + 1)\cdot(2\cos\frac{\pi}{2} + 1) = 1 + \sqrt{3} > 2\end{aligned}$$

und damit $A\cos 3\vartheta_d < -1$ gilt. Die Menge $EC_m \cap E_e$ besteht nach der Proposition 43 aus zwei Zusammenhangskomponenten, und ihre Projektion auf die ω-Achse ist das Komplement eines kompakten Intervalls. Die beiden Komponenten von $EC_m \cap E_e$ sind in $\pi(\tilde{E}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ bzw. $\pi(\tilde{E}_{c_m c^{-2}} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})$ enthalten. Nach der Proposition 85 ist die Menge $\pi(\tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega)$ leer für $\omega \leqslant \operatorname{ctg} 9\alpha$. Damit gibt es ein $\omega_c \geqslant \operatorname{ctg} 9\alpha$, so daß die Menge $\pi(\tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega)$ leer für $\omega \leqslant \omega_c$ und nicht leer für $\omega > \omega_c$ ist. $\blacksquare$

Proposition 87. *Im Falle $\alpha \leqslant \pi/12$ gilt $IC_m[\operatorname{ctg} 9\alpha, \operatorname{ctg} 5\alpha] = \varnothing$.*

Beweis. Es sei $\omega = \tan\vartheta$. Die Halbebenen $\hat{I}C_m(\omega)$ entstehen durch Drehung um den Koordinatenursprung aus der Halbebene $\hat{I}C_0(\omega)$, also hängt $d(0, \hat{I}C_m(\omega))$ nicht von m ab. Die Gleichung der Halbebene $\hat{I}C_0(\omega)$ ist

$$z \in \hat{I}C_0(\omega) \iff z_1\sin 8\alpha - z_2\cos 8\alpha \geqslant D\cdot\frac{\sin(9\alpha+\vartheta) + 2\sin\alpha\cos\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Damit gilt

$$d(0, \hat{I}C_m(\tan\vartheta)) = d(0, \hat{I}C_0(\tan\vartheta)) = D \cdot \frac{|\sin(9\alpha+\vartheta) + 2\sin\alpha\cos\vartheta|}{\cos\vartheta}.$$

Für $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{2} - 9\alpha, \frac{\pi}{2} - 5\alpha\right]$ gilt $9\alpha + \vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 4\alpha\right]$ und damit

$$\begin{aligned}\sin(9\alpha+\vartheta) + 2\sin\alpha\cos\vartheta &\geqslant \cos 4\alpha + 2\sin\alpha\sin 5\alpha \\ &= \cos 4\alpha + (\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) \\ &= 2\cos 4\alpha - \cos 2\alpha(2\cos 4\alpha - 1) \\ &= (1-\cos 2\alpha)(2\cos 4\alpha - 1) + 1.\end{aligned}$$

Für $\alpha \leqslant \frac{\pi}{12}$ gilt $2\cos 4\alpha \geqslant 1$ und damit $\sin(9\alpha+\vartheta) + 2\sin\alpha\cos\vartheta > 1$. Es gilt also wegen $D > 1$

$$d(0, \hat{I}C_m(\omega)) = D \cdot \frac{|\sin(9\alpha+\vartheta) + 2\sin\alpha\cos\vartheta|}{\cos\vartheta} > \frac{1}{\cos\vartheta} = \sqrt{1+\omega^2}$$

und folglich $IC_m(\omega) = \hat{I}C_m(\omega) \cap L(\omega) = \varnothing$. ∎

Proposition 88. *Für* $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{13}, \frac{\pi}{14}, \frac{\pi}{17}, \frac{\pi}{18}\right\}$ *gilt* $IC_m(\omega^*) = \varnothing$ *und damit* $\omega_c \geqslant \omega^*$.

Beweis. Diese Behauptung wird durch explizite Rechnung mit Hilfe der Gleichung der Halbebene $\hat{I}C_0(\omega^*)$ bewiesen. ∎

Proposition 89. *Im Falle* $\alpha \leqslant \pi/12$ *gilt* $\omega_c \geqslant \operatorname{ctg} 5\alpha$.

Beweis. Es gilt $\omega_c \geqslant \operatorname{ctg} 9\alpha$ nach der Proposition 85. Für $\omega \in [\operatorname{ctg} 9\alpha, \operatorname{ctg} 5\alpha]$ gilt $IC_m(\omega) = \varnothing$ nach der Proposition 87 und damit $(\tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega) = \varnothing$. ∎

Proposition 90. *Im Falle* $\alpha \leqslant \frac{\pi}{18}$ *gilt* $\operatorname{ctg} 5\alpha > \omega^*$ *und damit* $\omega_c > \omega^*$.

Beweis. Es gilt $\omega^* = \tan\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha$ und damit

$$\begin{aligned}&\omega^* < \operatorname{ctg} 5\alpha \iff \\ &\iff \tan\alpha\tan 5\alpha < \tan 2\alpha \tan 3\alpha \iff \frac{\sin\alpha\sin 5\alpha}{\cos\alpha\cos 5\alpha} < \frac{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} \\ &\iff \frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} < \frac{\cos\alpha - \cos 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} \iff \cos 4\alpha\cos 5\alpha < \cos\alpha\cos 6\alpha \\ &\iff \cos\alpha + \cos 9\alpha < \cos 5\alpha + \cos 7\alpha \iff \cos\alpha - \cos 5\alpha < \cos 7\alpha - \cos 9\alpha \\ &\iff \sin 2\alpha\sin 3\alpha < \sin\alpha\sin 8\alpha \iff 2\cos 2\alpha + 1 < 4\cos 2\alpha\cos 4\alpha \\ &\iff 2\cos 2\alpha + 1 < 2\cos 2\alpha + 2\cos 6\alpha \iff \cos 6\alpha > \frac{1}{2}. \ ∎\end{aligned}$$

Proposition 91. *Im Falle* $\alpha \leqslant \pi/12$ *gilt* $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega)$ *für* $\omega \geqslant \omega_c$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}z \in \hat{H}B_0(\omega) &\iff z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1), \\ z \in \hat{H}C_0(\omega) &\iff -z_1\sin 8\alpha + z_2\cos 8\alpha \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 9\alpha + \omega\cos 9\alpha) + 1), \\ z \in \hat{H}C_1(\omega) &\iff -z_1\sin 10\alpha + z_2\cos 10\alpha \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 9\alpha + \omega\cos 9\alpha) + 1).\end{aligned}$$

Ich wende (A7.3) an. Es gilt

$$\delta_1 = \sin 2\alpha > 0, \quad \delta_2 = \sin 8\alpha > 0, \quad \delta_3 = -\sin 6\alpha < 0,$$

es bleibt also zu zeigen, daß $\Delta(\omega) > 0$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \delta_2 + \delta_3 &= \sin 8\alpha - \sin 6\alpha = 2\sin\alpha\cos 7\alpha, \end{aligned}$$

also gilt

$$\begin{aligned} &\Delta(\omega)\cdot B = \\ &\quad = \delta_1(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1) - (\delta_2+\delta_3)(A(\sin 9\alpha + \omega\cos 9\alpha) + 1) \\ &\quad = 2\sin\alpha(\cos\alpha(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1) - \cos 7\alpha(A(\sin 9\alpha + \omega\cos 9\alpha) + 1)) \end{aligned}$$

und folglich mit Hilfe von (A1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\omega)\cdot B}{2\sin\alpha} &= A((\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin 9\alpha\cos 7\alpha) + \omega(\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 7\alpha\cos 9\alpha)) \\ &\qquad - (\cos\alpha + \cos 7\alpha) \\ &= A\sin 6\alpha(\omega\sin 10\alpha - \cos 10\alpha) - 2\cos 3\alpha\cos 4\alpha \\ &= 2\cos 3\alpha(A\sin 3\alpha(\omega\sin 10\alpha - \cos 10\alpha) - \cos 4\alpha). \end{aligned}$$

Für $\omega \geqslant \omega_c \geqslant \operatorname{ctg} 5\alpha \geqslant \operatorname{ctg} 6\alpha$ gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\omega)\cdot B}{4\sin\alpha\cos 3\alpha} &\geqslant \frac{\Delta(\operatorname{ctg} 6\alpha)\cdot B}{4\sin\alpha\cos 3\alpha} \\ &= A\sin 3\alpha(\operatorname{ctg} 6\alpha\sin 10\alpha - \cos 10\alpha) - \cos 4\alpha \\ &= \frac{1}{2\sin\alpha}\cdot\sin 3\alpha\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin 6\alpha} - \cos 4\alpha \\ &= \frac{\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha} - \cos 4\alpha > 0 \end{aligned}$$

wegen $\cos\alpha > \cos 2\alpha > \cos 3\alpha > \cos 4\alpha$. ∎

Proposition 92. *Im Falle $\alpha \leqslant \pi/12$ ist die Menge $\tilde{H}B_m \cap \tilde{H}C_m \cap \tilde{I}C_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ leer.*

Beweis. Nach der Proposition 89 ist die Menge $(\tilde{I}C_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega)$ leer für $\omega \leqslant \omega_c$. Nach der Proposition 91 ist die Menge $(\hat{H}B_m \cap \hat{H}C_m \cap \hat{I}C_m)(\omega)$ und damit auch die Menge $(\tilde{H}B_m \cap \tilde{H}C_m \cap \tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega)$ leer für $\omega \geqslant \omega_c$. ∎

Proposition 93. *Im Falle $\alpha \leqslant \pi/12$ ist die Menge $\tilde{E}A_{m+1} \cap \tilde{I}C_m \cap \tilde{H}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ leer.*

Beweis. Nach der Proposition 92 ist die Menge $\tilde{H}B_m \cap \tilde{H}C_m \cap \tilde{I}C_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ leer. Wegen

$$b_m^{-1} = a_{m+3} \quad \text{und} \quad a_{m+3}c_{m+1} = (a_{m+3}a_{m+1})r_d^2 = a_{m+2}r_d^2 = c_{m+2}$$

folgt daraus, daß die Menge

$$b_m^{-1}(\tilde{H}B_m \cap \tilde{H}C_m \cap \tilde{I}C_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = \tilde{H}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d} \cap \tilde{I}C_{m+2} \cap \tilde{E}A_{m+3}$$

und damit auch die Menge $\tilde{E}A_{m+1} \cap \tilde{I}C_m \cap \tilde{H}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ leer ist. ∎

PROPOSITION 94. *Im Falle* $\alpha \leqslant \pi/12$ *ist die Menge* $\tilde{E}C_m \cap \tilde{I}A_{m+1} \cap \tilde{H}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ *leer.*

BEWEIS. Nach der Proposition 92 ist die Menge $\tilde{H}B_0 \cap \tilde{H}C_0 \cap \tilde{I}C_1 \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ leer. Wegen

$$\tilde{\eta}(f_{0,j}) = f_{1,-j} \quad \text{und} \quad \tilde{\eta}(f_{1,j}) = f_{0,-j}$$

folgt daraus, daß die Menge

$$\tilde{\eta}(\tilde{H}B_0 \cap \tilde{H}C_0 \cap \tilde{I}C_1 \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = \tilde{H}_{1,-1} \cap \tilde{H}_{1,-3} \cap \tilde{I}_{0,-3} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$$

und damit auch die Menge $\tilde{H}_{m+1,-1} \cap \tilde{H}_{m+1,-3} \cap \tilde{I}_{m,-3} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ leer ist. Wegen

$$f^{-1}_{m+1,-3} = f_{m-8,3} = c_{m-8} \quad \text{und} \quad f^{-1}_{m+1,-3} f_{m,-3} = f_{m-7,-1} = a_{m-7}$$

folgt daraus, daß die Menge

$$f^{-1}_{m+1,-3}(\tilde{H}_{m+1,-1} \cap \tilde{H}_{m+1,-3} \cap \tilde{I}_{m,-3} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}) = \tilde{I}A_{m-7} \cap \tilde{E}C_{m-8} \cap \tilde{H}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$$

und damit auch die Menge $\tilde{E}C_m \cap \tilde{I}A_{m+1} \cap \tilde{H}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ leer ist. ∎

PROPOSITION 95. *Im Falle* $\alpha \leqslant \pi/9$ *gilt* $0 \in \hat{H}C_m(\omega_d)$.

BEWEIS. Die Halbebenen $\hat{H}C_m(\omega)$ entstehen durch Drehung um den Koordinatenursprung aus der Halbebene $\hat{H}C_0(\omega)$, also genügt es, $0 \in \hat{H}C_0(\omega)$ zu zeigen. Die Gleichung der Halbebene $\hat{H}C_0(\omega)$ ist

$$z_1 \sin 8\alpha - z_2 \cos 8\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1).$$

Damit gilt

$$0 \in \hat{H}C_0(\omega) \iff A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1 \geqslant 0.$$

Für $\omega = \omega_d = \operatorname{ctg} 3\alpha$ gilt

$$A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1 \geqslant A(\sin 9\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha \cos 9\alpha) + 1 = \frac{\cos 6\alpha}{2 \sin \alpha \sin 3\alpha} + 1.$$

Für $\alpha \leqslant \frac{\pi}{12}$ gilt $\cos 6\alpha, \sin \alpha, \sin 3\alpha \geqslant 0$ und damit $A(\sin 9\alpha + \omega_d \cos 9\alpha) + 1 > 0$. Für $\alpha \in \{\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{11}\}$ folgt $A(\sin 9\alpha + \omega \cos 9\alpha) + 1 > 0$ durch explizite Rechnung. ∎

PROPOSITION 96. *Im Falle* $\alpha \leqslant \pi/12$ *ist die Menge* $\tilde{I}C_m \cap \tilde{I}A_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ *leer.*

BEWEIS. Aus den Propositionen 93 und 94 folgt, daß die Mengen $(EA_{m+1} \cap IC_m)(\omega)$ und $(EC_m \cap IA_{m+1})(\omega)$ für $\omega \in [\omega_c, \omega_d]$ leer sind. Da der Rand (bezüglich $L[\omega_c, \omega_d]$) der Menge $(IC_m \cap IA_{m+1})[\omega_c, \omega_d]$ ist in der Vereinigung der Mengen $(EA_{m+1} \cap IC_m)[\omega_c, \omega_d]$ und $(EC_m \cap IA_{m+1})[\omega_c, \omega_d]$ enthalten und damit auch leer. Damit ist die Menge $(IC_m \cap IA_{m+1})[\omega_c, \omega_d]$ entweder leer, oder sie enthält die Menge $L[\omega_c, \omega_d]$. Nach der Proposition 95 gilt $0 \in \hat{H}C_m(\omega_d)$ und damit $0 \notin (IC_m \cap IA_{m+1})(\omega_d)$, andererseits aber $0 \in L(\omega_d)$. Damit ist die Menge $(IC_m \cap IA_{m+1})[\omega_c, \omega_d]$ und folglich auch die Menge $(\tilde{I}C_m \cap \tilde{I}A_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega)$ für $\omega \in [\omega_c, \omega_d]$ leer. Aus der Proposition 89 folgt, daß die Menge $(\tilde{I}C_m \cap \tilde{E}_{\tilde{e}})(\omega)$ für $\omega \leqslant \omega_c$ leer ist. Damit ist gezeigt, daß die Menge $\tilde{I}C_m \cap \tilde{I}A_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ leer ist. ∎

Um P zu beschreiben, benutzte ich die Proposition (A7.6) mit $H^{\pm} = \hat{H}_{0,\pm 1}$, also $H^- = \hat{H}A_0$ und $H^+ = \hat{H}B_0$, mit $\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = 3\alpha$ und mit $\omega_1 = -\omega_d$, $\omega^- = -\omega^*$, $\omega^\circ = 0$, $\omega^+ = \omega^*$, $\omega_2 = \omega_d$ an. Um $F_{\mathcal{K}}$ zu beschreiben, greife ich nun die Überlegungen aus dem Beweis der Proposition (A7.6) auf und führe sie weiter. Es sei $\psi^{\pm}(\omega)$ wie im Beweis von (A7.6) die Differenz zwischen dem Winkel von dem von $\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0$ ausgehenden Strahl zum Punkt 0 mit dem Strahl $\hat{E}_{0,\pm 1} \cap \hat{H}_{0,\mp 1}$ und $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Im Beweis der Proposition (A7.6) wurde gezeigt, daß $\psi^-(\omega) + \psi^+(\omega) > 0$ für alle $\omega \in [-\omega_d, \omega_d]$ gilt, und daß $\psi^+(\omega^*) = 0 < \psi^-(\omega^*)$ und $\psi^+(\omega) < 0 < \psi^-(\omega)$ für $\omega > \omega^*$ gilt.

Proposition 97. *Es gilt* $\psi^+(\omega_d) = -\alpha$ *und damit* $\psi^+(\omega) \in [-\alpha, 0]$ *für* $\omega \in [\omega^*, \omega_d]$.

Beweis. Die Gleichungen der Geraden sind

$$z \in \hat{E}A_0(\omega_d) \iff z_1 \sin 4\alpha + z_2 \cos 4\alpha = -\cos 4\alpha \cdot \frac{1}{D \sin 3\alpha},$$
$$z \in \hat{E}B_0(\omega_d) \iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha = +\cos 2\alpha \cdot \frac{1}{D \sin 3\alpha}.$$

Dann gilt (nach der Cramerschen Regel), daß der Schnittpunkt $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega_d)$ auf der vertikalen Geraden durch den Punkt 0 liegt. Dabei ist der Winkel der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ mit den vertikalen Geraden gleich $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, also gilt $\psi^+(\omega_d) = -\alpha$. ∎

Satz 98. *Im Falle* $\alpha < \pi/15$ *gilt* $F_{\tilde{e}} = P$.

Beweis. Nach den Propositionen 88 und 90 gilt $\omega_c \geqslant \omega^*$. Ich betrachte eine Schicht $E_e(\omega)$ mit $\omega \in [\omega_c, \omega_d]$ und darin den Fundamentalbereich $S \cup T$ (siehe die Proposition (A7.5)) für die Operation der Drehung um 2α um den Punkt 0 auf $\mathbb{C}$. Nach der Proposition 84 gilt $(\hat{H}B_0 \cap \hat{I}C_0)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega)$. Nach der Proposition 97 gilt $\psi^+(\omega) \in [-\alpha, 0]$.

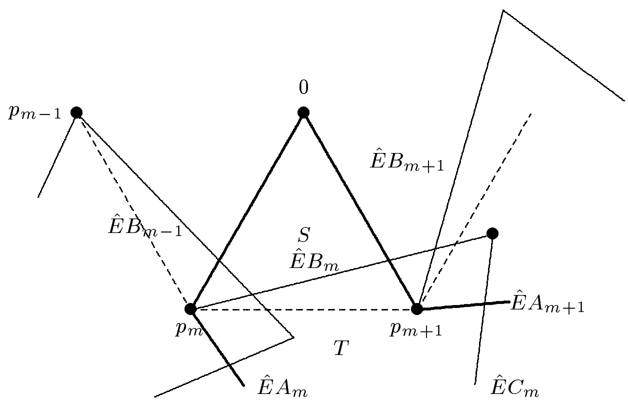


Abbildung 4. Der Fundamentalbereich $S \cup T$ in $E_e(\omega)$ mit $\omega \in [\omega^*, \omega_d]$.

Die Skizze zeigt, daß aus $(IC_m \cap IA_{m+1})(\omega) = \varnothing$ folgt $F_{\mathcal{K}}(\omega) = P(\omega)$. Nach der Proposition 96 ist die Menge $\tilde{I}C_m \cap \tilde{I}A_{m+1} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}} \cap \tilde{H}_{r_d}$ und damit auch die Menge $(IC_m \cap IA_{m+1})(\omega)$ leer. Daraus folgt $F_{\mathcal{K}}[\omega_c, \omega_d] = P[\omega_c, \omega_d]$. Aus den Propositionen 85 und 86 folgt $F_{\mathcal{K}}[0, \omega_c] = P[0, \omega_c]$. Ferner gilt $F_{\mathcal{K}}[-\omega_d, 0] = \tilde{\eta}(F_{\mathcal{K}}[0, \omega_d]) = \tilde{\eta}(P[0, \omega_d]) = P[-\omega_d, 0]$ und damit $F_{\mathcal{K}} = P$. Es gilt $F_{\tilde{e}} \subset F_{\mathcal{K}} = P$, dabei sind $\Psi(F_{\tilde{e}})$ und $\Psi(P)$ Fundamentalbereiche für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$, also gilt $P = F_{\tilde{e}}$. ∎

Bemerkung. Es bleibt, die Behauptung des Satzes 98 in den Fällen mit $\alpha \geqslant \pi/15$ zu verifizieren, also für $\Gamma(7,3,2)^1$, $\Gamma(4,3,3)^1$, $\Gamma(5,3,3)^2$, sowie $\Gamma(11,3,2)^5$, $\Gamma(13,3,2)^7$, $\Gamma(7,3,3)^4$. Für die ersten drei Fälle wurde die Behauptung des Satzes 98 in [Fi] für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,2)^1$, in [KNRS] für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(4,3,3)^1$ und in [P] für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$ bereits gezeigt.

§19. Die Fälle $\Gamma(2k+3, 3, 3)^k$ und $\Gamma(2k+6, 3, 2)^k$

Notation. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}$ und $\omega_d = \tan \vartheta_d = \frac{1-\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$.

PROPOSITION 99. *Es gilt* $2\vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$, $\sin 2\vartheta_d = \cos 3\alpha$, $\cos 2\vartheta_d = \sin 3\alpha$ *und* $\sin 3\alpha + \omega_d \cos 3\alpha = 1$. ■

NOTATION. Es gilt $a_m = f_{m,-2}$, $b_m = f_{m,0}$ und $c_m = f_{m,2}$.

UNGLEICHUNGEN. *Nach der Proposition 76 gilt damit*

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha \leqslant \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1), \\ z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha \leqslant \frac{A-1}{B}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 100. *Es gilt* $0 \notin (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$ *und* $0 \notin (HB_0 \cap HC_0)(\omega)$.

BEWEIS. Die Ungleichung der Halbebene ist

$$z \in \hat{H}B_0(\omega) \iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha \geqslant \frac{A-1}{B}.$$

Aus $0 \in (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$ bzw. $0 \in (HB_0 \cap HC_0)(\omega)$ würde also $A - 1 \leqslant 0$ folgen. ■

PROPOSITION 101. *Die Winkelhalbierende des Sektors* $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(\omega_d)$ *geht durch den Koordinatenursprung.*

BEWEIS. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}B_0(\omega_d)$ und $H^+ = \hat{H}C_0(\omega_d)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{H}B_0(\omega_d) &\iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha \geqslant \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{H}C_0(\omega_d) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \geqslant \frac{A-1}{B}. \ ■ \end{aligned}$$

PROPOSITION 102. *Für ein* $\omega^* \in (0, \omega_d)$ *schneiden sich die Geraden* $\hat{E}B_0(\omega^*)$, $\hat{E}C_0(\omega^*)$ *und* $\hat{E}B_1(\omega^*)$ *in einem Punkt.*

BEWEIS. Gleichungen:

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{E}B_1(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = \sin 2\alpha \neq 0$ und

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) \cdot B &= (\cos 3\alpha - \cos\alpha)(A-1) + \sin 2\alpha(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1) \\ &= -2\sin\alpha \sin 2\alpha(A-1) + \sin 2\alpha(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1) \\ &= \sin 2\alpha(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) - 1 - 2\sin\alpha(A-1)) \\ &= \sin 2\alpha(A(\sin 3\alpha + \omega\cos 3\alpha) + 2\sin\alpha - 2) \end{aligned}$$

Es gilt

$$A\sin 3\alpha + 2\sin\alpha - 2 = \frac{\sin 3\alpha}{2\sin\alpha} + 2\sin\alpha - 2 = -\frac{(2\sin\alpha - 1)^2}{2} < 0$$

und

$$\begin{aligned} A(\sin 3\alpha + \omega_d \cos 3\alpha) + 2\sin\alpha - 2 &= A + 2\sin\alpha - 2 \\ &= \left(\frac{1}{2\sin\alpha} + 2\sin\alpha\right) - 2 > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung. Es gilt $\omega^* = \tan\alpha\tan(\alpha + \vartheta_d)\cdot\omega_d$.

Definition. Es sei

$$P := \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}A_m \cup \tilde{I}B_m)[-\omega_d, 0]\right) \cup \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_m \cup \tilde{I}C_m)[0, \omega_d]\right).$$

Aus der Proposition 68 folgt $P \subset F_{\mathcal{K}}$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß

$$\pi(P) = \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (IA_m \cup IB_m)[-\omega_d, 0]\right) \cup \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (IB_m \cup IC_m)[0, \omega_d]\right)$$

gilt und $\pi|_P : P \to \pi(P)$ ein Homöomorphismus ist. Es sei

$$\hat{P} := \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}A_m \cup \hat{I}B_m)[-\omega_d, 0]\right) \cup \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_m \cup \hat{I}C_m)[0, \omega_d]\right).$$

Ich untersuche nun die kombinatorische Struktur des Randes von $\hat{P}$. Um $\hat{P}[0, \omega_d]$ zu beschreiben, wende ich (A7.6) mit

$$H^- = \hat{H}B_0, \quad H^+ = \hat{H}C_0, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = \frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2}$$

und mit

$$\omega_1 = 0, \quad \omega^- = \omega^*, \quad \omega^\circ = \omega_d$$

an. In den Propositionen 100, 101 und 102 wurden die Voraussetzungen von (A7.6) überprüft. Ferner entsteht $\hat{P}[-\omega_d, 0]$ aus $\hat{P}[0, \omega_d]$ durch Anwendung der von $\tilde{\eta}$ induzierten Isometrie von S_e. Betrachtet man die Schichten $\pi(P)(\omega)$ genauer, so sieht man, daß die Seitenflächen der Stücke $P[-\omega_d, 0]$ und $P[0, \omega_d]$ so zusammenpassen, daß P keine horizontalen in der Ebene $\{\omega = 0\}$ enthaltenen Kanten hat. Die Kombinatorik der Seitenfläche von $\hat{P}$ ist in der Abbildung dargestellt. Nach Satz 74 gilt $\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R < 1$. Nach Satz 48 folgt $\hat{P} \subset L$ und damit $\pi(P) = \hat{P} \cap L = \hat{P}$.

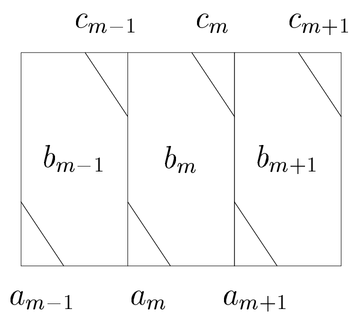


Abbildung 5. Die Seitenfläche von $\hat{P}$ für $l = 2$.

Proposition 103. *Nach der Proposition 75 gilt*

$$a_m^{-1} = c_{m-3}, \quad b_m^{-1} = b_{m+\lambda k+3}, \quad c_m^{-1} = a_{m+3}$$

und ferner $a_m r_d = b_m$, $b_m r_d = c_m$, $b_m r_d^{-1} = a_m$, $c_m r_d^{-1} = b_m$, $r_d^{-1} b_m = a_{m-\lambda k}$, $r_d^{-1} c_m = b_{m-\lambda k}$, $r_d a_m = b_{m+\lambda k}$, $r_d b_m = c_{m+\lambda k}$ *und*

$$\begin{aligned} a_m^{-1} &= \tilde{\rho}^{-3}(c_{m-1}) a_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-3}(a_{m+1}) a_{m-1}^{-1}, \\ b_m^{-1} &= \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(b_{m-1}) a_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(c_{m-1}) b_{m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(a_{m+1}) b_{m-1}^{-1}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 104. *Es gilt* $F_{\tilde{e}} = P$.

Beweis. Ich zeige zuerst, daß $\Psi(P) \subset \tilde{G}$ ein Fundamentalbereich von $\tilde{\Gamma}$ ist. Um den Satz 55 anzuwenden, beschreibe ich die Identifikationen am Rande von $P \simeq \pi(P) = \hat{P}$ unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$

$$\begin{aligned} &(r_d; b_m, c_m) \mapsto \tilde{\rho}^{-\lambda k}(r_d^{-1}; a_m, b_m), \\ &(a_m; r_d^{-1}, b_{m-1}, b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{-3}(c_m; b_m, b_{m+1}, r_d), \\ &(b_m; r_d, c_m, b_{m+1}, a_{m+1}, r_d^{-1}, a_m, b_{m-1}, c_{m-1}) \\ &\qquad \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(b_m; c_m, r_d, c_{m-1}, b_{m-1}, a_m, r_d^{-1}, a_{m+1}, b_{m+1}), \\ &(c_m; r_d, b_{m+1}, b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{3}(a_m; b_m, b_{m-1}, r_d^{-1}) \end{aligned}$$

und die Kantenzyklen

$$\begin{aligned} &(b_m; r_d) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(c_m; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+6}(r_d^{-1}; a_m), \\ &(b_m; r_d^{-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(a_m; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k}(r_d; c_m), \\ &(b_m; b_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+2}(c_m; b_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+4}(b_m; a_{m+1}). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Zyklen sind vom Typ $\aleph$, der dritte Zykel ist vom Typ $\beth$. Nach dem Satz 55 ist $\Psi(P)$ ein Fundamentalbereich von $\tilde{\Gamma}$. Es bleibt zu zeigen, daß die Fundamentalbereiche P und $F_{\tilde{e}}$ gleich sind. Nach Satz 74 gilt $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{K}}$, und aus $P = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}(P)$, $P \subset F_{\mathcal{K}} = F_{\tilde{\Gamma}}$ und $F_{\tilde{e}} = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}(F_{\tilde{\Gamma}})$ folgt $P \subset F_{\tilde{e}}$ und damit $P = F_{\tilde{e}}$. $\blacksquare$

§20. Die Fälle $\Gamma(3k{+}3,3,3)^k$ und $\Gamma(3k{+}6,3,2)^k$

Notation. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{6} - \alpha$ und $\omega_d = \tan \vartheta_d$.

Proposition 105. *Es gilt* $\cos\vartheta_d + \omega_d \sin\vartheta_d = \frac{1}{\cos\vartheta_d}$, $\cos\vartheta_d - \omega_d \sin\vartheta_d = \frac{\cos 2\vartheta_d}{\cos\vartheta_d}$ *und* $\alpha + \vartheta_d = \frac{\pi}{6}$. $\blacksquare$

Notation. Es gilt $b_m = f_{m,-1}$ und $c_m = f_{m,1}$.

Ungleichungen. *Nach der Proposition 76 gilt*

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1 \cos(\alpha - \vartheta_d) - z_2 \sin(\alpha - \vartheta_d) \leqslant \frac{1}{B}(A(\cos\vartheta_d - \omega \sin\vartheta_d) - 1), \\ z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \cos(\alpha + \vartheta_d) - z_2 \sin(\alpha + \vartheta_d) \leqslant \frac{1}{B}(A(\cos\vartheta_d + \omega \sin\vartheta_d) - 1), \\ z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1 \cos(\alpha + \vartheta_d) + z_2 \sin(\alpha + \vartheta_d) \leqslant \frac{1}{B}(A(\cos\vartheta_d - \omega \sin\vartheta_d) - 1), \\ z \in \hat{I}C_1(\omega) &\iff z_1 \cos(\alpha - \vartheta_d) + z_2 \sin(\alpha - \vartheta_d) \leqslant \frac{1}{B}(A(\cos\vartheta_d + \omega \sin\vartheta_d) - 1). \end{aligned}$$

Proposition 106. *Es gilt* $0 \notin (HB_0 \cap HC_0)(\omega)$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{H}B_0(\omega) &\iff z_1\cos(\alpha-\vartheta_d) - z_2\sin(\alpha-\vartheta_d) \geqslant \frac{1}{B}(A(\cos\vartheta_d - \omega\sin\vartheta_d)-1), \\ z \in \hat{H}C_0(\omega) &\iff z_1\cos(\alpha+\vartheta_d) - z_2\sin(\alpha+\vartheta_d) \geqslant \frac{1}{B}(A(\cos\vartheta_d + \omega\sin\vartheta_d)-1). \end{aligned}$$

Aus $0 \in (HB_0 \cap HC_0)(\omega)$ würde also $A(\cos\vartheta_d \pm \omega\sin\vartheta_d) - 1 \leqslant 0$ und damit $A\cos\vartheta_d \leqslant 1$ folgen. Dabei gilt $A\cos\vartheta_d = \frac{\cos\vartheta_d}{2\sin\alpha} > \frac{\cos(\pi/6)}{2\sin(\pi/9)} > 1$. ∎

Proposition 107. *Die Winkelhalbierende des Sektors* $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(0)$ *geht durch den Koordinatenursprung.*

Beweis. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}B_0(0)$ und $H^+ = \hat{H}C_0(0)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{H}B_0(0) &\iff z_1\cos(\alpha-\vartheta_d) - z_2\sin(\alpha-\vartheta_d) \geqslant \frac{1}{B}(A\cos\vartheta_d - 1), \\ z \in \hat{H}C_0(0) &\iff z_1\cos(\alpha+\vartheta_d) - z_2\sin(\alpha+\vartheta_d) \geqslant \frac{1}{B}(A\cos\vartheta_d - 1). \ ∎ \end{aligned}$$

Proposition 108. *Die Geraden* $\hat{E}C_0(\omega_d)$, $\hat{E}B_1(\omega_d)$ *und* $\hat{E}C_1(\omega_d)$ *schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis. Gleichungen:

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}C_0(\omega_d) &\iff z_1\cos(\alpha+\vartheta_d) - z_2\sin(\alpha+\vartheta_d) = \frac{A-\cos\vartheta_d}{B\cos\vartheta_d}, \\ z \in \hat{E}B_1(\omega_d) &\iff z_1\cos(\alpha+\vartheta_d) + z_2\sin(\alpha+\vartheta_d) = \frac{A\cos 2\vartheta_d - \cos\vartheta_d}{B\cos\vartheta_d}, \\ z \in \hat{E}C_1(\omega_d) &\iff z_1\cos(\alpha-\vartheta_d) + z_2\sin(\alpha-\vartheta_d) = \frac{A-\cos\vartheta_d}{B\cos\vartheta_d}. \end{aligned}$$

Ich wende (A7.2) an. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta \cdot B\cos\vartheta_d &= (\sin(2\alpha+2\vartheta_d) - \sin 2\vartheta_d)(A-\cos\vartheta_d) - \sin 2\alpha(A\cos 2\vartheta_d - \cos\vartheta_d) \\ &= 2\sin\alpha(\cos(\alpha+2\vartheta_d)(A-\cos\vartheta_d) - \cos\alpha(A\cos 2\vartheta_d - \cos\vartheta_d)). \end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha+2\vartheta_d)(A-\cos\vartheta_d) - \cos\alpha(A\cos 2\vartheta_d - \cos\vartheta_d) \\ &\quad = (\cos\alpha - \cos(\alpha+2\vartheta_d))\cos\vartheta_d + A(\cos(\alpha+2\vartheta_d) - \cos\alpha\cos 2\vartheta_d) \\ &\quad = 2\sin(\alpha+\vartheta_d)\sin\vartheta_d\cos\vartheta_d - A\sin\alpha\sin 2\vartheta_d \\ &\quad = \sin 2\vartheta_d \cdot \left(\sin(\alpha+\vartheta_d) - \frac{1}{2}\right) = 0. \ ∎ \end{aligned}$$

Definition. Es sei
$$P := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_m \cup \tilde{I}C_m)[-\omega_d,\omega_d].$$
Aus der Proposition 68 folgt $P \subset F_{\mathcal{K}}$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß
$$\pi(P) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (IB_m \cup IC_m)[-\omega_d,\omega_d]$$
gilt und $\pi|_P : P \to \pi(P)$ ein Homöomorphismus ist. Es sei
$$\hat{P} := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_m \cup \hat{I}C_m)[-\omega_d,\omega_d].$$

Ich untersuche nun die kombinatorische Struktur des Randes von $\hat{P}$. Dafür wende ich (A7.6) mit $H^- = \hat{H}B_0$, $H^+ = \hat{H}C_0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = \frac{\pi}{3} + \alpha$ und mit $\omega^- = -\omega_d$, $\omega^\circ = 0$, $\omega^+ = \omega_d$ an. In den Propositionen 106, 107 und 108 wurden die Voraussetzungen von (A7.6) überprüft. Ferner entsteht $\hat{P}[-\omega_d, 0]$ aus $\hat{P}[0,\omega_d]$ durch Anwendung der von $\tilde{\eta}$ induzierten Isometrie von S_e. Die Kombinatorik der Seitenfläche von $\hat{P}$ ist in der Abbildung dargestellt. Nach Satz 74 gilt $\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) \leqslant \mathcal{M}_R < 1$. Nach Satz 48 folgt $\hat{P} \subset L$ und damit $\pi(P) = \hat{P} \cap L = \hat{P}$.

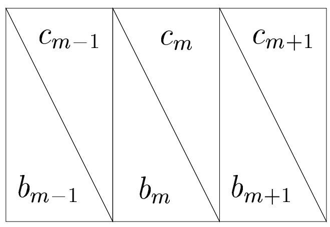


Abbildung 6. Die Seitenfläche von $\hat{P}$ für $l = 3$.

Proposition 109. *Nach der Proposition 75 gilt* $b_m^{-1} = c_{m-(\lambda k+3)}$, $c_m^{-1} = b_{m+(\lambda k+3)}$, $b_m r_d = c_m$, $c_m r_d^{-1} = b_m$, $r_d^{-1} c_m = b_{m-\lambda k}$, $r_d b_m = c_{m+\lambda k}$ *und*
$$b_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-(\lambda k+3)}(b_{m+1})c_{m-1}^{-1}. \blacksquare$$

Satz 110. *Es gilt* $F_{\tilde{e}} = P$.

Beweis. Ich zeige zuerst, daß $\Psi(P) \subset \tilde{G}$ ein Fundamentalbereich von $\tilde{\Gamma}$ ist. Um den Satz 55 anzuwenden, beschreibe ich die Identifikationen am Rande von $P \simeq \pi(P) = \hat{P}$ unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$
$$\begin{aligned}
&(r_d; c_m) \mapsto \tilde{\rho}^{-\lambda k}(r_d^{-1}; b_m),\\
&(b_m; r_d^{-1}, c_{m-1}, c_m) \mapsto \tilde{\rho}^{-(\lambda k+3)}(c_m; b_m, b_{m+1}, r_d),\\
&(c_m; r_d, b_{m+1}, b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(b_m; c_m, c_{m-1}, r_d^{-1})
\end{aligned}$$
und die Kantenzyklen
$$\begin{aligned}
&(c_m; r_d) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+3}(c_m; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{2(\lambda k+3)}(r_d^{-1}; b_m),\\
&(c_m; b_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{\lambda k+2}(c_m; b_{m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{2(\lambda k+2)}(c_m; b_{m+1}).
\end{aligned}$$

Der erste Zykel ist vom Typ ℵ, der zweite Zykel ist vom Typ ב. Nach dem Satz 55 ist $\Psi(P)$ ein Fundamentalbereich von $\tilde{\Gamma}$. Es bleibt zu zeigen, daß die Fundamentalbereiche P und $F_{\tilde{e}}$ gleich sind. Nach Satz 74 gilt $F_{\tilde{\Gamma}} = F_{\mathcal{K}}$. Aus $P = \operatorname{Cl}\operatorname{Int}(P)$, $P \subset F_{\mathcal{K}} = F_{\tilde{\Gamma}}$ und $F_{\tilde{e}} = \operatorname{Cl}\operatorname{Int}(F_{\tilde{\Gamma}})$ folgt $P \subset F_{\tilde{e}}$ und damit $P = F_{\tilde{e}}$. ∎

§21. Die Fälle $\Gamma(p, 4, 2)^k$

Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p, 4, 2)^k$ mit $p = lk + 4$, und Γ sei das Bild von $\tilde{\Gamma}$ in $\mathrm{PSU}(1, 1)$. Für die Konstruktion des Fundamentalbereichs von $\tilde{\Gamma}$ sei der Fixpunkt $u = 0$ der Ordnung p gewählt.

Es gilt $\alpha = \frac{\pi}{p} \in \left(0, \frac{\pi}{5}\right]$. Es gilt nach der Proposition 47 mit Hilfe von (A5)

$$C = \operatorname{ctg}\alpha > 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha} > 1,$$

$$\frac{1}{S} = \sin\alpha \cdot D, \quad \frac{1}{R_{\mathcal{K}}} = \cos\alpha \cdot D, \quad \frac{1}{B} = \sqrt{2}\sin\alpha \cdot D$$

mit $D := \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} > 1$. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{2l} - \frac{2\alpha}{l} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, also $\vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ für $l = 1$, $\vartheta_d = \frac{\pi}{4} - \alpha$ für $l = 2$ und $\vartheta_d = \frac{\pi}{6} - \frac{2\alpha}{3}$ für $l = 3$.

Proposition 111. *Es sei $l \geqslant 2$, dann gilt $\vartheta_d \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, also ist $\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d)$ nach der Proposition 47 definiert, und es gilt*

$$\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) = D \cdot \left(\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{2\cos^2\vartheta_d - 1}\right) = D \cdot \left(\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{\cos 2\vartheta_d}\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) = \frac{1}{R_{\mathcal{K}}} - \frac{1}{B} \cdot \sqrt{\cos^2\vartheta_d - \cos^2\frac{\pi}{q}} = D \cdot \left(\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{2\cos^2\vartheta_d - 1}\right)$$

und $2\cos^2\vartheta_d - 1 = \cos 2\vartheta_d$. ∎

Proposition 112. *Im Falle $l \geqslant 2$ gilt $\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) < 1$.*

Beweis. Im Falle $l \geqslant 2$ gilt $2\vartheta_d \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ und folglich $\cos 2\vartheta_d \geqslant \sin 2\alpha$. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{\sin 2\alpha} < \sqrt{\cos 2\alpha}\\
&\iff \cos\alpha < \sin\alpha\sqrt{\sin 2\alpha} + \sqrt{\cos 2\alpha}\\
&\iff 0 < \sin^2\alpha\sin 2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}\\
&\iff \sqrt{\sin\alpha}(1 - \sin 2\alpha) < 2\sqrt{2\cos\alpha\cos 2\alpha}.
\end{aligned}$$

Es gilt stets $\sqrt{\sin\alpha}(1 - \sin 2\alpha) \leqslant 1$ und für $\alpha \leqslant \frac{\pi}{5}$ gilt $2\sqrt{2\cos\alpha\cos 2\alpha} \geqslant \sqrt{2} > 1$. ∎

Erinnerung. Für $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \equiv l \mod 2$ gilt

$$f_{2m,j} = g_{m,1,3+k\cdot\frac{l+j}{2}-m} = g_{m-1,3,2+k\cdot\frac{l+j}{2}-m}, \quad f_{2m+1,j} = g_{m,2,2+k\cdot\frac{l+j}{2}-m}.$$

Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
f_{2m,-l} &= g_{m,1,3-m} = g_{m-1,3,2-m}, & f_{2m,l} &= g_{m,1,p-1-m} = g_{m-1,3,p-2-m},\\
f_{2m+1,-l} &= g_{m,2,2-m}, & f_{2m+1,l} &= g_{m,2,p-2-m}.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 113. *Es gilt*

$$\begin{aligned} &f_{m,j}r_d = f_{m,j+2}, \quad f_{m,j+2}r_d^{-1} = f_{m,j}, \\ &r_d f_{m,j} = \tilde{\rho}^k(f_{m,j+2}), \quad r_d^{-1}f_{m,j} = \tilde{\rho}^{-k}(f_{m,j-2}), \\ &f_{m,l-2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{kj+2}(f_{m,-(l-2j)}), \\ &f_{m,l}^{-1} = \tilde{\rho}^2(f_{m,-l}), \quad f_{m,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{m,l}). \end{aligned}$$

Für $p = 2k+4$ gilt außerdem

$$f_{m,0}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(k+2)}(f_{m,0}) = \tilde{\rho}^{k+2}(f_{m,0}).$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} f_{2m+2,-l}f_{2m,-l} &= f_{2m+1,-l}, \\ f_{2m+3,-l}f_{2m,-l} &= f_{2m+2,-l}, \\ f_{2m+2,-l}f_{2m-1,-l} &= f_{2m,-l} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} f_{2m,-l}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-1,l})f_{2m+2,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-2,l})f_{2m+1,-l}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+1,-l})f_{2m-2,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+2,-l})f_{2m-1,-l}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+1,l})f_{2m-2,l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+2,l})f_{2m-1,l}^{-1}, \end{aligned}$$

$$f_{2m+1,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+2,-l})f_{2m,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m,l})f_{2m+2,-l}^{-1},$$

$$\begin{aligned} f_{2m,-l+2j}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m-1,l-2j})f_{2m+2,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m-2,l-2j})f_{2m+1,-l}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l})f_{2m-2,-l+2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+2,-l})f_{2m-1,-l+2j}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,l-2j})f_{2m-2,l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+2,l-2j})f_{2m-1,l}^{-1}, \end{aligned}$$

$$f_{2m+1,-l+2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+2,-l})f_{2m,-l+2j}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m,l-2j})f_{2m+2,-l}^{-1}.$$

Mit $a_m = f_{m,-l}$, $b_m = f_{m,-l+2}$ und $c_m = f_{m,-l+4}$ gilt

$$a_m r_d = b_m, \quad b_m r_d = c_m, \quad c_m r_d = d_m, \quad b_m r_d^{-1} = a_m, \quad c_m r_d^{-1} = b_m, \quad d_m r_d^{-1} = c_m,$$

$$a_{2m+2}a_{2m} = a_{2m+1}, \quad a_{2m+3}a_{2m} = a_{2m+2}, \quad a_{2m+2}a_{2m-1} = a_{2m}$$

und

$$\begin{aligned} a_{2m}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-1,l})a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-2,l})a_{2m+1}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+1})a_{2m-2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+2})a_{2m-1}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+1,l})f_{2m-2,l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+2,l})f_{2m-1,l}^{-1}, \end{aligned}$$

$$a_{2m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+2})a_{2m}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m,l})a_{2m+2}^{-1},$$

$$\begin{aligned} b_{2m}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-(k+2)}(f_{2m-1,l-2})a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(k+2)}(f_{2m-2,l-2})a_{2m+1}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(k+2)}(a_{2m+1})b_{2m-2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(k+2)}(a_{2m+2})b_{2m-1}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(k+2)}(f_{2m+1,l-2})f_{2m-2,l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(k+2)}(f_{2m+2,l-2})f_{2m-1,l}^{-1}, \end{aligned}$$

$$b_{2m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(k+2)}(a_{2m+2})b_{2m}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(k+2)}(f_{2m,l-2})a_{2m+2}^{-1},$$

$$\begin{aligned} c_{2m}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(f_{2m-1,l-4})a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(f_{2m-2,l-4})a_{2m+1}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(a_{2m+1})c_{2m-2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(a_{2m+2})c_{2m-1}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(f_{2m+1,l-4})f_{2m-2,l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(f_{2m+2,l-4})f_{2m-1,l}^{-1}, \end{aligned}$$

$$c_{2m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(a_{2m+2})c_{2m}^{-1} = \tilde{\rho}^{-(2k+2)}(f_{2m,l-4})a_{2m+2}^{-1}.$$

Beweis. Nach der Proposition 61 gilt $\tilde{\rho}^k(g) = r_d g r_d^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} r_d f_{m,j} &= \tilde{\rho}^k(f_{m,j} r_d) = \tilde{\rho}^k(f_{m,j+2}), \\ r_d^{-1} f_{m,j} &= \tilde{\rho}^{-k}(f_{m,j} r_d^{-1}) = \tilde{\rho}^{-k}(f_{m,j-2}). \end{aligned}$$

Nach der Proposition 63 gilt

$$\begin{aligned} f_{0,l}^{-1} &= g_{0,1,p-1}^{-1} = g_{1,3,0} = f_{4,-l} = \tilde{\rho}^2(f_{0,-l}), \\ f_{1,l}^{-1} &= g_{0,2,p-2}^{-1} = g_{2,2,0} = f_{5,-l} = \tilde{\rho}^2(f_{1,-l}). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f_{2m,l}^{-1} &= (\tilde{\rho}^m(f_{0,l}))^{-1} = \tilde{\rho}^m(f_{0,l}^{-1}) = \tilde{\rho}^m(\tilde{\rho}^2(f_{0,-l})) = \tilde{\rho}^2(\tilde{\rho}^m(f_{0,-l})) = \tilde{\rho}^2(f_{2m,-l}), \\ f_{2m+1,l}^{-1} &= (\tilde{\rho}^m(f_{1,l}))^{-1} = \tilde{\rho}^m(f_{1,l}^{-1}) = \tilde{\rho}^m(\tilde{\rho}^2(f_{1,-l})) = \tilde{\rho}^2(\tilde{\rho}^m(f_{1,-l})) = \tilde{\rho}^2(f_{2m+1,-l}), \end{aligned}$$

es gilt also $f_{m,l}^{-1} = \tilde{\rho}^2(f_{m,-l})$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_{m,l-2j}^{-1} &= (f_{m,l} r_d^{-j})^{-1} = r_d^j f_{m,l}^{-1} = r_d^j \tilde{\rho}^2(f_{m,-l}) = \tilde{\rho}^2(r_d^j f_{m,-l}) \\ &= \tilde{\rho}^2(\tilde{\rho}^{kj}(f_{m,-l+2j})) = \tilde{\rho}^{kj+2}(f_{m,-l+2j}). \end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} f_{2m+2,-l} f_{2m,-l} &= g_{m,3,1-m} g_{m-1,3,2-m} = g_{m,6,2-m} c^{-1} = g_{m,2,2-m} = f_{2m+1,-l}, \\ f_{2m+3,-l} f_{2m,-l} &= g_{m+1,2,1-m} g_{m-1,3,2-m} = g_{m+1,5,2-m} c^{-1} = g_{m+1,1,2-m} = f_{2m+2,-l}, \\ f_{2m+2,-l} f_{2m-1,-l} &= g_{m,3,1-m} g_{m-1,2,3-m} = g_{m,5,3-m} c^{-1} = g_{m,1,3-m} = f_{2m,-l}. \end{aligned}$$

Aus $f_{2m+2,-l} f_{2m,-l} = f_{2m+1,-l}$ folgt

$$\begin{aligned} f_{2m,-l}^{-1} &= f_{2m+1,-l}^{-1} f_{2m+2,-l} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+1,l}) f_{2m-2,l}^{-1}, \\ f_{2m+1,-l}^{-1} &= f_{2m,-l}^{-1} f_{2m+2,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m,l}) f_{2m+2,-l}^{-1}. \end{aligned}$$

Aus $f_{2m,-l} f_{2m-2,-l} = f_{2m-1,-l}$ folgt

$$f_{2m,-l}^{-1} = f_{2m-2,-l} f_{2m-1,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+2,-l}) f_{2m-1,-l}^{-1}.$$

Aus $f_{2m+3,-l} f_{2m,-l} = f_{2m+2,-l}$ folgt

$$f_{2m,-l}^{-1} = f_{2m+2,-l}^{-1} f_{2m+3,-l} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+2,l}) f_{2m-1,l}^{-1}.$$

Aus $f_{2m+1,-l} f_{2m-2,-l} = f_{2m,-l}$ folgt

$$\begin{aligned} f_{2m,-l}^{-1} &= f_{2m-2,-l}^{-1} f_{2m+1,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-2,l}) f_{2m+1,-l}^{-1}, \\ f_{2m+1,-l}^{-1} &= f_{2m-2,-l} f_{2m,-l}^{-1}. \end{aligned}$$

Aus $f_{2m+2,-l} f_{2m-1,-l} = f_{2m,-l}$ folgt

$$f_{2m,-l}^{-1} = f_{2m-1,-l}^{-1} f_{2m+2,-l}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-1,l}) f_{2m+2,-l}^{-1}.$$

Aus $f_{2m,-l} f_{2m-3,-l} = f_{2m-2,-l}$ folgt

$$f_{2m,-l}^{-1} = f_{2m-3,-l} f_{2m-2,-l}^{-1}.$$

Aus $f^{-1}_{2m,-l} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-1,l})f^{-1}_{2m+2,-l}$ folgt

$$\begin{aligned} f^{-1}_{2m,-l+2j} &= (f_{2m,-l}r_d^j)^{-1} = r_d^{-j}f^{-1}_{2m,-l} = r_d^{-j}\tilde{\rho}^{-2}(f_{2m-1,l})f^{-1}_{2m+2,-l} \\ &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m-1,l-2j})f^{-1}_{2m+2,-l}. \end{aligned}$$

Aus $f^{-1}_{2m,-l} = \tilde{\rho}^{-2}(f_{2m+1,-l})f^{-1}_{2m-2,-l}$ folgt analog

$$f^{-1}_{2m,-l+2j} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l-2j})f^{-1}_{2m-2,-l}$$

und damit

$$\begin{aligned} f^{-1}_{2m,-l+2j} &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l-2j})f^{-1}_{2m-2,-l} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l}r_d^{-j})f^{-1}_{2m-2,-l} \\ &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l})r_d^{-j}f^{-1}_{2m-2,-l} = \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l})(f_{2m-2,-l}r_d^{j})^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-(kj+2)}(f_{2m+1,-l})f^{-1}_{2m-2,-l+2j}. \end{aligned}$$

Die anderen Formeln für $f^{-1}_{2m,-l+2j}$ und $f^{-1}_{2m+1,-l+2j}$ folgen analog aus den entsprechenden Formeln für $f^{-1}_{2m,-l}$ und $f^{-1}_{2m+1,-l}$. ∎

Erinnerung. Für $M \subset \mathbb{C}^2$ und $\omega \in \mathbb{R}$ ist $M(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : (1+i\omega, z) \in M\}$.

Proposition 114. *Nach der Proposition* 58 *gilt*

$$\begin{aligned} \pi(f_{0,j}) &= (A \cdot e^{ij\vartheta_d}, B \cdot e^{-i(\alpha+j\vartheta_d)}), \\ \pi(f_{1,j}) &= (C \cdot e^{ij\vartheta_d}, S \cdot e^{-ij\vartheta_d}), \\ \pi(f_{2,j}) &= (A \cdot e^{ij\vartheta_d}, B \cdot e^{i(\alpha-j\vartheta_d)}) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}_{0,j}(\omega) &\iff z_1\cos(\alpha+j\vartheta_d) - z_2\sin(\alpha+j\vartheta_d) \leqslant \frac{A(\cos(j\vartheta_d)+\omega\sin(j\vartheta_d))-1}{B}, \\ z \in \hat{I}_{1,j}(\omega) &\iff z_1\cos(j\vartheta_d) - z_2\sin(j\vartheta_d) \leqslant \frac{C(\cos(j\vartheta_d)+\omega\sin(j\vartheta_d))-1}{S}, \\ z \in \hat{I}_{2,j}(\omega) &\iff z_1\cos(\alpha-j\vartheta_d) + z_2\sin(\alpha-j\vartheta_d) \leqslant \frac{A(\cos(j\vartheta_d)+\omega\sin(j\vartheta_d))-1}{B} \end{aligned}$$

mit $z_1 = \mathrm{Re}(z)$ *und* $z_2 = \mathrm{Im}(z)$. *Es gilt insbesondere*

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}_{0,-l}(\omega) &\iff z_1\sin 3\alpha + z_2\cos 3\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha)-1), \\ z \in \hat{I}_{0,0}(\omega) &\iff z_1\cos\alpha - z_2\sin\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A-1), \\ z \in \hat{I}_{0,l}(\omega) &\iff z_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha)-1), \\ z \in \hat{I}_{1,-l}(\omega) &\iff z_1\sin 2\alpha + z_2\cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha)-1), \\ z \in \hat{I}_{1,0}(\omega) &\iff z_1 \leqslant \frac{1}{S}(C-1), \\ z \in \hat{I}_{1,l}(\omega) &\iff z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha)-1). \\ z \in \hat{I}_{2,-l}(\omega) &\iff z_1\sin\alpha + z_2\cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha)-1), \\ z \in \hat{I}_{2,0}(\omega) &\iff z_1\cos\alpha + z_2\sin\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A-1), \\ z \in \hat{I}_{2,l}(\omega) &\iff z_1\sin 3\alpha - z_2\cos 3\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha)-1). \end{aligned}$$ ∎

§22. Fall $\Gamma(k+4, 4, 2)^k$

NOTATION. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ und $\omega_d = \tan\vartheta_d = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

NOTATION. Es sei $\gamma := \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ gilt $\gamma > 0$. Es gilt

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad \sqrt{2}\cos\alpha = \gamma\sqrt{2} + 1.$$

Es gilt ferner

$$A\sin 2\alpha - 1 = \gamma\sqrt{2} \quad \text{und} \quad C\sin 2\alpha - 1 = \cos 2\alpha = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2}).$$

PROPOSITION 115. *Es gilt* $\sin 2\alpha + \omega_d \cos 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$ *und* $\sin 2\alpha - \omega_d \cos 2\alpha = -\frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha}$. ∎

NOTATION. Es sei

$$\omega_0 := \frac{2\gamma^2}{\sin 2\alpha}, \quad \omega_2 := \frac{2\gamma^2}{\tan\alpha\cos 2\alpha}, \quad \omega_3 = \omega^* := \frac{\gamma}{\sin\alpha}.$$

PROPOSITION 116. *Es gilt* $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 = \omega^* < \omega_d$.

BEWEIS. Mit $\gamma = \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 2\alpha = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2})$ und $\sqrt{2}\cos\alpha = \gamma\sqrt{2} + 1$ folgt

$$\omega_1 \sin\alpha = \frac{\gamma^2\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2}+1} \qquad \omega_2 \sin\alpha = \frac{\gamma(\gamma\sqrt{2}+1)}{\gamma\sqrt{2}+2}$$
$$\omega^* \sin\alpha = \gamma \qquad \omega_d \sin\alpha = \frac{\gamma(\gamma\sqrt{2}+2)}{\gamma\sqrt{2}+1}$$

Die behauptete Ungleichungskette ist somit äquivalent zu der (für $\gamma > 0$ offensichtlichen) Ungleichungskette

$$0 < \frac{\gamma\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2}+1} < \frac{\gamma\sqrt{2}+1}{\gamma\sqrt{2}+2} < 1 < \frac{\gamma\sqrt{2}+2}{\gamma\sqrt{2}+1}. \ ∎$$

NOTATION. Es gilt $a_m = f_{m,-1}$, $b_m = f_{m,1}$ und $c_m = f_{m,3}$.

UNGLEICHUNGEN.

$$z \in \hat{I}A_0(\omega) \iff z_1 \sin 3\alpha + z_2 \cos 3\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha) - 1),$$
$$z \in \hat{I}B_0(\omega) \iff z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),$$
$$z \in \hat{I}C_0(\omega) \iff z_1 \sin 5\alpha - z_2 \cos 5\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 6\alpha + \omega\cos 6\alpha) + 1),$$
$$z \in \hat{I}A_2(\omega) \iff z_1 \sin\alpha + z_2 \cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha) - 1),$$
$$z \in \hat{I}B_2(\omega) \iff z_1 \sin 3\alpha - z_2 \cos 3\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),$$
$$z \in \hat{I}A_1(\omega) \iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha) - 1),$$
$$z \in \hat{I}B_1(\omega) \iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),$$
$$z \in \hat{I}C_1(\omega) \iff z_1 \sin 6\alpha - z_2 \cos 6\alpha \geqslant \frac{1}{S}(C(\sin 6\alpha + \omega\cos 6\alpha) + 1).$$

Proposition 117. *Es gilt* $0 \notin (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{H}A_0(\omega) &\iff z_1 \sin 3\alpha + z_2 \cos 3\alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1), \\ z \in \hat{H}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Aus $0 \in (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$ würde also $A(\sin 2\alpha \pm \omega \cos 2\alpha) - 1 \leqslant 0$ und damit $A \sin 2\alpha - 1 \leqslant 0$ folgen. Dabei gilt $A \sin 2\alpha - 1 = \sqrt{2} \cos \alpha - 1 > 0$. ∎

Proposition 118. *Die Winkelhalbierende des Sektors* $(\hat{H}A_0 \cap \hat{H}B_0)(0)$ *geht durch den Koordinatenursprung.*

Beweis. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}A_0(0)$ und $H^+ = \hat{H}B_0(0)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{H}A_0(0) &\iff z_1 \sin 3\alpha + z_2 \cos 3\alpha \geqslant \frac{A \sin 2\alpha - 1}{B}, \\ z \in \hat{H}B_0(0) &\iff z_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha \geqslant \frac{A \sin 2\alpha - 1}{B}. \end{aligned}$$ ∎

Proposition 119. *Die Geraden* $\hat{E}B_0(\omega^*)$, $\hat{E}A_2(\omega^*)$ *und* $\hat{E}B_2(\omega^*)$ *schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis. Die Gleichungen der Geraden sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1), \\ z \in \hat{E}B_2(\omega) &\iff z_1 \sin 3\alpha - z_2 \cos 3\alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1), \\ z \in \hat{I}A_2(\omega) &\iff z_1 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Ich wende (A7.2) an. Es gilt $\delta = \sin 2\alpha \neq 0$ und

$$\begin{aligned} &\Delta(\omega) \cdot B = \\ &\quad = (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha)(A(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1) \\ &\qquad\quad + \sin 2\alpha(A(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1) \\ &\quad = \sin 4\alpha(A \sin 2\alpha - 1) + (\sin 4\alpha - 2 \sin 2\alpha) A\omega \cos 2\alpha \\ &\quad = \sin 4\alpha((A \sin 2\alpha - 1) + (\cos 2\alpha - 1) A\omega) \\ &\quad = \sin 4\alpha((A \sin 2\alpha - 1) - 2 \sin^2 \alpha A\omega) = \sqrt{2} \sin \alpha \sin 4\alpha \cdot (\omega^* - \omega). \end{aligned}$$ ∎

Definition. Es sei

$$P' := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} (\tilde{I}A_{2m} \cup \tilde{I}B_{2m})[-\omega_d, \omega_d].$$

Aus der Proposition 68 folgt $P' \subset F_{\mathcal{K}}$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß $\pi(P')$ durch die gleichen Operationen wie P' aus $I_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ gebildet wird und $\pi|_{P'} : P' \to \pi(P')$ ein Homöomorphismus ist. Es sei $\hat{P}'$ durch die gleichen Operationen wie P' aus $\hat{I}_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ gebildet.

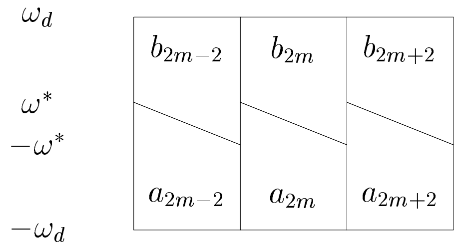


Abbildung 7. Die Seitenfläche von $\hat{P}'$ für $l = 1$.

Ich untersuche nun die kombinatorische Struktur des Randes von $\hat{P}'$. Dafür wende ich die Proposition (A7.6) mit $H^- = \hat{H}A_0$, $H^+ = \hat{H}B_0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = 2\alpha$ und mit $\omega_1 = -\omega_d$, $\omega^- = -\omega^*$, $\omega^\circ = 0$, $\omega^+ = \omega^*$, $\omega_2 = \omega_d$ an. In den Propositionen 117, 118 und 119 wurden die Voraussetzungen der Proposition (A7.6) überprüft. Die Kombinatorik der Seitenfläche von $\hat{P}'$ ist in der Abbildung dargestellt.

Ich zeige nun, daß $\hat{P}' \subset L$ gilt. Dafür genügt es zu zeigen, daß die Kanten von $\hat{P}'$ in L liegen. Aus der Beschreibung von $P'[0, \omega^*]$ unter Ausnutzung der Symmetrie ist klar, daß es ausreicht, die Kanten

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_2)[\omega^*, \omega_d], \quad (\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)[0, \omega^*] \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_2)[0, \omega^*]$$

zu betrachten. Es ist ferner klar, daß für $\omega \in [0, \omega^*]$ der Punkt $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)[0, \omega^*]$ im Dreieck mit den Ecken $0, (\hat{E}B_{-2} \cap \hat{E}A_0)(\omega), (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_2)(\omega)$ liegt. Damit genügt es zu zeigen, daß die Kanten $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_2)[\omega^*, \omega_d]$ und $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_2)[0, \omega^*]$ in L liegen.

Proposition 120. *Es gilt* $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega) \in L(\omega)$ *für alle* $\omega \in [0, \omega_d]$.

Beweis. Berechnet man den Schnittpunkt $z(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$, so sieht man, daß mit $\omega = \tan\vartheta$ und $0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, also $2\alpha \leqslant 2\alpha + \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$, gilt

$$\frac{|z(\omega)|}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{|A\sin(2\alpha+\vartheta) - \cos\vartheta|}{B\cos\alpha} \leqslant \frac{|A - \sin 2\alpha|}{B\cos\alpha} = \frac{|1 - \sqrt{2}\sin\alpha\sin 2\alpha|}{\cos\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Wegen $\sqrt{2}\cos\alpha \geqslant 1$ gilt $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \geqslant \sqrt{2}\sin\alpha$ und damit

$$\frac{|1 - \sqrt{2}\sin\alpha\sin 2\alpha|}{\cos\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}} \leqslant \frac{|1 - 2\sin^2\alpha|}{\cos\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}} = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha} < 1. \blacksquare$$

Proposition 121. *Für den Schnittpunkt* $z'(\omega)$ *der Geraden* $\hat{E}B_0(\omega)$ *und* $\hat{E}A_2(\omega)$ *gilt*

$$z'(\omega) = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B\sin\alpha} - i\omega \cdot \frac{A\cos 2\alpha}{B\cos\alpha}.$$

Beweis. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B} + \frac{A\cos 2\alpha}{B}\cdot\omega \\ z \in \hat{E}A_2(\omega) &\iff z_1\sin\alpha + z_2\cos\alpha = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B} - \frac{A\cos 2\alpha}{B}\cdot\omega \end{aligned}$$

läßt sich $z'(\omega)$ leicht ausrechnen. $\blacksquare$

Proposition 122. *Es gilt* $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_2)(\omega) \in L(\omega)$ *für alle* $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für den Schnittpunkt $z(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}A_2(\omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
&|\, z_1(\omega)\,| < 0{,}4 < 1 \quad \text{für } \alpha = \frac{\pi}{5},\\
&|\, z_1(\omega)\,| = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B\sin\alpha} = \frac{2\cos\alpha - \sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}} < 1 \quad \text{für } \alpha \leqslant \frac{\pi}{6},\\
&\left|\frac{z_2(\omega)}{\omega}\right| = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha} < 1.
\end{aligned}$$

Damit gilt $|z_1(\omega)| < 1$ und $|z_2(\omega)| < |\omega|$, also folgt $|z(\omega)| < \sqrt{1+\omega^2}$. ∎

Aus den Propositionen 120 und 122 folgt $\hat{P}' \subset L$ und damit $\pi(P') = \hat{P}' \cap L = \hat{P}'$. Ich untersuche jetzt die Lage von P' relativ zu Halbräumen $\tilde{I}A_{2m+1}$ und $\tilde{I}B_{2m+1}$, um mit Hilfe dieser Halbräume aus P' eine Teilmenge $P \subset P'$ zu konstruieren, so daß $\Psi(P)$ ein Fundamentalbereich ist.

Proposition 123. *Es gibt ein* $\omega_4 \in (\omega^*, \omega_d)$ *derart, daß sich die Geraden* $\hat{E}B_0(\omega_4)$, $\hat{E}B_1(\omega_4)$ *und* $\hat{E}B_2(\omega_4)$ *in einem Punkt schneiden. Es gilt* $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \hat{I}B_1(\omega)$ *für* $\omega \leqslant \omega_4$ *und* $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int}\hat{I}B_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_4$. *Es gilt ferner* $z^*(\omega) \notin \hat{I}B_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_4$ *für den Schnittpunkt* $z^*(\omega)$ *der Geraden* $\hat{E}B_0(\omega)$ *und* $\hat{E}B_2(\omega)$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff -z_1\sin\alpha + z_2\cos\alpha \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}B_2(\omega) &\iff -z_1\sin 3\alpha + z_2\cos 3\alpha \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff -z_1\sin 2\alpha + z_2\cos 2\alpha \geqslant -\frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1).
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.3) an. Es gilt

$$\delta_1 = \delta_2 = -\sin\alpha < 0, \quad \delta_3 = \sin 2\alpha > 0.$$

Es ist also zu zeigen, daß $\Delta(\omega^*) < 0$ und $\Delta(\omega_d) > 0$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega)\cdot S &= 2\sin\alpha\sqrt{2}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1) - \sin 2\alpha(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)\\
&= 2(1-\cos^2\alpha)(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 2\sin\alpha(\sqrt{2} - \cos\alpha)\\
&= 2\sin\alpha(\sin\alpha(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - (\sqrt{2} - \cos\alpha)).
\end{aligned}$$

Mit $\gamma = \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt $\Delta(\omega^*)\cdot S = -2\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\gamma^2 < 0$ und $\Delta(\omega_d)\cdot S = 2\tan\alpha\cdot\gamma^2 > 0$. ∎

Proposition 124. *Es gilt*

$$d(0, \hat{E}B_0(\omega_d)) = \frac{A - \sin 2\alpha}{B\sin 2\alpha} = \frac{1 - \sqrt{2}\sin\alpha\sin 2\alpha}{S\sin\alpha\sin 2\alpha}.$$

Beweis. Es gilt

$$z \in \hat{E}B_0(\omega_d) \iff z_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha = \frac{A - \sin 2\alpha}{B\sin 2\alpha},$$

$A\sqrt{2}\sin\alpha = 1$ und $1 - \sqrt{2}\sin\alpha\sin 2\alpha > 0$. ∎

Proposition 125. *Es gilt*

$$d(0,\hat{E}B_1(\omega_d)) = \frac{C-\sin 2\alpha}{S\sin 2\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha}{S\sin\alpha\sin 2\alpha}.$$

Beweis. Es gilt

$$z \in \hat{E}B_1(\omega_d) \iff z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha = \frac{C-\sin 2\alpha}{S\sin 2\alpha},$$

$C = \operatorname{ctg}\alpha$ und $\cos\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha > 0$. ∎

Proposition 126. *Es gilt* $d(0,\hat{E}B_0(\omega_d))\cdot\cos\alpha < d(0,\hat{E}B_1(\omega_d))$.

Beweis. Nach den Propositionen 124 und 125 ist die behauptete Ungleichung äquivalent zu

$$\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha\sin 2\alpha < \cos\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha,$$

also zu $\sqrt{2}\cos\alpha > 1$. ∎

Proposition 127. *Für* $\omega \in [\omega_4,\omega_d]$ *ist die Schicht* $\cap_{m\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_m(\omega)$ *das konvexe Polygon mit den Ecken* $(\hat{E}B_m\cap\hat{E}B_{m+1})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}B_m(\omega)$*, genauer gilt:*

$$(\hat{E}B_0\cap\hat{E}B_1)(\omega), (\hat{E}B_1\cap\hat{E}B_2)(\omega), \ldots, (\hat{E}B_{2p-1}\cap\hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{m-1}\cap\hat{E}B_m)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_m\cap\hat{E}B_{m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_m(\omega)$ *enthalten.*

Beweis. Die Schicht $\pi(P')(\omega) = \cap_{j\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_{2j}(\omega)$ ist das regelmäßige konvexe p-Eck mit den Ecken $(\hat{E}B_{2m}\cap\hat{E}B_{2m+2})(\omega)$ und den Kanten in $\hat{E}B_{2m}(\omega)$, genauer gilt:

$$(\hat{E}B_0\cap\hat{E}B_2)(\omega), (\hat{E}B_2\cap\hat{E}B_4)(\omega), \ldots, (\hat{E}B_{2p-2}\cap\hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m-2}\cap\hat{E}B_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m}\cap\hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ enthalten. Der Inkreisradius dieses Polygons ist gleich $d(0,\hat{E}B_0(\omega_d))$. Die Gerade $\hat{E}B_1(\omega)$ ist orthogonal zu der Winkelhalbierenden des zu der Ecke $(\hat{E}B_0\cap\hat{E}B_2)(\omega)$ gehörigen Winkels des Polygons $\cap_{j\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_{2j}(\omega)$. Nach der Proposition 126 gilt

$$d(0,\hat{E}B_0(\omega_d))\cos\alpha < d(0,\hat{E}B_1(\omega_d)).$$

Damit liegen die Schnittpunkte $(\hat{E}B_{-1}\cap\hat{E}B_0)(\omega_d)$ und $(\hat{E}B_2\cap\hat{E}B_3)(\omega_d)$ in $\hat{I}B_1(\omega_d)$. Nach der Proposition 123 liegt der Schnittpunkt $(\hat{E}B_0\cap\hat{E}B_2)(\omega_d)$ in $\hat{H}B_1(\omega_d)$. Die Punkte

$$\begin{aligned}
(\hat{E}B_{-1}\cap\hat{E}B_0)(\omega_4) &= (\hat{E}B_{-2}\cap\hat{E}B_0)(\omega_4),\\
(\hat{E}B_2\cap\hat{E}B_3)(\omega_4) &= (\hat{E}B_2\cap\hat{E}B_4)(\omega_4)\\
\text{und}\quad (\hat{E}B_0\cap\hat{E}B_2)(\omega_4)&
\end{aligned}$$

sind Ecken des regulären Polygons $(\cap_{j\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_{2j})(\omega_4)$. Wiederum nach der Proposition 123 gilt

$$(\cap_{j\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_{2j})(\omega_4) \subset (\hat{I}B_0\cap\hat{I}B_2)(\omega_4) \subset \hat{I}B_1(\omega_4).$$

Damit gilt:

Der Durchschnitt des Polygons $(\cap_{j\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_{2j})(\omega)$ mit der Halbebene $\hat{H}B_{2m+1}(\omega)$ ist das Dreieck $(\hat{I}B_{2m}\cap\hat{I}B_{2m+2}\cap\hat{H}B_{2m+1})(\omega)$, solche Dreiecke für $m\in\{0,\ldots,p-1\}$ schneiden sich nicht. Daraus ergibt sich die Beschreibung von $(\cap_{j\in\mathbb{Z}}\hat{I}B_j)(\omega)$. ∎

PROPOSITION 128. *Für den Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}A_1(\omega)$ und $\hat{E}B_1(\omega)$ gilt*

$$z''(\omega) = \frac{C\sin 2\alpha - 1}{S\sin 2\alpha} - i\omega \cdot \frac{C}{S}.$$

BEWEIS. Aus den Gleichungen

$$z \in \hat{E}A_1(\omega) \iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha = \frac{C\sin 2\alpha - 1}{S} - \frac{C\cos 2\alpha}{S} \cdot \omega$$
$$z \in \hat{E}B_1(\omega) \iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha = \frac{C\sin 2\alpha - 1}{S} + \frac{C\cos 2\alpha}{S} \cdot \omega$$

läßt sich $z''(\omega)$ leicht ausrechnen. ∎

PROPOSITION 129. *Für den Schnittpunkt $z^*(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ gilt*

$$z^*(\omega) = -ie^{2i\alpha} \cdot \frac{1}{B\cos\alpha} \cdot (A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1).$$

BEWEIS. Aus den Gleichungen der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ folgt

$$z_1^*(\omega)\sin\alpha - z_2^*(\omega)\cos\alpha = z_1^*(\omega)\sin 3\alpha - z_2^*(\omega)\cos 3\alpha = X(\omega)$$

mit $X(\omega) := \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)$. Daraus läßt sich $z^*(\omega)$ leicht ausrechnen

$$z_1^*(\omega) = \frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot X(\omega) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} \cdot X(\omega),$$
$$z_2^*(\omega) = \frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot X(\omega) = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \cdot X(\omega). \ ∎$$

PROPOSITION 130. *Die Geraden $\hat{E}B_0(\omega_1)$, $\hat{E}A_1(\omega_1)$ und $\hat{E}B_1(\omega_1)$ schneiden sich in einem Punkt.*

BEWEIS. In der Proposition 128 wurde der Schnittpunkt

$$z''(\omega) = \frac{C\sin 2\alpha - 1}{S\sin 2\alpha} - i\omega \cdot \frac{C}{S}$$

der Geraden $\hat{E}A_1(\omega)$ und $\hat{E}B_1(\omega)$ berechnet. Ich setze $z''(\omega)$ in die Gleichung

$$z_1 \sin\alpha - z_2\cos\alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)$$

der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ ein und erhalte dann mit $S = \sqrt{2} \cdot B$

$$\frac{C\sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha}\sin\alpha + C\cos\alpha \cdot \omega = \sqrt{2}(A\sin 2\alpha - 1) + A\sqrt{2}\cos 2\alpha \cdot \omega.$$

Wegen $C = \operatorname{ctg}\alpha$, $A\sqrt{2}\sin\alpha = 1$, $\gamma = \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A\sin 2\alpha - 1 = \gamma\sqrt{2}$ und $C\sin 2\alpha - 1 = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2})$ folgt

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin\alpha} \cdot \omega = 2\gamma - \frac{2\gamma(\gamma+\sqrt{2})}{2\cos\alpha}.$$

Wegen $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ und $2\cos\alpha = 2\gamma + \sqrt{2}$ folgt

$$\sin\alpha \cdot \omega = 2\gamma \cdot \frac{2\cos\alpha - (\gamma + \sqrt{2})}{2\cos\alpha} = \frac{2\gamma^2}{2\cos\alpha}$$

und damit

$$\omega = \frac{2\gamma^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\gamma^2}{\sin 2\alpha} = \omega_1. \ ∎$$

Proposition 131. *Die Geraden $\hat{E}B_0(\omega_2)$, $\hat{E}A_2(\omega_2)$ und $\hat{E}B_1(\omega_2)$ schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis. In der Proposition 121 wurde der Schnittpunkt

$$z'(\omega) = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B\sin\alpha} - i\omega\cdot\frac{A\cos 2\alpha}{B\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha - \sqrt{2}}{S\sin\alpha} - i\omega\cdot\frac{\cos 2\alpha}{S\sin\alpha\cos\alpha}$$

der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}A_2(\omega)$ ausgerechnet. Ich setze $z'(\omega)$ in die Gleichung

$$z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha = \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)$$

der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ ein und erhalte dann

$$\frac{2\cos\alpha - \sqrt{2}}{\sin\alpha}\sin 2\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cos 2\alpha\cdot\omega = (C\sin 2\alpha - 1) + C\cos 2\alpha\cdot\omega.$$

Wegen $C = \operatorname{ctg}\alpha$ und $C\sin 2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$ folgt

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot(\cos^2\alpha - \cos 2\alpha)\cdot\omega = 2\cos\alpha(2\cos\alpha - \sqrt{2}) - \cos 2\alpha.$$

Wegen $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\gamma = \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 2\alpha = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2})$ und $2\cos\alpha = 2\gamma + \sqrt{2}$ folgt

$$\frac{\cos 2\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\omega = 2\gamma(2\gamma + \sqrt{2}) - 2\gamma(\gamma + \sqrt{2}) = 2\gamma^2.$$

Damit gilt

$$\omega = \frac{2\gamma^2}{\tan\alpha\cos 2\alpha} = \omega_2. \blacksquare$$

Lemma 132. *Es gilt*

$$0 < \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B} < \frac{C\sin 2\alpha - 1}{S} < 2\cos\alpha\cdot\frac{A\sin 2\alpha - 1}{B}.$$

Beweis. Wegen $S = \sqrt{2}B$, $A\sin 2\alpha - 1 = \gamma\sqrt{2}$, $C\sin 2\alpha - 1 = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2})$ und $2\cos\alpha = 2\gamma + \sqrt{2}$ mit $\gamma = \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ ist die behauptete Ungleichungskette äquivalent zu

$$0 < \gamma < \gamma(\gamma + \sqrt{2}) < \gamma(2\gamma + \sqrt{2}). \blacksquare$$

Lemma 133. *Es gilt*

$$\frac{A\cos 2\alpha}{B\cos\alpha} < \frac{C}{S}.$$

Beweis. Wegen $S = \sqrt{2}B$, $A\sqrt{2}\sin\alpha = 1$, $C\sin\alpha = \cos\alpha$ ist die behauptete Ungleichung äquivalent zu $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} < \cos\alpha$. Dabei gilt $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha < \cos^2\alpha$. $\blacksquare$

Proposition 134. *Für die Spitzen $z'(\omega)$ bzw. $z''(\omega)$ der Sektoren $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ bzw. $(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ gilt*

$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}A_1(\omega)$ *und* $z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}A_2(\omega)$ *für* $\omega \geqslant 0$,
$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_2$ *und* $z'(\omega) \notin \hat{H}B_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_2$,
$z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_0(\omega)$ *für* $\omega < \omega_1$ *und* $z''(\omega) \notin \hat{I}B_0(\omega)$ *für* $\omega > \omega_1$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}A_2(\omega) &\iff z_1 \sin\alpha + z_2 \cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{H}A_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha \geqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{H}B_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \geqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1).
\end{aligned}$$

Nach den Propositionen 121 und 128 gilt

$$z'(\omega) = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B\sin\alpha} - i\omega\cdot\frac{A\cos 2\alpha}{B\cos\alpha}, \quad z''(\omega) = \frac{C\sin 2\alpha - 1}{S\sin 2\alpha} - i\omega\cdot\frac{C}{S}.$$

Es sei $\omega \geqslant 0$. Nach den Lemmata 132 und 133 gilt $0 < z_1''(\omega) < z_1'(\omega)$ und $z_2''(\omega) \leqslant z_2'(\omega) \leqslant 0$ und folglich

$$\begin{aligned}
&z_1'(\omega)\sin 2\alpha + z_2'(\omega)\cos 2\alpha > z_1''(\omega)\sin 2\alpha + z_2''(\omega)\cos 2\alpha,\\
&z_1''(\omega)\sin\alpha + z_2''(\omega)\cos\alpha < z_1'(\omega)\sin\alpha + z_2'(\omega)\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Aus $z''(\omega) \in \hat{E}A_1(\omega)$ und $z'(\omega) \in \hat{E}A_2(\omega)$ folgt damit $z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}A_1(\omega)$ und $z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}A_2(\omega)$. Für $\omega = 0$ gilt $0 < z_1''(0) < z_1'(0)$ und $z_2''(0) = z_2'(0) = 0$ und folglich

$$\begin{aligned}
&z_1'(0)\sin 2\alpha - z_2'(0)\cos 2\alpha > z_1''(0)\sin 2\alpha - z_2'(0)\cos 2\alpha,\\
&z_1''(0)\sin\alpha - z_2''(0)\cos\alpha < z_1'(0)\sin\alpha - z_2'(0)\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Aus $z''(0) \in \hat{E}B_1(0)$ und $z'(0) \in \hat{E}B_0(0)$ folgt damit $z'(0) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(0)$ und $z''(0) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_0(0)$. Nach der Proposition 131 gilt $z'(\omega_2) \in \hat{E}B_1(\omega_2)$. Aus $z'(0) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(0)$, $z'(\omega_2) \in \hat{E}B_1(\omega_2)$ und $\omega_2 > 0$ folgt $z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega)$ für $\omega < \omega_2$ und $z'(\omega) \notin \hat{H}B_1(\omega)$ für $\omega > \omega_2$. Nach der Proposition 130 gilt $z''(\omega_1) \in \hat{E}B_0(\omega_1)$. Aus $z''(0) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_0(0)$, $z''(\omega_1) \in \hat{E}B_0(\omega_1)$ und $\omega_1 > 0$ folgt $z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_0(\omega)$ für $\omega < \omega_1$ und $z''(\omega) \notin \hat{I}B_0(\omega)$ für $\omega > \omega_1$. ∎

Proposition 135. *Nach der Proposition 134 gilt für die Spitzen $z'(\omega)$ bzw. $z''(\omega)$ der Sektoren $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ bzw. $(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$*

$z'(\omega) \in (\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ *für* $\omega \in [0, \omega_2]$,
$z'(\omega) \in \operatorname{Int}(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ *für* $\omega \in [0, \omega_2)$,
$z''(\omega) \in (\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ *für* $\omega \in [0, \omega_1]$,
$z''(\omega) \in \operatorname{Int}(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ *für* $\omega \in [0, \omega_1)$. ∎

Proposition 136. *Für den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}A_0(\omega)$ und $\hat{E}B_0(\omega)$ gilt*

$$z'''(\omega) = \left(\frac{A\sin 2\alpha - 1}{B\sin 2\alpha} - i\omega\cdot\frac{A}{B}\right)\cdot e^{-i\alpha}.$$

Beweis. Die Gleichungen der Geraden sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}A_0(\omega) &\iff z_1\sin 3\alpha + z_2\cos 3\alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega\cos 2\alpha) - 1),\\ z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1).\end{aligned}$$

Die Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{i\alpha}$ von $\mathbb{C}$ überführt den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ in den Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha &= \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B} + \frac{A\cos 2\alpha}{B}\cdot\omega\\ z_1\sin 2\alpha + z_2\cos 2\alpha &= \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B} - \frac{A\cos 2\alpha}{B}\cdot\omega.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich leicht ausrechnen

$$z'''(\omega)e^{i\alpha} = \frac{A\sin 2\alpha - 1}{B\sin 2\alpha} - i\omega\cdot\frac{A}{B}. \blacksquare$$

Proposition 137. *Für den Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}A_1(\omega)$ und $\hat{E}B_1(\omega)$ und den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}A_0(\omega)$ und $\hat{E}B_0(\omega)$ gilt $|z'''(\omega)| < |z''(\omega)|$ für $\omega \in [0, \omega_1]$.*

Beweis. Nach der Proposition 136 gilt

$$|z'''(\omega)|^2 = \frac{1}{B^2}\cdot\left(\frac{(A\sin 2\alpha - 1)^2}{\sin^2 2\alpha} + A^2\cdot\omega^2\right).$$

Nach der Proposition 128 gilt

$$|z''(\omega)|^2 = \frac{1}{S^2}\cdot\left(\frac{(C\sin 2\alpha - 1)^2}{\sin^2 2\alpha} + C^2\cdot\omega^2\right).$$

Es sei $f(\omega) := |z''(\omega)|^2 - |z'''(\omega)|^2$. Wegen $\frac{1}{B^2} = \frac{2}{S^2}$, $C^2 - 2A^2 = \frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = -1$ und

$$\begin{aligned}(C\sin 2\alpha - 1)^2 - 2(A\sin 2\alpha - 1)^2 &= 4\gamma^2(\gamma + \sqrt{2})^2 - 4\gamma^2\\ &= 4\gamma^2(\gamma^2 + 2\sqrt{2}\gamma + 1)\end{aligned}$$

gilt

$$f(\omega) = \frac{1}{S^2\sin^2 2\alpha}\cdot\left(4\gamma^2(\gamma^2 + 2\sqrt{2}\gamma + 1) - \omega^2\sin^2 2\alpha\right).$$

Für $\omega \in [0, \omega_1]$ mit $\omega_1 = \frac{2\gamma^2}{\sin 2\alpha}$ gilt

$$f(\omega) \geqslant f(\omega_1) = \frac{1}{S^2\sin^2 2\alpha}\cdot\left(4\gamma^2(\gamma^2 + 2\sqrt{2}\gamma + 1) - 4\gamma^4\right) = \frac{4\gamma^2(2\sqrt{2}\gamma + 1)}{S^2\sin^2 2\alpha} > 0. \blacksquare$$

PROPOSITION 138. *Für $\omega \in [0, \omega_1]$ liegt der Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}A_1(\omega)$ und $\hat{E}B_1(\omega)$ außerhalb des regelmäßigen p-Ecks mit den Ecken $z'''(\omega)e^{2ij\alpha}$, $0 \leqslant j < p$, wobei $z'''(\omega)$ der Schnittpunkt der Geraden $\hat{E}A_0(\omega)$ und $\hat{E}B_0(\omega)$ ist.*

BEWEIS. Nach der Proposition 137 liegt der Punkt $z''(\omega)$ sogar außerhalb des dem Polygon umbeschriebenen Kreises. ∎

PROPOSITION 139. *Der Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}A_0(\omega)$ und $\hat{E}B_0(\omega)$ liegt in* Int $\hat{I}A_1(\omega)$ *für $\omega \geqslant 0$.*

BEWEIS. Die Gleichungen der Geraden und die Ungleichung der Halbebene sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}A_0(\omega) &\iff z_1 \sin 3\alpha + z_2 \cos 3\alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1), \\ z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha = \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1), \\ z \in \hat{I}A_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha + z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = -\sin 4\alpha < 0$. Es ist also zu zeigen, daß $\Delta(\omega) < 0$ für $\omega \geqslant 0$ gilt. Es gilt wegen $S = \sqrt{2}B$

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) \cdot S =& \sqrt{2} \sin 3\alpha (A(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1) \\ & - \sin 4\alpha (C(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - 1) \\ & - \sqrt{2} \sin \alpha (A(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1) \end{aligned}$$

und wegen $C \sin \alpha = \cos \alpha$ und $A\sqrt{2} \sin \alpha = 1$

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) \cdot S \sin \alpha =& (\sin 3\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha)(\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) \\ & - \sin \alpha (\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) \\ & + \sin \alpha (\sin 4\alpha + \sqrt{2}(\sin \alpha - \sin 3\alpha)). \end{aligned}$$

Wegen $\sin 3\alpha = \sin(4\alpha - \alpha) = \sin 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 4\alpha$, $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha$ und $\sin \alpha - \sin 3\alpha = -2 \sin \alpha \cos 2\alpha$ folgt

$$\Delta(\omega) \cdot S = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \gamma - \cos 4\alpha (\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) - (\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha).$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \cos 4\alpha (\sin 2\alpha - \omega \cos 2\alpha) + (\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) \\ & \quad = \sin 2\alpha (\cos 4\alpha + 1) + \omega \cos 2\alpha (1 - \cos 4\alpha) \\ & \quad = \sin 2\alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha + \omega \cos 2\alpha \cdot 2 \sin^2 2\alpha \\ & \quad = 4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha (\omega \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

folgt

$$\Delta(\omega) \cdot S = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha (\gamma - \cos \alpha (\omega \sin 2\alpha + \cos 2\alpha)).$$

Für $\omega \geqslant 0$ gilt also mit $\gamma = \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$ wegen

$$\sqrt{2} \cos \alpha = \sqrt{2}\gamma + 1 \quad \text{und} \quad \cos 2\alpha = 2\gamma(\gamma + \sqrt{2}),$$

daß

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\omega) \cdot S}{4 \sin \alpha \cos 2\alpha} \leqslant \frac{\Delta(0) \cdot S}{4 \sin \alpha \cos 2\alpha} &= \gamma - \sqrt{2}\gamma(\gamma + \sqrt{2})(\sqrt{2}\gamma + 1) \\ &= -\gamma(2\gamma^2 + 3\sqrt{2}\gamma + 1) \end{aligned}$$

negativ ist. ∎

PROPOSITION 140. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega_1)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega_1)$.

BEWEIS. Nach der Proposition 130 schneiden sich die Geraden $\hat{E}B_0(\omega_1)$, $\hat{E}A_1(\omega_1)$ und $\hat{E}B_1(\omega_1)$ in einem Punkt. Nach der Proposition 135 liegt die Spitze $z'(\omega_1)$ des Sektors $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega_1)$ in $\operatorname{Int}(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega_1)$. Damit gilt

$$z'(\omega_1) \in \operatorname{Int}(\hat{E}B_0 \cap \hat{H}A_1)(\omega_1) = \operatorname{Int}(\hat{E}B_0 \cap \hat{H}B_1)(\omega_1),$$
$$\operatorname{Int}(\hat{E}B_0 \cap \hat{I}A_1)(\omega_1) = \operatorname{Int}(\hat{E}B_0 \cap \hat{I}B_1)(\omega_1).$$

Nach der Proposition 139 liegt der Schnittpunkt $z'''(\omega_1)$ der Geraden $\hat{E}A_0(\omega_1)$ und $\hat{E}B_0(\omega_1)$ in $\operatorname{Int} \hat{I}A_1(\omega_1)$ und damit auch in $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega_1)$. ∎

PROPOSITION 141. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega^*)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega^*)$.

BEWEIS. Der Punkt $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega^*) = (\hat{E}B_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega^*)$ ist eine Ecke des Polygons $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \hat{I}B_{2m}(\omega^*)$. Nach der Proposition 123 gilt

$$(\cap_{j\in\mathbb{Z}} \hat{I}B_{2j})(\omega^*) \subset (\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*) \subset \hat{I}B_1(\omega^*). \blacksquare$$

PROPOSITION 142. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$ *für alle* ω *aus dem Intervall* $[\omega_1, \omega^*]$.

BEWEIS. Nach den Propositionen 140 und 141 gilt die Behauptung für $\omega = \omega_1$ und für $\omega = \omega^*$, also auch für alle $\omega \in [\omega_1, \omega^*]$. ∎

PROPOSITION 143. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}A_2 \cap \hat{E}B_2)(0)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(0)$.

BEWEIS. Die Ungleichung der Halbebene $\hat{I}B_1(0)$ ist

$$z \in \hat{I}B_1(0) \iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{C \sin 2\alpha - 1}{S}.$$

Für den Schnittpunkt $\zeta = z'''(0)e^{2i\alpha}$ der Geraden $\hat{E}A_2(0)$ und $\hat{E}B_2(0)$ gilt nach der Proposition 136

$$\zeta = z'''(0)e^{2i\alpha} = \frac{A \sin 2\alpha - 1}{B \sin 2\alpha} \cdot e^{i\alpha}.$$

Damit gilt nach dem Lemma 132

$$\zeta_1 < |\zeta| = \frac{A \sin 2\alpha - 1}{B \sin 2\alpha} < \frac{C \sin 2\alpha - 1}{S \sin 2\alpha} \quad \text{und} \quad \zeta_2 > 0.$$

Also gilt

$$\zeta_1 \sin 2\alpha - \zeta_2 \cos 2\alpha < \frac{C \sin 2\alpha - 1}{S}$$

und damit $\zeta \in \operatorname{Int} \hat{I}B_1(0)$. ∎

PROPOSITION 144. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}A_2 \cap \hat{E}B_2)(\omega^*)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega^*)$.

BEWEIS. Nach der Proposition 119 schneiden sich die Geraden $\hat{E}B_0(\omega^*)$, $\hat{E}A_2(\omega^*)$ und $\hat{E}B_2(\omega^*)$ in einem Punkt. Nach der Proposition 123 ist $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*)$ in $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega^*)$ enthalten. Damit gilt

$$(\hat{E}A_2 \cap \hat{E}B_2)(\omega^*) = (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega^*) \subset (\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*) \subset \operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega^*). \blacksquare$$

Proposition 145. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}A_2 \cap \hat{E}B_2)(\omega)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$ *für alle* ω *aus dem Intervall* $[0, \omega^*]$.

Beweis. Nach den Propositionen 143 und 144 gilt die Behauptung für $\omega = 0$ und für $\omega = \omega^*$, also auch für alle $\omega \in [0, \omega^*]$. ∎

Proposition 146. *Für* $\omega \in [0, \omega_1]$ *ist die Schicht*

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}A_{2m} \cup \hat{I}B_{2m})(\omega) - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cap \operatorname{Int} \hat{H}A_{2m+1} \cap \operatorname{Int} \hat{H}B_{2m+1} \cap \hat{I}A_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}A_m \cap \hat{E}B_m)(\omega)$ *und* $(\hat{E}B_m \cap \hat{E}A_{m+1})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}A_m(\omega)$ *und* $\hat{E}B_m(\omega)$*, genauer gilt:*

$$(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega), (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_1)(\omega), (\hat{E}A_1 \cap \hat{E}B_1)(\omega),$$
$$(\hat{E}B_1 \cap \hat{E}A_2)(\omega), \dots, (\hat{E}B_{2p-1} \cap \hat{E}A_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{m-1} \cap \hat{E}A_m)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}A_m \cap \hat{E}B_m)(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}A_m(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}A_m \cap \hat{E}B_m)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_m \cap \hat{E}A_{m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_m(\omega)$ *enthalten.*

Für $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ *ist die Schicht*

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}A_{2m} \cup \hat{I}B_{2m})(\omega) - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cap \operatorname{Int} \hat{H}B_{2m+1} \cap \hat{I}A_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}A_{2m} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega)$, $(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+1})(\omega)$ *und* $(\hat{E}B_{2m+1} \cap \hat{E}A_{2m+2})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}B_{2m}(\omega)$, $\hat{E}B_{2m+1}(\omega)$ *und* $\hat{E}A_{2m+2}(\omega)$*, genauer gilt:*

$$(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega), (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega), (\hat{E}B_1 \cap \hat{E}A_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}A_2 \cap \hat{E}B_2)(\omega), \dots, (\hat{E}B_{2p-1} \cap \hat{E}A_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}A_{2m} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+1})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m+1} \cap \hat{E}A_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m+1}(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}B_{2m+1} \cap \hat{E}A_{2m+2})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}A_{2m+2} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}A_{2m+2}(\omega)$ *enthalten.*

Beweis. Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}A_{2m} \cup \hat{I}B_{2m})(\omega)$$

für $\omega \in [0,\omega^*]$ ist das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}A_{2m} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega)$ und $(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}A_{2m+2})(\omega)$ und den Kanten in $\hat{E}A_{2m}(\omega)$ und $\hat{E}B_{2m}(\omega)$, genauer gilt:

$$(\hat{E}A_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega), (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_2)(\omega), (\hat{E}A_2 \cap \hat{E}B_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}A_4)(\omega), \ldots, (\hat{E}B_{2p-2} \cap \hat{E}A_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m-2} \cap \hat{E}A_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}A_{2m} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}A_{2m}(\omega)$ enthalten, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}A_{2m} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}A_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ enthalten.

Ich bezeichne die Spitze des Sektors $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ durch $z'(\omega)$, die Spitze des Sektors $(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ durch $z''(\omega)$ und die Spitze des Sektors $(\hat{H}A_0 \cap \hat{H}B_0)(\omega)$ durch $z'''(\omega)$.

Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}A_{2m} \cup \hat{I}B_{2m})(\omega)$$

für $\omega \in [0,\omega^*]$ kann auch beschrieben werden als die Vereinigung des regelmäßigen p-Ecks $\Pi(\omega)$ mit den Ecken $z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha}, \ldots, z'''(\omega)e^{(2p-2)i\alpha}$ mit den p Dreiecken, die unter der Anwendung der Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{2i\alpha}$ aus dem Dreieck $\Delta(\omega)$ mit den Ecken $z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha}, z'(\omega)$ entstehen.

Es sei $\omega \in [0,\omega_1]$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und des Sektors $(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ mit Spitze im Punkte $z''(\omega)$. Nach der Proposition 135 liegt der Punkt $z''(\omega)$ im Sektor $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$, nach der Proposition 138 liegt der Punkt $z''(\omega)$ außerhalb des regelmäßigen p-Ecks $\Pi(\omega)$, also liegt die Spitze $z''(\omega)$ des Sektors $(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ im Dreieck $\Delta(\omega)$. Nach den Propositionen 135, 139 und 145

$$z'(\omega) \in (\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega), \quad z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha} \notin (\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$$

Damit ist der Durchschnitt des Sektors $(\hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Viereck $(\hat{I}B_0 \cap \hat{H}A_1 \cap \hat{H}B_1 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ mit den Ecken $z'(\omega)$, $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}A_1)(\omega)$, $z''(\omega)$ und $(\hat{E}B_1 \cap \hat{E}A_2)(\omega)$.

Es sei $\omega \in [\omega_1,\omega_2]$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und der Halbebene $\hat{H}B_1(\omega)$. Nach den Propositionen 134, 142 und 145 gilt

$$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega), \quad z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha} \notin \hat{H}B_1(\omega).$$

Damit ist der Durchschnitt der Halbebene $\hat{H}B_1(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Dreieck $(\hat{I}B_0 \cap \hat{H}B_1 \cap \hat{I}A_2)(\omega)$ mit den Ecken

$$z'(\omega), \quad (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_1 \cap \hat{E}A_2)(\omega). \blacksquare$$

Definition. Es sei $P = P[-\omega_d, \omega_d]$ und

$$\begin{aligned}
P[0,\omega_1] &= P'[0,\omega_1] - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cap \tilde{H}A^\circ_{2m+1} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}A_{2m+2})[0,\omega_1] \\
&= \left(\begin{array}{l} \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}A_{2m} \cup \tilde{I}B_{2m}) \\ \qquad - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cap \tilde{H}A^\circ_{2m+1} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}A_{2m+2}) \end{array} \right)[0,\omega_1], \\
P[\omega_1,\omega_2] &= P'[\omega_1,\omega_2] - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}A_{2m+2})[\omega_1,\omega_2] \\
&= \left(\begin{array}{l} \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}A_{2m} \cup \tilde{I}B_{2m}) \\ \qquad - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}A_{2m+2}) \end{array} \right)[\omega_1,\omega_2], \\
P[\omega_2,\omega_3] &= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}A_{2m} \cup \tilde{I}B_{2m})[\omega_2,\omega_3], \\
P[\omega_3,\omega_4] &= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \tilde{I}B_{2m}[\omega_3,\omega_4], \\
P[\omega_4,\omega_d] &= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \tilde{I}B_{m}[\omega_4,\omega_d], \\
P[-\omega_d,0] &= \eta(P[0,\omega_d]).
\end{aligned}$$

Es gilt $\pi(P) \subset \pi(P') = \hat{P}' \subset L$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß $\pi(P)$ durch die gleichen Operationen wie P aus $I_{m,j}$ und $H_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ und $\tilde{H}_{m,j}$ gebildet wird und $\pi|_P : P \to \pi(P)$ ein Homöomorphismus ist. Es sei $\hat{P}$ durch die gleichen Operationen wie P aus $\hat{I}_{m,j}$ und $\hat{H}_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ und $\tilde{H}_{m,j}$ gebildet. Aus $\hat{P}' = \pi(P')$ folgt $\pi(P) = \hat{P}$. Aus der Beschreibung von P' und den Propositionen 127 und 146 ergibt sich eine Bescheibung von P. Betrachtet man die Schichten $\pi(P)(\omega)$ genauer, so sieht man, daß die Seitenflächen der Stücke $P[-\omega_d, 0]$, $P[0,\omega_1]$, $P[\omega_i,\omega_{i+1}]$ mit $i \in \{1,2,3\}$ und $P[\omega_4,\omega_d]$ so zusammenpassen, daß P keine horizontalen in den Ebenen $\{\omega = 0\}$ bzw. $\{\omega = \omega_i\}$ mit $i \in \{1,2,3,4\}$ enthaltenen Kanten hat. Die Kombinatorik der Seitenfläche von P ist in der Abbildung dargestellt, wobei a_n für ungerades n zu den beiden unteren Dreiecken und b_n zu den beiden oberen Dreiecken gehört.

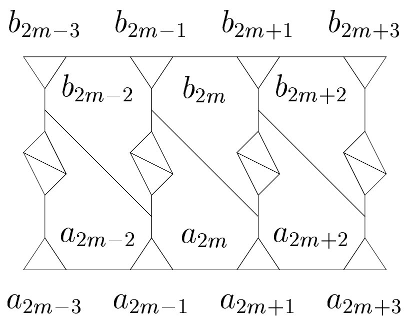


Abbildung 8. Die Seitenfläche von P für $l = 1$.

Proposition 147. *Nach der Proposition* 113 *gilt* $a_m^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(b_m)$, $b_m^{-1} = \tilde{\rho}^2(a_m)$, $a_m r_d = b_m$, $b_m r_d^{-1} = a_m$, $r_d^{-1} b_m = \tilde{\rho}^4(a_m)$, $r_d a_m = \tilde{\rho}^{-4}(b_m)$ *und*

$$\begin{aligned} a_{2m}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+2})a_{2m-1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+1})a_{2m-2}^{-1} \\ &= \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m-1})a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m-2})a_{2m+1}^{-1}, \end{aligned}$$

$$a_{2m+1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m})a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+2})a_{2m}^{-1}. \blacksquare$$

Satz 148. $\Psi(P)$ *ist ein Fundamentalbereich für die Operation von* $\tilde{\Gamma}$ *auf* $\tilde{G}$.

Beweis. Um den Satz 55 anzuwenden, beschreibe ich die Identifikationen am Rande von P unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$

$$\begin{aligned} &(r_d; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^4(r_d^{-1}; a_m), \\ &(a_{2m}; r_d^{-1}, a_{2m-1}, a_{2m-2}, b_{2m-2}, a_{2m-1}, b_{2m-1}, b_{2m-2}, b_{2m}, a_{2m+2}, a_{2m+1}) \mapsto \\ &\qquad \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m}; a_{2m}, a_{2m+2}, a_{2m+1}, b_{2m+1}, a_{2m+2}, b_{2m+2}, b_{2m+1}, r_d, b_{2m-1}, b_{2m-2}), \\ &(a_{2m+1}; r_d^{-1}, a_{2m}, a_{2m+2}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m+1}; a_{2m+1}, a_{2m+2}, b_{2m}), \\ &(a_{2m+1}; b_{2m+1}, a_{2m+2}, b_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m+1}; r_d, b_{2m}, b_{2m+2}) \end{aligned}$$

(Dabei gibt es jeweils zwei verschiedene Kanten, die in $\tilde{E}A_{2m} \cap \tilde{E}B_{2m-2} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ bzw. $\tilde{E}B_{2m} \cap \tilde{E}A_{2m+2} \cap \tilde{E}_{\tilde{e}}$ enthalten sind) und die Kantenzyklen

$$\begin{aligned} &(a_{2m}; a_{2m-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-1}(a_{2m}; b_{2m-2}) \mapsto \tilde{\rho}^{-3}(b_{2m+1}; b_{2m}), \\ &(a_{2m}; a_{2m-2}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+1}; b_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{-3}(b_{2m}; b_{2m-1}), \\ &(a_{2m}; b_{2m-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-1}(b_{2m}; b_{2m-2}) \mapsto \tilde{\rho}^{1}(a_{2m+1}; a_{2m}), \\ &(a_m; r_d^{-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(a_m; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{-4}(r_d; b_m). \end{aligned}$$

Die ersten drei Zykel sind vom Typ $\aleph$, der vierte Zykel ist vom Typ $\beth$. $\blacksquare$

Bemerkung. Es bleibt zu zeigen, daß $P = F_{\tilde{e}}$ gilt. Dafür sollte man zeigen, daß $F_{\mathcal{E}} \subset P$ gilt. Ich kann zeigen, daß für $\omega \leqslant \omega_d$

$$(\hat{H}B_0 \cap \hat{I}C_0)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}B_2(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{H}B_1 \cap \hat{I}C_1)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}B_2(\omega)$$

gilt. Daraus kann man folgern, daß eine der Zusammenhangskomponenten von $F_{\mathcal{E}}$ gleich P ist. Ist $F_{\tilde{e}}$ zusammenhängend und gilt $\tilde{e} \in F_{\tilde{e}}$, so folgt daraus direkt $F_{\tilde{e}} = P$.

§23. Fall $\Gamma(2k+4, 4, 2)^k$

Notation. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{4} - \alpha$ und

$$\omega_d = \tan \vartheta_d = \frac{1 - \cos 2\vartheta_d}{\sin 2\vartheta_d}.$$

Proposition 149. *Es gilt* $\sin 2\alpha + \omega_d \cos 2\alpha = 1$. *Wegen* $2\vartheta_d = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ *gilt*

$$\sin 2\vartheta_d = \cos 2\alpha \quad \textit{und} \quad \cos 2\vartheta_d = \sin 2\alpha.$$

Damit folgt $\omega_d = \frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$. *Nach (A1.9) gilt*

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\vartheta_d, \quad \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\vartheta_d$$

und

$$\sin 2\alpha = 1 - 2\sin^2\vartheta_d = 2\cos^2\vartheta_d - 1.$$

Nach (A1.10) gilt $C = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1+\sin 2\vartheta_d}{\cos 2\vartheta_d} = \frac{\cos 2\vartheta_d}{1-\sin 2\vartheta_d}$. $\blacksquare$

Notation. Es gilt $a_m = f_{m,-2}$, $b_m = f_{m,0}$ und $c_m = f_{m,2}$.

Ungleichungen.

$$
\begin{aligned}
z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A-1),\\
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}B_2(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A-1),\\
z \in \hat{I}C_2(\omega) &\iff z_1 \sin 3\alpha - z_2 \cos 3\alpha \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),\\
z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1 \leqslant \frac{1}{S}(C-1),\\
z \in \hat{I}C_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1),
\end{aligned}
$$

Proposition 150. *Es gilt $0 \notin (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$ und $0 \notin (HB_0 \cap HC_0)(\omega)$.*

Beweis. Die Ungleichung der Halbebene ist

$$
z \in \hat{H}B_0(\omega) \iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha \geqslant \frac{A-1}{B}.
$$

Aus $0 \in (HA_0 \cap HB_0)(\omega)$ bzw. $0 \in (HB_0 \cap HC_0)(\omega)$ würde also $A - 1 \leqslant 0$ folgen. ■

Proposition 151. *Die Winkelhalbierende des Sektors $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(\omega_d)$ geht durch den Koordinatenursprung.*

Beweis. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}B_0(\omega_d)$ und $H^+ = \hat{H}C_0(\omega_d)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$
\begin{aligned}
z \in \hat{H}B_0(\omega_d) &\iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha \geqslant \frac{A-1}{B},\\
z \in \hat{H}C_0(\omega_d) &\iff z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha \geqslant \frac{A-1}{B}. \ ■
\end{aligned}
$$

Proposition 152. *Die Geraden $\hat{E}B_0(\omega^*)$, $\hat{E}C_0(\omega^*)$ und $\hat{E}B_2(\omega^*)$ mit*

$$
\omega_1 = \omega^* := \frac{1-\cos\vartheta_d}{\cos\vartheta_d} \cdot \tan\alpha = \tan\alpha \tan\frac{\vartheta_d}{2} \cdot \omega_d \in (0, \omega_d)
$$

schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Die Gleichungen der Geraden sind

$$
\begin{aligned}
z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B},\\
z \in \hat{E}B_2(\omega) &\iff z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B},\\
z \in \hat{E}C_0(\omega) &\iff z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha = \frac{A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{B}.
\end{aligned}
$$

Ich wende (A7.2) an. Es gilt $\delta = \sin 2\alpha > 0$ und

$$\begin{aligned}\Delta(\omega)\cdot B &= (\cos 2\alpha - 1)(A-1) + \sin 2\alpha(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)\\ &= -2\sin\alpha\Big(\sin\alpha(A-1) - \cos\alpha(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)\Big).\end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned}&\sin\alpha(A-1) - \cos\alpha(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)\\ &\quad = A(\sin\alpha(1-2\cos^2\alpha) - \omega\cos\alpha\cos 2\alpha) + (\cos\alpha - \sin\alpha)\\ &\quad = -A\cos 2\alpha(\sin\alpha + \omega\cos\alpha) + \sqrt{2}\sin\vartheta_d\\ &\quad = \cos\alpha\cos 2\alpha A\cdot(\omega^* - \omega)\end{aligned}$$

mit

$$\omega^* = -\tan\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\vartheta_d}{A\cos\alpha\cos 2\alpha}.$$

Wegen $\frac{1}{A} = \sqrt{2}\sin\alpha$ und $\cos 2\alpha = \sin 2\vartheta_d$ gilt

$$\frac{\sqrt{2}\sin\vartheta_d}{A\cos\alpha\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\sin\vartheta_d}{\cos\alpha\sin 2\vartheta_d} = \frac{2\sin\vartheta_d\tan\alpha}{2\sin\vartheta_d\cos\vartheta_d} = \frac{\tan\alpha}{\cos\vartheta_d}$$

und damit

$$\omega^* = \tan\alpha\cdot\frac{1-\cos\vartheta_d}{\cos\vartheta_d} = \tan\alpha\cdot\frac{1-\cos\vartheta_d}{\sin\vartheta_d}\cdot\tan\vartheta_d = \tan\alpha\cdot\tan\frac{\vartheta_d}{2}\cdot\omega_d. \blacksquare$$

Definition. Es sei

$$P' := \left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}}(\tilde{I}A_{2m}\cup\tilde{I}B_{2m})[-\omega_d,0]\right)\cup\left(\bigcap_{m\in\mathbb{Z}}(\tilde{I}B_{2m}\cup\tilde{I}C_{2m})[0,\omega_d]\right).$$

Aus der Proposition 68 folgt $P'\subset F_{\mathcal{K}}$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß $\pi(P')$ durch die gleichen Operationen wie P' aus $I_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ gebildet wird und $\pi|_{P'}: P'\to\pi(P')$ ein Homöomorphismus ist. Es sei $\hat{P}'$ durch die gleichen Operationen wie P' aus $\hat{I}_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ gebildet.

Ich untersuche nun die kombinatorische Struktur des Randes von $\hat{P}'$. Um $\hat{P}[0,\omega_d]$ zu beschreiben, wende ich (A7.6) mit $H^- = \hat{H}B_0$, $H^+ = \hat{H}C_0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = \frac{\pi}{4} + \alpha$ und mit $\omega_1 = 0$, $\omega^- = \omega^*$, $\omega^\circ = \omega_d$ an. In den Propositionen 150, 151 und 102 wurden die Voraussetzungen von (A7.6) überprüft. Ferner entsteht $\hat{P}'[-\omega_d,0]$ aus $\hat{P}'[0,\omega_d]$ durch Anwendung der von $\tilde{\eta}$ induzierten Isometrie von S_e. Die Kombinatorik der Seitenfläche von $\hat{P}'$ ist in der Abbildung dargestellt. Nach der Proposition 112 gilt $\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) < 1$. Nach Satz 48 folgt $\hat{P}'\subset L$ und damit $\pi(P') = \hat{P}'\cap L = \hat{P}'$. Ich untersuche jetzt die Lage von P' relativ zu Halbräumen $\tilde{I}A_{2m+1}$, $\tilde{I}B_{2m+1}$ und $\tilde{I}C_{2m+1}$, um mit Hilfe dieser Halbräume aus P' eine Teilmenge $P\subset P'$ zu konstruieren, so daß $\Psi(P)$ ein Fundamentalbereich ist.

Proposition 153. *Für den Schnittpunkt $z(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ gilt*

$$z(\omega) = \frac{A-1}{B\cos\alpha}.$$

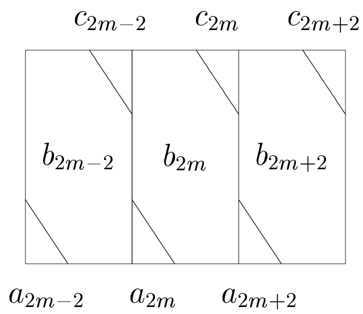


Abbildung 9. Die Seitenfläche von $\hat{P}'$ für $l = 2$.

Beweis. Aus den Gleichungen

$$z \in \hat{E}B_0(\omega) \iff z_1 \cos\alpha - z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B}$$
$$z \in \hat{E}B_2(\omega) \iff z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B}$$

läßt sich $z(\omega)$ leicht ausrechnen. ∎

Notation. Es sei $\omega_2 := \tan\frac{\vartheta_d}{2}$. Es gilt

$$\omega_2 = \tan\frac{\vartheta_d}{2} = \frac{1-\cos\vartheta_d}{\sin\vartheta_d} = \frac{\sin\vartheta_d}{1+\cos\vartheta_d}$$

und

$$\cos 2\vartheta_d + \omega_2 \sin 2\vartheta_d = \frac{\cos\frac{3\vartheta_d}{2}}{\cos\frac{\vartheta_d}{2}} = 2\cos\vartheta_d - 1.$$

Proposition 154. *Es gilt* $0 < \omega_1 = \omega^* < \omega_2 < \omega_d$. ∎

Proposition 155. *Es sei $z'(\omega)$ der Schnittpunkt der Geraden $\hat{E}C_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$. Dann gilt*

$$z_2'(\omega) = \frac{1}{S}(2\sin^2\vartheta_d \cdot \omega_2 - \omega \cdot C \sin 2\vartheta_d),$$

die Funktion $z_1'(\omega)$ ist streng monoton wachsend, die Funktion $z_2'(\omega)$ ist streng monoton fallend, es gilt $\zeta_1 \leqslant z_1'(\omega)$ für $\zeta \in (\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$. Es gilt ferner

$$z'(\omega_2) = \frac{(C-1) + i(2\sin^2\vartheta_d - C\sin 2\vartheta_d)\omega_2}{S}, \quad z'(\omega_d) = \frac{2(A-1)}{S} \cdot e^{-i\vartheta_d}.$$

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$z \in \hat{I}C_0(\omega) \iff z_1 \sin\alpha - z_2 \cos\alpha \leqslant X(\omega),$$
$$z \in \hat{I}B_2(\omega) \iff z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha \leqslant Y(\omega)$$

mit

$$X(\omega) := \frac{A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{B} = \frac{A(\cos 2\vartheta_d + \omega \sin 2\vartheta_d) - 1}{B}$$

und

$$Y(\omega) := \frac{A-1}{B} > 0.$$

Damit gilt

$$z'(\omega) = (X(\omega)\sin\alpha + Y(\omega)\cos\alpha) + i\,(Y(\omega)\sin\alpha - X(\omega)\cos\alpha),$$

die Funktion $z_1'(\omega) = X(\omega)\sin\alpha + Y(\omega)\cos\alpha$ ist monoton wachsend und es gilt

$$\begin{aligned} z_2'(\omega) &= Y(\omega)\sin\alpha - X(\omega)\cos\alpha \\ &= \frac{1}{B}((A-1)\sin\alpha - (A(\cos 2\vartheta_d + \omega\sin 2\vartheta_d) - 1)\cos\alpha) \\ &= \frac{1}{B}((\cos\alpha - \sin\alpha) - A((\cos\alpha\cos 2\vartheta_d - \sin\alpha) + \omega\cos\alpha\sin 2\vartheta_d)). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha + 2\vartheta_d) = \cos\alpha\cos 2\vartheta_d - \sin\alpha\sin 2\vartheta_d, \\ &\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\vartheta_d \quad \text{und} \quad S = \sqrt{2}B \end{aligned}$$

gilt

$$z_2'(\omega) = \frac{1}{S}(2\sin\vartheta_d - A\sqrt{2}\sin 2\vartheta_d(\sin\alpha + \omega\cos\alpha)).$$

Wegen $\sin\alpha + \omega\cos\alpha = \sin\alpha(1+\omega C)$ und $A\sqrt{2}\sin\alpha = 1$ gilt

$$z_2'(\omega) = \frac{1}{S}(2\sin\vartheta_d - \sin 2\vartheta_d(1+\omega C)).$$

Wegen $2\sin\vartheta_d - \sin 2\vartheta_d = 2\sin\vartheta_d(1-\cos\vartheta_d) = 2\sin^2\vartheta_d \cdot \omega_2$ gilt

$$z_2'(\omega) = \frac{1}{S}(2\sin^2\vartheta_d \cdot \omega_2 - \omega \cdot C\sin 2\vartheta_d).$$

Für $\zeta \in (\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (\zeta_1\sin\alpha - \zeta_2\cos\alpha)\sin\alpha + (\zeta_1\cos\alpha + \zeta_2\sin\alpha)\cos\alpha \\ &\leqslant X(\omega)\sin\alpha + Y(\omega)\cos\alpha = z_1'(\omega). \end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_2$ gilt $\cos 2\vartheta_d + \omega_2\sin 2\vartheta_d = 2\cos\vartheta_d - 1$ und damit

$$X(\omega_2) = \frac{A(\cos 2\vartheta_d + \omega_2\sin 2\vartheta_d) - 1}{B} = \frac{A(2\cos\vartheta_d - 1) - 1}{B}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} &(C-1)\sin\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha, \\ &\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\vartheta_d, \\ &A\sqrt{2}\sin\alpha = 1 \quad \text{und} \quad S = \sqrt{2}B \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} z_1'(\omega_2) &= X(\omega_2)\sin\alpha + Y(\omega_2)\cos\alpha \\ &= \frac{2A\cos\vartheta_d\sin\alpha + A(\cos\alpha - \sin\alpha) - (\sin\alpha + \cos\alpha)}{B} \\ &= \frac{2\cos\vartheta_d + (C-1) - 2\cos\vartheta_d}{S} = \frac{C-1}{S}. \end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$z_2'(\omega_2) = \frac{2\sin^2\vartheta_d - \sin 2\vartheta_d C}{S} \cdot \omega_2.$$

Für $\omega = \omega_d$ gilt $\cos 2\vartheta_d + \omega_d \sin 2\vartheta_d = 1$ und damit

$$X(\omega_d) = \frac{A(\cos 2\vartheta_d + \omega_d \sin 2\vartheta_d) - 1}{B} = \frac{A-1}{B} = Y(\omega_d).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\frac{z'(\omega_d)}{A-1} &= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha) + i\,(\sin\alpha - \cos\alpha)}{B} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\cos\vartheta_d - i\sin\vartheta_d)}{B} = \frac{\sqrt{2}}{B} \cdot e^{-i\vartheta_d} = \frac{2}{S} \cdot e^{-i\vartheta_d}. \;\blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION 156. *Für den Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ gilt*

$$z''(\omega) = \frac{(C-1) + i(\omega_d - C\omega)}{S}.$$

Es gilt außerdem

$$z''(\omega_d) = \frac{C-1}{S\cos\vartheta_d} \cdot e^{-i\vartheta_d}.$$

BEWEIS. Aus den Gleichungen der Geraden

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}B_1(\omega) &\iff z_1 = \frac{C-1}{S} \\ z \in \hat{E}C_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha = \frac{C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{S}\end{aligned}$$

folgt $z_1''(\omega) = \frac{1}{S}(C-1)$ und wegen $1 - \sin 2\alpha = \omega_d \cos 2\alpha$

$$\begin{aligned} z_2''(\omega) \cdot S\cos 2\alpha &= z_1''(\omega) \cdot S \sin 2\alpha - (C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1) \\ &= (\omega_d - C\omega)\cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$z''(\omega_d) = \frac{(C-1) + i(\omega_d - C\omega_d)}{S} = \frac{C-1}{S} \cdot (1 - i\omega_d) = \frac{C-1}{S\cos\vartheta_d} \cdot e^{-i\vartheta_d}. \;\blacksquare$$

BEMERKUNG. Die Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{i\vartheta_d}$ von $\mathbb{C}$ überführt die Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ in die Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 \sin(\vartheta_d + 2\alpha) + z_2 \cos(\vartheta_d + 2\alpha) &= \frac{C-1}{S}, \\ z_1 \sin(\vartheta_d + 2\alpha) - z_2 \cos(\vartheta_d + 2\alpha) &= \frac{C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{S}.\end{aligned}$$

Proposition 157. *Für den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ gilt*

$$z'''(\omega) = \frac{(A-1) + i(\omega_d - A\omega)}{B} \cdot e^{-i\alpha}.$$

Es gilt ferner

$$z'''(\omega^*) = \frac{A-1}{B\cos\alpha} \quad \text{und} \quad z'''(\omega_d) = \frac{A-1}{B\cos\vartheta_d} \cdot e^{-i\pi/4}.$$

Beweis. Die Gleichungen der Geraden sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1\cos\alpha - z_2\sin\alpha = \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{E}C_0(\omega) &\iff z_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha = \frac{A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{B}. \end{aligned}$$

Die Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{i\alpha}$ von $\mathbb{C}$ überführt den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ in den Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen

$$z_1 = \frac{A-1}{B}, \quad z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha = \frac{A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{B}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt analog zum Beweis der Proposition 156

$$z'''(\omega) = \frac{(A-1) + i(\omega_d - A\omega)}{B} \cdot e^{-i\alpha}$$

und

$$z'''(\omega_d) = \left(\frac{A-1}{B\cos\vartheta_d} \cdot e^{-i\vartheta_d}\right) \cdot e^{-i\alpha} = \frac{A-1}{B\cos\vartheta_d} \cdot e^{-i\pi/4}.$$

Nach der Proposition 152 ist der Schnittpunkt der Geraden $\hat{E}B_0(\omega^*)$ und $\hat{E}C_0(\omega^*)$ gleich dem Schnittpunkt der Geraden $\hat{E}B_0(\omega^*)$ und $\hat{E}B_2(\omega^*)$, also gilt nach der Proposition 153

$$z'''(\omega^*) = \frac{A-1}{B\cos\alpha}. \blacksquare$$

Proposition 158. *Für die Spitze $z'(\omega)$ des Sektors $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ gilt*
- $z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}B_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_2$,
- $z'(\omega_2) \in \hat{E}B_1(\omega_2)$ *und*
- $z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}B_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_2$.

Es gilt
- $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \hat{I}B_1(\omega)$ *für* $\omega \leqslant \omega_2$,
- $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int}\hat{I}B_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_2$.

Beweis. Die Gleichung der Halbebene $\hat{I}B_1(\omega)$ ist

$$z_1 \leqslant \frac{1}{S}(C-1).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Proposition 155. $\blacksquare$

LEMMA 159. *Es gilt*

$$0 < \frac{A-1}{B} < \frac{C-1}{S} \cdot \cos\alpha.$$

BEWEIS. Wegen $S = \sqrt{2}B$, $\frac{1}{A} = \sqrt{2}\sin\alpha$ und $C = \operatorname{ctg}\alpha$ ist die behauptete Ungleichungskette äquivalent zu

$$0 < 1 - \sqrt{2}\sin\alpha < (\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot\cos\alpha.$$

Dabei gilt wegen (A1.14)

$$\begin{aligned}(\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot\cos\alpha &= \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ &= 1 - \sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) > 1 - \sqrt{2}\sin\alpha. \ \blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION 160. *Es gilt $\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2 \subset \operatorname{Int}\hat{I}B_1$, also ist die Menge $\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2 \cap \hat{H}B_1$ leer.*

BEWEIS. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1\cos\alpha - z_2\sin\alpha \leqslant \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{I}B_2(\omega) &\iff z_1\cos\alpha + z_2\sin\alpha \leqslant \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1 \leqslant \frac{C-1}{S}. \end{aligned}$$

Aus $\zeta \in (\hat{I}B_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ folgt nach dem Lemma 159

$$\zeta_1 \leqslant \frac{A-1}{B\cos\alpha} < \frac{C-1}{S},$$

also gilt $\zeta \in \operatorname{Int}\hat{I}B_1(\omega)$. $\blacksquare$

PROPOSITION 161. *Es gilt*

$$z'(\omega_2) \in (\hat{E}B_1 \cap \operatorname{Int}\hat{H}C_1)(\omega_2) \quad \textit{und} \quad z''(\omega_2) \in \operatorname{Int}(\hat{I}C_0 \cap \hat{H}B_2)(\omega_2).$$

BEWEIS. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1\sin\alpha - z_2\cos\alpha \leqslant \frac{A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{B}, \\ z \in \hat{H}B_2(\omega) &\iff z_1\cos\alpha + z_2\sin\alpha \geqslant \frac{A-1}{B}, \\ z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1 \leqslant \frac{C-1}{S}, \\ z \in \hat{H}C_1(\omega) &\iff z_1\sin 2\alpha - z_2\cos 2\alpha \geqslant \frac{C(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{S}. \end{aligned}$$

Nach der Proposition 158 gilt $z'(\omega_2) \in \hat{E}B_1(\omega_2)$, woraus

$$z_1'(\omega_2) = \frac{C-1}{S} = z_1''(\omega_2)$$

folgt. Wegen
$$C = \frac{\cos 2\vartheta_d}{1-\sin 2\vartheta_d} = \frac{1-2\sin^2\vartheta_d}{1-\sin 2\vartheta_d}$$
gilt
$$z_2'(\omega_2) - z_2''(\omega_2) = \frac{\omega_2(C(1-\sin 2\vartheta_d) + 2\sin^2\vartheta_d) - \omega_d}{S} = \frac{\omega_2 - \omega_d}{S} < 0.$$
Es gilt also $z_1'(\omega_2) = z_1''(\omega_2)$ und $z_2'(\omega_2) < z_2''(\omega_2)$ und folglich
$$\begin{aligned} z_1'(\omega_2)\sin 2\alpha - z_2'(\omega_2)\cos 2\alpha &> z_1''(\omega_2)\sin 2\alpha - z_2''(\omega_2)\cos 2\alpha,\\ z_1''(\omega_2)\sin\alpha - z_2''(\omega_2)\cos\alpha &< z_1'(\omega_2)\sin\alpha - z_2'(\omega_2)\cos\alpha,\\ z_1''(\omega_2)\cos\alpha + z_2''(\omega_2)\sin\alpha &> z_1'(\omega_2)\cos\alpha + z_2'(\omega_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$
Aus $z''(\omega_2) \in \hat{E}C_1(\omega_2)$ und $z'(\omega_2) \in (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_2)$ folgt damit $z'(\omega_2) \in \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega_2)$ und $z''(\omega_2) \in \operatorname{Int}(\hat{I}C_0 \cap \hat{H}B_2)(\omega_2)$. ∎

Proposition 162. *Es gilt*
$$z'(\omega_d) \in \operatorname{Int}(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega_d) \quad \textit{und} \quad z''(\omega_d) \in \operatorname{Int}(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega_d).$$

Beweis. Nach den Propositionen 155 und 156 gilt
$$z'(\omega_d) = \frac{2(A-1)}{S}\cdot e^{-i\vartheta_d} \quad \text{und} \quad z''(\omega_d) = \frac{C-1}{S\cos\vartheta_d}\cdot e^{-i\vartheta_d}.$$
Damit liegen die Punkte $z'(\omega_d)$ und $z''(\omega_d)$ auf dem Strahl $\mathbb{R}_+\cdot e^{-i\vartheta_d}$. Aus den Ungleichungen sieht man leicht, daß der Koordinatenursprung in den Halbebenen $\hat{I}C_0(\omega_d)$, $\hat{I}B_2(\omega_d)$, $\hat{I}B_1(\omega_d)$ und $\hat{I}C_1(\omega_d)$ enthalten ist. Für $\zeta \in \mathbb{R}_+\cdot e^{-i\vartheta_d}$ gilt also
$$\begin{aligned} \zeta \in \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega_d) &\iff \zeta \in \operatorname{Int}\hat{I}B_2(\omega_d) \iff |\zeta| < |z'(\omega_d)|,\\ \zeta \in \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega_d) &\iff \zeta \in \operatorname{Int}\hat{H}B_1(\omega_d) \iff |\zeta| > |z''(\omega_d)|. \end{aligned}$$
Nach der Proposition 158 gilt $z'(\omega_d) \in \operatorname{Int}\hat{H}B_1(\omega_d)$ und damit $|z'(\omega_d)| > |z''(\omega_d)|$, also gilt $z''(\omega_d) \in \operatorname{Int}(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega_d)$ und $z'(\omega_d) \in \operatorname{Int}(\hat{H}C_1 \cap \hat{H}B_1)(\omega_d)$. ∎

Proposition 163. *Es gibt ein $\omega_3 \in (\omega_2, \omega_d)$ derart, daß für die Spitze $z''(\omega)$ des Sektors $(\hat{I}B_1 \cap \hat{I}C_1)(\omega)$ gilt:*

$z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}B_2(\omega)$ *für* $\omega < \omega_3$,
$z''(\omega_3) \in \hat{E}B_2(\omega_3)$,
$z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}B_2(\omega)$ *für* $\omega > \omega_3$.

Beweis. Nach den Propositionen 161 und 162 gilt $z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}B_2(\omega)$ für $\omega = \omega_2$ und $z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}B_2(\omega)$ für $\omega = \omega_d$. ∎

Proposition 164. *Für die Spitzen $z'(\omega)$ bzw. $z''(\omega)$ der Sektoren $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ bzw. $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ gilt:*

$z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega)$ *und* $z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega)$ *für* $\omega \in [\omega_2, \omega_d]$,
$z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}B_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_2$ *und* $z'(\omega) \notin \hat{H}B_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_2$,
$z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}B_2(\omega)$ *für* $\omega > \omega_3$ *und* $z''(\omega) \notin \hat{I}B_2(\omega)$ *für* $\omega < \omega_3$.

Beweis. Es gilt $z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega)$ und $z''(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega)$ nach den Propositionen 161 und 162 für $\omega = \omega_2$ und für $\omega = \omega_d$, also auch für alle $\omega \in [\omega_2, \omega_d]$. Die Behauptungen über $\hat{I}B_1$ und $\hat{I}B_2$ folgen aus den Propositionen 158 und 163. ∎

Proposition 165. *Aus der Proposition 164 folgt für die Spitzen $z'(\omega)$ bzw. $z''(\omega)$ der Sektoren $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ bzw. $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$*

$z'(\omega) \in (\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ *für* $\omega \in [\omega_2, \omega_d]$,
$z'(\omega) \in \mathrm{Int}(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ *für* $\omega \in (\omega_2, \omega_d]$,
$z''(\omega) \in (\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ *für* $\omega \in [\omega_3, \omega_d]$,
$z''(\omega) \in \mathrm{Int}(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ *für* $\omega \in (\omega_3, \omega_d]$. ∎

Proposition 166. *Für den Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ und den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ gilt $|z'''(\omega)| < |z''(\omega)|$ für $\omega \in [0, \omega_d]$.*

Beweis. Nach der Proposition 157 gilt

$$|z'''(\omega)|^2 = \frac{(A-1)^2 + (\omega_d - A\omega)^2}{B^2}.$$

Nach der Proposition 156 gilt

$$|z''(\omega)|^2 = \frac{(C-1)^2 + (\omega_d - C\omega)^2}{S^2}.$$

Es sei $f(\omega) := |z''(\omega)|^2 - |z'''(\omega)|^2$. Wegen $S^2 = 2B^2$ gilt

$$f(\omega) \cdot S^2 = (C-1)^2 - 2(A-1)^2 + (\omega_d - C\omega)^2 - 2(\omega_d - A\omega)^2$$

Der Koeffizient bei ω^2 ist

$$C^2 - 2A^2 = \frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = -1,$$

also ist die Funktion $f(\omega)$ konkav. Damit genügt es, $f(0) > 0$ und $f(\omega_d) > 0$ zu zeigen. Dabei gilt

$$\begin{aligned} f(0)\cdot S^2 &= (C-1)^2 - 2(A-1)^2 - {\omega_d}^2, \\ f(\omega_d)\cdot S^2 &= (1+{\omega_d}^2)((C-1)^2 - 2(A-1)^2). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} ((C-1)^2 - 2(A-1)^2)\cdot\sin^2\alpha &= (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 - (1-\sqrt{2}\sin\alpha)^2 \\ &= 2\sqrt{2}\sin\alpha\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha)\Big) \\ &= 2\sqrt{2}\sin\alpha(1-\cos\vartheta_d) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(\omega_d)\cdot S^2\sin\alpha &= 2\sqrt{2}(1+{\omega_d}^2)(1-\cos\vartheta_d) > 0, \\ f(0)\cdot S^2\sin\alpha &= 2\sqrt{2}(1-\cos\vartheta_d) - {\omega_d}^2\sin\alpha. \end{aligned}$$

Es gilt $p = 2k+4$, wobei k eine ungerade natürliche Zahl ist, damit gilt $p \in \{6, 10\}$ oder $p \geqslant 14$. Die explizite Rechnung zeigt, daß $2\sqrt{2}(1-\cos\vartheta_d) - {\omega_d}^2\sin\alpha > 0$ für $p = 6$ und $p = 10$ gilt. Für $p \geqslant 14$ gilt

$$2\sqrt{2}(1-\cos\vartheta_d) \geqslant 2\sqrt{2}\cdot\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{14}\right)\right] > 0{,}4$$

und

$${\omega_d}^2\sin\alpha = \tan^2\vartheta_d\sin\alpha \leqslant \tan^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{14} < 0{,}3. \ ∎$$

Proposition 167. *Für $\omega \in [\omega_3, \omega_d]$ liegt der Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ außerhalb des regelmäßigen p-Ecks mit den Ecken $z'''(\omega)e^{2ij\alpha}$, $0 \leqslant j < p$, wobei $z'''(\omega)$ der Schnittpunkt der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ ist.*

Beweis. Nach der Proposition 166 liegt der Punkt $z''(\omega)$ sogar außerhalb des dem Polygon umbeschriebenen Kreises. ∎

Proposition 168. *Der Schnittpunkt $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega)$ liegt in $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$ für $\omega \geqslant \omega^*$.*

Beweis. Die Ungleichung der Halbebene $\hat{I}B_1(\omega)$ ist

$$z \in \hat{I}B_1(\omega) \iff z_1 \leqslant \frac{C-1}{S}.$$

Für den Schnittpunkt $\zeta(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ gilt nach der Proposition 157

$$\zeta_1(\omega) = \frac{(A-1)\cos\alpha + \omega_d \sin\alpha - \omega \cdot A \sin\alpha}{B}, \quad \zeta_1(\omega^*) = \frac{A-1}{B\cos\alpha}.$$

Für $\omega \geqslant \omega^*$ gilt also nach dem Lemma 159

$$\zeta_1(\omega) \leqslant \zeta_1(\omega^*) = \frac{A-1}{B\cos\alpha} < \frac{C-1}{S}$$

und damit $\zeta(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$. ∎

Proposition 169. *Der Schnittpunkt $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega)$ liegt in $\operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega)$ für $\omega \leqslant \omega_d$.*

Beweis. Die Gleichungen der Geraden und die Ungleichung der Halbebene sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{E}B_2(\omega) &\iff z_1\cos\alpha + z_2 \sin\alpha = \frac{A-1}{B},\\
z \in \hat{E}C_2(\omega) &\iff z_1 \sin 3\alpha - z_2 \cos 3\alpha = \frac{A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1}{B},\\
z \in \hat{I}C_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\alpha - z_2 \cos 2\alpha \leqslant \frac{C(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1}{S}.
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = -\cos 2\alpha < 0$. Es ist also zu zeigen, daß $\Delta(\omega) < 0$ für $\omega \leqslant \omega_d$ gilt. Wegen $S = \sqrt{2}B$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega) \cdot S = \sqrt{2}\cos\alpha(A(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 1)&\\
- \cos 2\alpha(C(\sin 2\alpha + \omega \cos 2\alpha) - 1)&\\
- \sqrt{2}\sin\alpha(A-1).&
\end{aligned}$$

Wegen $C\sin\alpha = \cos\alpha$ und $A\sqrt{2}\sin\alpha = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega) \cdot S\sin\alpha = \cos\alpha(1-\cos 2\alpha)(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha)&\\
- \sin\alpha + \sin\alpha(\cos 2\alpha - \sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)).&
\end{aligned}$$

Wegen $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ und $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ folgt

$$\Delta(\omega) \cdot S = \sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \omega\cos 2\alpha) - 2\sin^2\alpha - \sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Für $\omega \leqslant \omega_d$ gilt also wegen $\sin 2\alpha + \omega_d \cos 2\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega) \cdot S \leqslant \Delta(\omega_d) \cdot S &= \sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha - \sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)\\
&= \sqrt{2}(\sqrt{2}\sin\alpha - 1)(\cos\alpha - \sin\alpha) < 0.
\end{aligned}$$ ∎

Proposition 170. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$ *für alle* ω *aus dem Intervall* $[\omega^*, \omega_2)$

Beweis. Nach der Proposition 158 gilt $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$ für $\omega < \omega_2$. Für $\omega \in [\omega^*, \omega_2]$ gilt

$$(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega) \subset (\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega). \blacksquare$$

Proposition 171. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_3)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega_3)$.

Beweis. Nach der Proposition 163 schneiden sich die Geraden $\hat{E}B_2(\omega_3)$, $\hat{E}B_1(\omega_3)$ und $\hat{E}C_1(\omega_3)$ in einem Punkt. Nach der Proposition 165 liegt die Spitze $z'(\omega_3)$ des Sektors $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega_3)$ in $\operatorname{Int}(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega_3)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} z'(\omega_3) \in \operatorname{Int}(\hat{E}B_2 \cap \hat{H}B_1)(\omega_3) &= \operatorname{Int}(\hat{E}B_2 \cap \hat{H}C_1)(\omega_3), \\ \operatorname{Int}(\hat{E}B_2 \cap \hat{I}B_1)(\omega_3) &= \operatorname{Int}(\hat{E}B_2 \cap \hat{I}C_1)(\omega_3). \end{aligned}$$

Nach der Proposition 169 gilt $\zeta \in \operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega_3)$ für den Schnittpunkt ζ der Geraden $\hat{E}B_2(\omega_3)$ und $\hat{E}C_2(\omega_3)$, es folgt also $\zeta \in \operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega_3)$. $\blacksquare$

Proposition 172. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}B_1(\omega)$ *für alle* ω *aus dem Intervall* $[\omega^*, \omega_3]$.

Beweis. Nach den Propositionen 170 und 171 gilt die Behauptung für $\omega \in [\omega^*, \omega_2)$ und für $\omega = \omega_3$, also auch für alle $\omega \in [\omega^*, \omega_3]$. $\blacksquare$

Proposition 173. *Für* $\omega \in [\omega_3, \omega_d]$ *ist die Schicht*

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega) - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}C_{2m} \cap \operatorname{Int} \hat{H}C_{2m+1} \cap \operatorname{Int} \hat{H}B_{2m+1} \cap \hat{I}B_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}B_m \cap \hat{E}C_m)(\omega)$ *und* $(\hat{E}C_m \cap \hat{E}B_{m+1})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}B_m(\omega)$ *und* $\hat{E}C_m(\omega)$, *genauer gilt:*

$$\begin{aligned} &(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega), (\hat{E}B_1 \cap \hat{E}C_1)(\omega), \\ &(\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-1} \cap \hat{E}B_0)(\omega) \end{aligned}$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}C_{m-1} \cap \hat{E}B_m)(\omega) \quad \textit{und} \quad (\hat{E}B_m \cap \hat{E}C_m)(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_m(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}B_m \cap \hat{E}C_m)(\omega) \quad \textit{und} \quad (\hat{E}C_m \cap \hat{E}B_{m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_m(\omega)$ *enthalten.*

Für $\omega \in [\omega_2, \omega_3]$ *ist die Schicht*

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega) - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}C_{2m} \cap \operatorname{Int} \hat{H}C_{2m+1} \cap \hat{I}B_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega)$, $(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega)$ *und* $(\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}C_{2m}(\omega)$, $\hat{E}C_{2m+1}(\omega)$ *und* $\hat{E}B_{2m+2}(\omega)$, *genauer gilt:*

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}C_1)(\omega), (\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-1} \cap \hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m}(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m+1}(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m+2} \cap \hat{E}C_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m+2}(\omega)$ *enthalten.*

Beweis. Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega)$$

für $\omega \in [0, \omega^*]$ ist das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega)$ und $(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$ und den Kanten in $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ und $\hat{E}C_{2m}(\omega)$, genauer gilt:

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega), (\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}C_2 \cap \hat{E}B_4)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}C_{2m-2} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ enthalten, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m}(\omega)$ enthalten.

Ich bezeichne die Spitze des Sektors $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ durch $z'(\omega)$, die Spitze des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ durch $z''(\omega)$ und die Spitze des Sektors $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(\omega)$ durch $z'''(\omega)$.

Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega)$$

für $\omega \in [\omega^*, \omega_d]$ kann auch beschrieben werden als die Vereinigung des regelmäßigen p-Ecks $\Pi(\omega)$ mit den Ecken $z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha}, \ldots, z'''(\omega)e^{(2p-2)i\alpha}$ mit den p Dreiecken, die unter der Anwendung der Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{2i\alpha}$ aus dem Dreieck $\Delta(\omega)$ mit den Ecken $z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha}, z'(\omega)$ entstehen.

Es sei $\omega \in [\omega_3, \omega_d]$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ mit Spitze im Punkte $z''(\omega)$. Nach der Proposition 165 liegt der Punkt $z''(\omega)$ im Sektor $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$, nach der Proposition 167 liegt der Punkt $z''(\omega)$ außerhalb des regelmäßigen p-Ecks $\Pi(\omega)$, also liegt die Spitze $z''(\omega)$ des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ im Dreieck $\Delta(\omega)$. Nach den Propositionen 165, 168 und 169 gilt

$$z'(\omega) \in (\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega), \quad z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha} \notin (\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega).$$

Damit ist der Durchschnitt des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Viereck $(\hat{I}C_0 \cap \hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ mit den Ecken

$$z'(\omega), \quad (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega), \quad z''(\omega), \quad (\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega).$$

Es sei $\omega \in [\omega_2, \omega_3]$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und der Halbebene $\hat{H}B_1(\omega)$. Nach den Propositionen 164, 168 und 172 gilt

$$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega), \quad z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha} \notin \hat{H}B_1(\omega).$$

Damit ist der Durchschnitt der Halbebene $\hat{H}B_1(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Dreieck $(\hat{I}C_0 \cap \hat{H}B_1 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ mit den Ecken

$$z'(\omega), \quad (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega), \quad (\hat{E}B_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega). \ \blacksquare$$

Definition. Es sei $P = P[-\omega_d, \omega_d]$ und

$$\begin{aligned}
P[0,\omega_1] &= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \tilde{I}B_{2m}[0,\omega_1],\\
P[\omega_1,\omega_2] &= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m})[\omega_1,\omega_2],\\
P[\omega_2,\omega_3] &= P'[\omega_2,\omega_3] - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2})[\omega_2,\omega_3]\\
&= \left(\begin{array}{l} \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m}) \\ \qquad - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2}) \end{array}\right)[\omega_2,\omega_3],\\
P[\omega_3,\omega_d] &= P'[\omega_3,\omega_d] - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{H}C^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2})[\omega_3,\omega_d]\\
&= \left(\begin{array}{l} \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m}) \\ \qquad - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{H}C^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2}) \end{array}\right)[\omega_3,\omega_d],\\
P[-\omega_d,0] &= \eta(P[0,\omega_d]).
\end{aligned}$$

Es gilt $\pi(P) \subset \pi(P') = \hat{P}' \subset L$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß $\pi(P)$ durch die gleichen Operationen wie P aus $I_{m,j}$ und $H_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ und $\tilde{H}_{m,j}$ gebildet

wird und $\pi|_P : P \to \pi(P)$ ein Homöomorphismus ist. Es sei $\hat{P}$ durch die gleichen Operationen wie P aus $\hat{I}_{m,j}$ und $\hat{H}_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ und $\tilde{H}_{m,j}$ gebildet. Aus $\hat{P}' = \pi(P')$ folgt $\pi(P) = \hat{P}$. Aus der Beschreibung von P' und der Proposition 173 ergibt sich eine Bescheibung von P.
Betrachtet man die Schichten $\pi(P)(\omega)$ genauer, so sieht man, daß die Seitenflächen der Stücke $P[-\omega_d, 0]$, $P[0, \omega_1]$, $P[\omega_i, \omega_{i+1}]$ mit $i \in \{1, 2\}$ und $P[\omega_3, \omega_d]$ so zusammenpassen, daß P keine horizontalen in den Ebenen $\{\omega = 0\}$ bzw. $\{\omega = \omega_i\}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ enthaltenen Kanten hat. Die Kombinatorik der Seitenfläche von P ist in der Abbildung dargestellt.

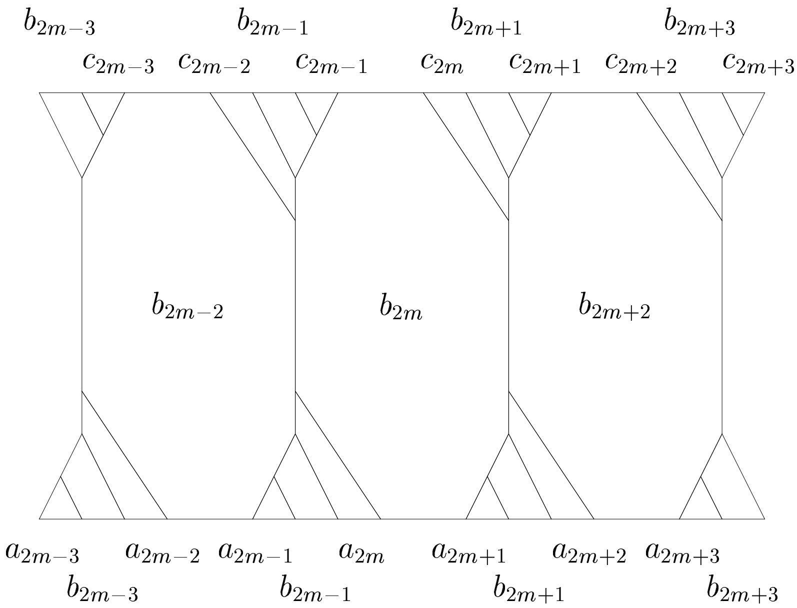


ABBILDUNG 10. Die Seitenfläche von P für $l = 2$.

PROPOSITION 174. *Nach der Proposition* 113 *gilt*

$$\begin{aligned}
&a_m^{-1} = c_{m-4}, \quad b_m^{-1} = b_{m+p}, \quad c_m^{-1} = a_{m+4},\\
&a_m r_d = b_m, \quad b_m r_d = c_m,\\
&b_m r_d^{-1} = a_m, \quad c_m r_d^{-1} = b_m,\\
&r_d^{-1} b_m = a_{m-2k}, \quad r_d^{-1} c_m = b_{m-2k},\\
&r_d a_m = b_{m+2k}, \quad r_d b_m = c_{m+2k}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_{2m}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+2}) a_{2m-1}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+1}) a_{2m-2}^{-1}\\
&= \tilde{\rho}^{-2}(c_{2m-1}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(c_{2m-2}) a_{2m+1}^{-1}\\
a_{2m+1}^{-1} &= \tilde{\rho}^{-2}(c_{2m}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{-2}(a_{2m+2}) a_{2m}^{-1},\\
b_{2m}^{-1} &= \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m-1}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m-2}) a_{2m+1}^{-1}\\
&= \tilde{\rho}^{k+2}(a_{2m+2}) b_{2m-1}^{-1} = \tilde{\rho}^{k+2}(a_{2m+1}) b_{2m-2}^{-1},\\
b_{2m+1}^{-1} &= \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde{\rho}^{k+2}(a_{2m+2}) b_{2m}^{-1}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Satz 175. *$\Psi(P)$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\tilde{G}$.*

Beweis. Um den Satz 55 anzuwenden, beschreibe ich die Identifikationen am Rande von P unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$

$$
\begin{aligned}
&(r_d; b_m, c_m) \mapsto \tilde{\rho}^{-k}(r_d^{-1}; a_m, b_m),\\
&(a_{2m}; r_d^{-1}, b_{2m-1}, b_{2m-2}, b_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(c_{2m}; b_{2m}, b_{2m+2}, b_{2m+1}, r_d),\\
&(b_{2m}; r_d^{-1}, a_{2m}, b_{2m-2}, c_{2m-2}, b_{2m-1}, c_{2m-1}, r_d, c_{2m}, b_{2m+2}, a_{2m+2}, b_{2m+1}, a_{2m+1}) \mapsto\\
&\qquad \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m}; a_{2m}, r_d^{-1}, a_{2m+1}, b_{2m+1}, a_{2m+2}, b_{2m+2}, c_{2m}, r_d, c_{2m-1}, b_{2m-1}, c_{2m-2}, b_{2m-2}),\\
&(c_{2m}; r_d, b_{2m+1}, b_{2m+2}, b_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{2}(a_{2m}; b_{2m}, b_{2m-2}, b_{2m-1}, r_d^{-1}),\\
&(a_{2m+1}; r_d^{-1}, b_{2m}, b_{2m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(c_{2m+1}; b_{2m+1}, b_{2m+2}, r_d),\\
&(b_{2m+1}; r_d^{-1}, a_{2m+1}, b_{2m}, a_{2m+2}) \mapsto \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m+1}; a_{2m+1}, r_d^{-1}, a_{2m+2}, b_{2m}),\\
&(b_{2m+1}; r_d, c_{2m+1}, b_{2m+2}, c_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m+1}; c_{2m+1}, r_d, c_{2m}, b_{2m+2}),\\
&(c_{2m+1}; r_d, b_{2m+2}, b_{2m+1}) \mapsto \tilde{\rho}^{2}(a_{2m+1}; b_{2m+1}, b_{2m}, r_d^{-1})
\end{aligned}
$$

und die Kantenzyklen

$$
\begin{aligned}
&(a_{2m}; b_{2m-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-1}(b_{2m}; c_{2m-2}) \mapsto \tilde{\rho}^{k+1}(b_{2m+1}; b_{2m}),\\
&(a_{2m}; b_{2m-2}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(b_{2m+1}; c_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{k+1}(b_{2m}; b_{2m-1}),\\
&(a_{2m+1}; b_{2m}) \mapsto \tilde{\rho}^{-1}(b_{2m}; c_{2m-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{k+2}(b_{2m}; b_{2m-2}),\\
&(a_m; r_d^{-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{-2}(b_m; c_m) \mapsto \tilde{\rho}^{k}(r_d; b_m),\\
&(b_m; r_d^{-1}) \mapsto \tilde{\rho}^{k+2}(a_m; b_m) \mapsto \tilde{\rho}^{k}(r_d; c_m).
\end{aligned}
$$

Die ersten drei Zykel sind vom Typ ℵ, die letzten zwei Zykel sind vom Typ ב. ■

Bemerkung. Es bleibt zu zeigen, daß $P = F_{\tilde{\varepsilon}}$ gilt. Dafür sollte man zeigen, daß $F_{\mathcal{E}} \subset P$ gilt.

§24. Fall $\Gamma(3k+4, 4, 2)^k$

Notation. Es gilt $\vartheta_d = \frac{\pi k}{2p} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\alpha}{3}$ und $\omega_d = \tan \vartheta_d$. Es sei $\phi := \alpha + \vartheta_d = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3}$. Es gilt

$$\alpha = 3\phi - \frac{\pi}{2} \quad \text{und damit} \quad \begin{aligned} \sin 3\phi &= \cos\alpha,\\ \cos 3\phi &= -\sin\alpha.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}\cos 3\phi} \quad \text{und} \quad C = -\tan 3\phi.$$

Es gilt ferner $\vartheta_d = \phi - \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\phi$ und $\omega_d = \operatorname{ctg} 2\phi$. Es gilt

$$3\phi - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{und damit} \quad \begin{aligned} \sin(3\phi - 2\alpha) &= \cos\alpha,\\ \cos(3\phi - 2\alpha) &= \sin\alpha.\end{aligned}$$

Proposition 176. *Es gilt*

$$\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < 2\phi < \frac{\pi}{2} < 3\phi < \frac{2\pi}{3} < 4\phi < \pi < \frac{4\pi}{3} < 8\phi < 2\pi.$$

Es gilt $\sin 2\phi + \omega_d \cos 2\phi = \frac{1}{\sin 2\phi}$ *und* $\sin 2\phi - \omega_d \cos 2\phi = -\frac{\cos 4\phi}{\sin 2\phi}$. ■

Notation. Es sei $\gamma := \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\phi$. Wegen $\pi/6 < \phi < \pi/4$ gilt $0 < \gamma < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Es gilt $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi = 2\gamma(\sqrt{2}-\gamma)$ und $\sqrt{2}\sin\phi = 1 - \gamma\sqrt{2}$.

Notation. Es sei

$$\omega_1 := \frac{2\gamma^2}{\sin 2\phi}, \quad \omega_2 := \frac{2\gamma^2\tan\phi}{\cos 2\phi}, \quad \omega_3 = \omega^* := \frac{\gamma}{\cos\phi}.$$

Proposition 177. *Es gilt* $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 = \omega^* < \omega_d$.

Beweis. Mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\phi$, $\cos 2\phi = 2\gamma(\sqrt{2}-\gamma)$ und $\sqrt{2}\sin\phi = 1 - \gamma\sqrt{2}$ folgt

$$\begin{aligned} \omega_1\cos\phi &= \frac{\gamma^2\sqrt{2}}{1-\gamma\sqrt{2}} & \qquad \omega_2\cos\phi &= \frac{\gamma(1-\gamma\sqrt{2})}{2-\gamma\sqrt{2}} \\ \omega^*\cos\phi &= \gamma & \qquad \omega_d\cos\phi &= \frac{\gamma(2-\gamma\sqrt{2})}{1-\gamma\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Die behauptete Ungleichungskette ist somit äquivalent zu der Ungleichungskette

$$0 < \frac{\gamma\sqrt{2}}{1-\gamma\sqrt{2}} < \frac{1-\gamma\sqrt{2}}{2-\gamma\sqrt{2}} < 1 < \frac{2-\gamma\sqrt{2}}{1-\gamma\sqrt{2}}.$$

Für $\gamma \in (0, \frac{\sqrt{2}-1}{2})$ sind diese Ungleichungen erfüllt. ∎

Notation. Es gilt

$$a_m = f_{m,-3}, \quad b_m = f_{m,-1}, \quad c_m = f_{m,1}, \quad d_m = f_{m,3}.$$

Ungleichungen.

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}A_0(\omega) &\iff z_1\cos 9\phi - z_2\sin 9\phi \leqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 6\phi - \omega\cos 6\phi) + 1),\\
z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff -z_1\cos 5\phi + z_2\sin 5\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1\cos\phi - z_2\sin\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}D_0(\omega) &\iff z_1\cos 3\phi + z_2\sin 3\phi \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi) + 1),\\
z \in \hat{I}A_2(\omega) &\iff z_1\cos 3\phi - z_2\sin 3\phi \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 6\phi - \omega\cos 6\phi) + 1),\\
z \in \hat{I}B_2(\omega) &\iff z_1\cos\phi + z_2\sin\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}C_2(\omega) &\iff -z_1\cos 5\phi - z_2\sin 5\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}D_2(\omega) &\iff z_1\cos 9\phi + z_2\sin 9\phi \leqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi) + 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1\sin 2\phi + z_2\cos 2\phi \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}C_1(\omega) &\iff z_1\sin 2\phi - z_2\cos 2\phi \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}D_1(\omega) &\iff z_1\sin 6\phi + z_2\cos 6\phi \geqslant \frac{1}{S}(C(\sin 6\phi - \omega\cos 6\phi) + 1).
\end{aligned}$$

Lemma 178. *Es gilt*

$$0 < \frac{C - \sin 2\phi}{S} < -\frac{A\cos 4\phi + \sin 2\phi}{B \sin\phi}.$$

Beweis. Es gilt $C - \sin 2\phi > 1 - \sin 2\phi > 0$ und

$$\begin{aligned}
&\frac{C - \sin 2\phi}{S} < -\frac{A\cos 4\phi + \sin 2\phi}{B\sin\phi}\\
&\qquad\iff (C - \sin 2\phi)\sin\phi < -\sqrt{2}(A\cos 4\phi + \sin 2\phi)\\
&\qquad\iff \sin\phi\sin 3\phi + \sin\phi\sin 2\phi\cos 3\phi < \sqrt{2}\sin 2\phi\cos 3\phi - \cos 4\phi\\
&\qquad\iff \cos\phi\cos 3\phi < \sin 2\phi\cos 3\phi(\sqrt{2} - \sin\phi)\\
&\qquad\iff 2\sin\phi(\sqrt{2} - \sin\phi) < 1\\
&\qquad\iff -(\sqrt{2}\sin\phi - 1)^2 < 0. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 179. *Es gilt* $0 \notin (\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(\omega)$ *und* $0 \notin (\hat{H}B_0 \cap \hat{H}D_0)(\omega)$ *für* $\omega \leqslant \omega_d$.

Beweis. Die Ungleichung der Halbebene ist

$$z \in \hat{H}B_0(\omega) \iff -z_1\cos 5\phi + z_2 \sin 5\phi \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1).$$

Für $\omega \leqslant \omega_d$ gilt

$$A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1 \geqslant A(\sin 2\phi - \omega_d \cos 2\phi) - 1 = -\frac{A\cos 4\phi + \sin 2\phi}{\sin 2\phi} > 0$$

nach dem Lemma 178 und damit $0 \notin \hat{H}B_0(\omega)$. ■

Proposition 180. *Die Winkelhalbierende des Sektors* $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(0)$ *geht durch den Koordinatenursprung.*

Beweis. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}B_0(0)$ und $H^+ = \hat{H}C_0(0)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{H}B_0(0) &\iff -z_1\cos 5\phi + z_2\sin 5\phi \geqslant \frac{1}{B}(A\sin 2\phi - 1),\\
z \in \hat{H}C_0(0) &\iff z_1\cos\phi - z_2\sin\phi \geqslant \frac{1}{B}(A\sin 2\phi - 1). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 181. *Die Geraden* $\hat{E}C_0(\omega^*)$, $\hat{E}D_0(\omega^*)$ *und* $\hat{E}B_2(\omega^*)$ *schneiden sich in einem Punkt. Es gilt*

$(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega)$ *für* $\omega < \omega^*$,
$(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}C_0(\omega)$ *für* $\omega > \omega^*$.

Beweis. Die Gleichungen der Geraden sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{E}D_0(\omega) &\iff z_1\cos 3\phi + z_2\sin 3\phi = \frac{1}{B}(A(\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi) + 1),\\
z \in \hat{E}B_2(\omega) &\iff z_1\cos\phi + z_2\sin\phi = \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1\cos\phi - z_2\sin\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1).
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = -\sin 2\phi < 0$. Es ist also zu zeigen, daß $\Delta(\omega^*) = 0$, $\Delta(\omega) < 0$ für $\omega < \omega^*$ und $\Delta(\omega) > 0$ für $\omega > \omega^*$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta(\omega)\cdot B =& \sin 4\phi(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1)\\ &\qquad - A\sin 2\phi((\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) + (\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi))\\ =& A\sin 2\phi(\sin 4\phi - (\sin 2\phi + \sin 6\phi)) - \sin 4\phi\\ &\qquad - \omega\cdot A(\sin 4\phi\cos 2\phi + \sin 2\phi(\cos 2\phi + \cos 6\phi)).\end{aligned}$$

Wegen $\sin 2\phi + \sin 6\phi = 2\sin 4\phi\cos 2\phi$ und $\cos 2\phi + \cos 6\phi = 2\cos 2\phi\cos 4\phi$ folgt

$$\frac{\Delta(\omega)\cdot B}{\sin 4\phi} = A\sin 2\phi(1 - 2\cos 2\phi) - 1 - \omega\cdot A(\cos 2\phi + \cos 4\phi).$$

Wegen $A\sqrt{2}\cos 3\phi = -1$ und $\cos 3\phi = \cos\phi(2\cos 2\phi - 1)$ gilt

$$A(\cos 2\phi + \cos 4\phi) = A\cdot 2\cos\phi\cos 3\phi = -\sqrt{2}\cos\phi$$

und

$$\begin{aligned}A\sin 2\phi(1 - 2\cos 2\phi) &= A\cdot 2\sin\phi\cos\phi(1 - 2\cos 2\phi)\\ &= -2A\sin\phi\cos 3\phi = \sqrt{2}\sin\phi.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\Delta(\omega)\cdot B}{\sin 4\phi} = \sqrt{2}\sin\phi - 1 + \omega\cdot\sqrt{2}\cos\phi = -\sqrt{2}\cos\phi(\omega^* - \omega). \blacksquare$$

PROPOSITION 182. *Die Winkelhalbierende des Sektors* $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}D_0)(\omega_d)$ *geht durch den Koordinatenursprung.*

BEWEIS. Ich wende (A7.4) mit $H^- = \hat{H}B_0(\omega_d)$ und $H^+ = \hat{H}D_0(\omega_d)$ an. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}z \in \hat{H}B_0(\omega_d) &\iff z_1\cos 5\phi - z_2\sin 5\phi \leqslant \frac{A\cos 4\phi + \sin 2\phi}{B\sin 2\phi},\\ z \in \hat{H}D_0(\omega_d) &\iff z_1\cos 3\phi + z_2\sin 3\phi \leqslant \frac{A\cos 4\phi + \sin 2\phi}{B\sin 2\phi}. \blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION 183. *Es gilt*

(1) $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega_d)$,
(2) $(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega_d)$,
(3) $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega_d)$,
(4) $(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_d) \subset \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega_d)$,
(5) $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega_d)$.

BEWEIS. Die Gleichungen der Geraden und die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}z \in \hat{E}B_0(\omega_d) &\iff z_1\cos 5\phi - z_2\sin 5\phi = -X,\\ z \in \hat{I}C_0(\omega_d) &\iff z_1\cos\phi - z_2\sin\phi \leqslant Y,\\ z \in \hat{E}D_0(\omega_d) &\iff z_1\cos 3\phi + z_2\sin 3\phi = -X,\\ z \in \hat{E}B_2(\omega_d) &\iff z_1\cos\phi + z_2\sin\phi = X,\\ z \in \hat{E}C_2(\omega_d) &\iff z_1\cos 5\phi + z_2\sin 5\phi = -Y,\\ z \in \hat{I}C_1(\omega_d) &\iff z_1\sin 2\phi - z_2\cos 2\phi \leqslant Z\end{aligned}$$

mit
$$X = -\frac{A\cos 4\phi + \sin 2\phi}{B\sin 2\phi}, \quad Y = \frac{A - \sin 2\phi}{B\sin 2\phi}, \quad Z = \frac{C - \sin 2\phi}{S\sin 2\phi}.$$
Nach dem Lemma 178 gilt $X > Z\sin\phi > 0$. Die Drehung $\tau(\zeta) = \zeta \cdot ie^{-2i\phi}$ von $\mathbb{C}$ überführt diese Geraden und Halbebenen in die Geraden und Halbebenen mit den folgenden Gleichungen und Ungleichungen
$$\begin{aligned}
z \in \tau(\hat{E}B_0(\omega_d)) &\iff z_1\sin 7\phi + z_2\cos 7\phi = -X,\\
z \in \tau(\hat{I}C_0(\omega_d)) &\iff z_1\sin 3\phi + z_2\cos 3\phi \leqslant Y,\\
z \in \tau(\hat{E}D_0(\omega_d)) &\iff z_1\sin\phi - z_2\cos\phi = X,\\
z \in \tau(\hat{E}B_2(\omega_d)) &\iff z_1\sin\phi + z_2\cos\phi = X,\\
z \in \tau(\hat{E}C_2(\omega_d)) &\iff z_1\sin 3\phi - z_2\cos 3\phi = Y,\\
z \in \tau(\hat{I}C_1(\omega_d)) &\iff z_1 \leqslant Z.
\end{aligned}$$

(1) Ich zeige $\tau((\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d)) \subset \tau(\operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega_d))$. Aus $z \in \tau((\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d))$ folgt $-z_1\sin 7\phi - z_2\cos 7\phi = z_1\sin\phi - z_2\cos\phi = X$ und damit
$$z_1(\sin\phi - \sin 7\phi) - z_2(\cos\phi + \cos 7\phi) = 2X.$$
Wegen $\sin\phi - \sin 7\phi = -2\sin 3\phi\cos 4\phi$ und $\cos\phi + \cos 7\phi = 2\cos 3\phi\cos 4\phi$ folgt
$$(z_1\sin 3\phi + z_2\cos 3\phi)\cos 4\phi = -X.$$
Andererseits gilt $z \in \tau(\operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega_d)) \iff z_1\sin 3\phi + z_2\cos 3\phi < Y$. Es bleibt also,
$$X + Y\cos 4\phi < 0$$
zu zeigen. Dabei gilt
$$\begin{aligned}
-(X + Y\cos 4\phi)B\sin 2\phi &= (A\cos 4\phi + \sin 2\phi) - (A - \sin 2\phi)\cos 4\phi\\
&= \sin 2\phi(1 + \cos 4\phi) > 0.
\end{aligned}$$

(2) Ich zeige $\tau((\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d)) \subset \tau(\operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega_d))$. Aus $z \in \tau((\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d))$ folgt $z_1\sin 3\phi + z_2\cos 3\phi = Y$ und $z_1\sin\phi - z_2\cos\phi = X$ und damit
$$z_1\sin 4\phi = X\cos 3\phi + Y\cos\phi.$$
Andererseits gilt $z \in \tau(\operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega_d)) \iff z_1 < Z$. Es bleibt also,
$$X\cos 3\phi + Y\cos\phi < Z\sin 4\phi$$
zu zeigen. Dabei gilt $Z \cdot S\sin 2\phi = C - \sin 2\phi$. Wegen
$$\begin{aligned}
&\cos\phi = \cos(4\phi - 3\phi) = \cos 3\phi\cos 4\phi + \sin 3\phi\sin 4\phi,\\
&\cos\phi + \cos 3\phi = 2\cos\phi\cos 2\phi
\end{aligned}$$
gilt
$$\begin{aligned}
&(X\cos 3\phi + Y\cos\phi)B\sin 2\phi\\
&\quad = -(A\cos 4\phi + \sin 2\phi)\cos 3\phi + (A - \sin 2\phi)\cos\phi\\
&\quad = A(\cos\phi - \cos 4\phi\cos 3\phi) - \sin 2\phi(\cos\phi + \cos 3\phi)\\
&\quad = A\sin 3\phi\sin 4\phi - 2\cos\phi\cos 2\phi\sin 2\phi\\
&\quad = \sin 4\phi(A\sin 3\phi - \cos\phi).
\end{aligned}$$

Wegen $S = \sqrt{2}B$ ist $X \cos 3\phi + Y \cos\phi < Z \sin 4\phi$ äquivalent zu

$$\sqrt{2}(A \sin 3\phi - \cos\phi) < C - \sin 2\phi.$$

Wegen $A\sqrt{2}\sin 3\phi = -\tan 3\phi = C$ ist diese Ungleichung äquivalent zu der Ungleichung $\sqrt{2}\cos\phi > \sin 2\phi$ und damit zu $\sqrt{2}\sin\phi < 1$.

(3) Ich zeige $\tau((\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d)) \subset \tau(\mathrm{Int}\,\hat{I}C_1(\omega_d))$. Die Spiegelung an der z_1-Achse überführt den Punkt $\tau((\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d))$ in den Punkt $\tau((\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d))$ und die Halbebene $\tau(\mathrm{Int}\,\hat{I}C_1(\omega_d))$ in sich. Es wurde bereits gezeigt, daß der Punkt $\tau((\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d))$ im Inneren der Halbebene $\tau(\hat{I}C_1(\omega_d))$ liegt, also liegt der Punkt $\tau((\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d))$ im Inneren der Halbebene $\tau(\hat{I}C_1(\omega_d))$.

(4) Ich zeige $\tau((\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_d)) \subset \tau(\mathrm{Int}\,\hat{H}C_1(\omega_d))$. Die Ungleichung der Halbebene $\tau(\mathrm{Int}\,\hat{H}C_1(\omega_d))$ ist $z_1 > Z$. Aus $z \in \tau((\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_d))$ folgt

$$z_1 \sin\phi - z_2 \cos\phi = z_1 \sin\phi + z_2 \cos\phi = X$$

und damit $z_1 \sin\phi = X$. Es bleibt also,

$$X > Z \sin\phi$$

zu zeigen, was nach dem Lemma 178 gilt.

(5) Ich zeige $\tau((\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d)) \subset \tau(\mathrm{Int}\,\hat{I}C_0(\omega_d))$. Die Gleichungen der Geraden und die Ungleichung der Halbebene sind

$$\begin{aligned} z \in \tau(\hat{E}B_2(\omega_d)) &\iff z_1 \sin\phi + z_2 \cos\phi = X, \\ z \in \tau(\hat{E}C_2(\omega_d)) &\iff z_1 \sin 3\phi - z_2 \cos 3\phi = Y, \\ z \in \tau(\hat{I}C_0(\omega_d)) &\iff z_1 \sin 3\phi + z_2 \cos 3\phi \leqslant Y. \end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = -\sin 4\phi < 0$. Es ist also zu zeigen, daß $\Delta < 0$ gilt. Es gilt

$$\Delta = X \sin 6\phi - Y(\sin 4\phi - \sin 2\phi).$$

Wegen $\sin 4\phi - \sin 2\phi = 2 \sin\phi \cos 3\phi$ und $\sin 6\phi = 2 \sin 3\phi \cos 3\phi$ gilt

$$\Delta = 2 \cos 3\phi (X \sin 3\phi - Y \sin\phi).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &(X \sin 3\phi - Y \sin\phi) B \sin 2\phi = \\ &\qquad = -(A \cos 4\phi + \sin 2\phi) \sin 3\phi - (A - \sin 2\phi) \sin\phi \\ &\qquad = -A(\sin\phi + \sin 3\phi \cos 4\phi) - \sin 2\phi(\sin 3\phi - \sin\phi). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\sin\phi = \sin(4\phi - 3\phi) = \sin 4\phi \cos 3\phi - \sin 3\phi \cos 4\phi, \\ &\sin 3\phi - \sin\phi = 2 \sin\phi \cos 2\phi \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} (X \sin 3\phi - Y \sin\phi) B \sin 2\phi &= -\sin 4\phi (A \cos 3\phi + \sin\phi) \\ &= \gamma \cdot \sin 4\phi \end{aligned}$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\phi$. Damit gilt

$$\Delta \cdot B \sin 2\phi = 2 \cos 3\phi \sin 4\phi \cdot \gamma < 0. \blacksquare$$

PROPOSITION 184. *Es gilt* $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(0) \subset \operatorname{Int} \hat{I}B_2(0)$.

BEWEIS. Die Gleichungen der Geraden und die Ungleichung der Halbebene sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{E}B_0(0) &\iff z_1 \cos 5\phi - z_2 \sin 5\phi = -\frac{1}{B}(A \sin 2\phi - 1),\\
z \in \hat{E}D_0(0) &\iff z_1 \cos 3\phi + z_2 \sin 3\phi = \frac{1}{B}(A \sin 6\phi + 1),\\
z \in \hat{I}B_2(0) &\iff z_1 \cos \phi + z_2 \sin \phi \leqslant \frac{1}{B}(A \sin 2\phi - 1).
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = \sin 8\phi < 0$. Es ist also zu zeigen, daß $\Delta < 0$ gilt. Es gilt wegen $\sin 2\phi + \sin 8\phi = 2 \sin 5\phi \cos 3\phi$ und $\sin 6\phi = 2 \sin 3\phi \cos 3\phi$

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot B &= (\sin 2\phi + \sin 8\phi)(A \sin 2\phi - 1) - \sin 6\phi(A \sin 6\phi + 1)\\
&= 2 \cos 3\phi(\sin 5\phi(A \sin 2\phi - 1) - \sin 3\phi(A \sin 6\phi + 1))\\
&= 2A \cos 3\phi(\sin 2\phi \sin 5\phi - \sin 3\phi \sin 6\phi) + 2 \sin \alpha(\sin 3\phi + \sin 5\phi).
\end{aligned}$$

Wegen $A\sqrt{2} \cos 3\phi = -1$, $\sin 3\phi + \sin 5\phi = 2 \sin 4\phi \cos \phi$ und

$$\sin 2\phi \sin 5\phi - \sin 3\phi \sin 6\phi = -\sin \phi \sin 8\phi$$

nach (A1.8) folgt

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot B &= \sqrt{2} \sin \phi \sin 8\phi + 4 \sin 4\phi \cos \phi \sin \alpha\\
&= 2\sqrt{2} \sin 4\phi(\sin \phi \cos 4\phi + \sqrt{2} \cos \phi \sin \alpha).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin \phi \cos 4\phi + \sqrt{2} \cos \phi \sin \alpha &< \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sin \alpha - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right).
\end{aligned}$$

Es gilt $p = 3k + 4$, wobei k eine ungerade natürliche Zahl ist, damit gilt entweder $p \in \{7, 10, 13\}$ oder $p \geqslant 16$. Für $p \geqslant 16$ gilt $\sin \alpha \leqslant \sin \frac{\pi}{16} < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ und damit $\Delta < 0$. Für $p \in \{7, 10, 13\}$ folgt $\Delta < 0$ durch explizite Rechnung. ■

PROPOSITION 185. *Es gilt* $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}D_0)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega)$ *für alle* $\omega \in \mathbb{R}$. *Die Gerade* $\hat{E}C_0(\omega)$ *ist orthogonal zu der (gemeinsamen) winkelhalbierenden Geraden der Sektoren* $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}D_0)(\omega)$ *und* $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}D_0)(\omega)$.

BEWEIS. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}B_0(\omega) &\iff z_1 \cos 5\phi - z_2 \sin 5\phi \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega \cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}D_0(\omega) &\iff z_1 \cos 3\phi + z_2 \sin 3\phi \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin 6\phi + \omega \cos 6\phi) + 1),\\
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \cos \phi - z_2 \sin \phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega \cos 2\phi) - 1).
\end{aligned}$$

Es sei $z \in (\hat{I}B_0 \cap \hat{I}D_0)(\omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&z_1(\cos 3\phi + \cos 5\phi) - z_2(\sin 5\phi - \sin 3\phi)\\
&\qquad \geqslant \frac{A((\sin 6\phi - \sin 2\phi) + \omega(\cos 2\phi + \cos 6\phi)) + 2}{B}
\end{aligned}$$

Wegen $\cos 3\phi + \cos 5\phi = 2\cos\phi\cos 4\phi$, $\sin 5\phi - \sin 3\phi = 2\sin\phi\cos 4\phi$, $\sin 6\phi - \sin 2\phi = 2\sin 2\phi\cos 4\phi$, $\cos 2\phi + \cos 6\phi = 2\cos 2\phi\cos 4\phi$ und $\cos 4\phi < 0$ gilt

$$\begin{aligned} z_1\cos\phi - z_2\sin\phi &\leqslant \frac{A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) + \frac{1}{\cos 4\phi}}{B} \\ &< \frac{A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1}{B}. \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt ferner, daß die Geraden mit den Gleichungen $z_1\cos\phi - z_2\sin\phi =$ const orthogonal zu der (gemeinsamen) winkelhalbierenden Geraden der Sektoren $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}D_0)(\omega)$ und $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}D_0)(\omega)$ ist, also auch die Gerade $\hat{E}C_0(\omega)$. ∎

Definition. Es sei $P' = P'[-\omega_d, \omega_d]$,

$$\begin{aligned} P'[0,\omega^*] &:= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m})[0,\omega^*], \\ P'[\omega^*,\omega_d] &:= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m} \cup \tilde{I}D_{2m})[\omega^*,\omega_d] \end{aligned}$$

und $P'[-\omega_d, 0] := \eta(P'[0,\omega_d])$. Aus der Proposition 68 folgt $P' \subset F_{\mathcal{K}}$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß $\pi(P')$ durch die gleichen Operationen wie P' aus $I_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ gebildet wird und $\pi|_{P'} : P' \to \pi(P')$ ein Homöomorphismus ist. Es sei $\hat{P}'$ durch die gleichen Operationen wie P' aus $\hat{I}_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ gebildet.

Ich untersuche nun die kombinatorische Struktur des Randes von $\hat{P}'$.

Um $\hat{P}'[0,\omega^*]$ zu beschreiben, wende ich (A7.6) mit $H^- = \hat{H}B_0$, $H^+ = \hat{H}C_0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta_d = \frac{\pi}{3} + \frac{2\alpha}{3}$ und mit $\omega^\circ = 0$ an. In den Propositionen 179 und 180 wurden die Voraussetzungen von (A7.6) überprüft. Nach der Proposition 183 liegt der Punkt $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d)$ im Inneren der Halbebene $\hat{I}C_0(\omega_d)$, also gilt $\omega^+ > \omega_d$.

Um $\hat{P}'[\omega^*,\omega_d]$ zu beschreiben, wende ich zuerst (A7.6) mit $H^- = \hat{H}B_0$, $H^+ = \hat{H}D_0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\vartheta_d = \frac{\pi}{6} + \frac{4\alpha}{3}$ und mit $\omega^\circ = \omega_d$ an. In den Propositionen 179 und 182 wurden die Voraussetzungen der Proposition (A7.6) überprüft. Nach der Proposition 184 gilt $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(0) \subset \operatorname{Int}\hat{I}B_2(0)$ und damit $\omega^- < 0$. Nach der Proposition 185 gilt $(\hat{I}B_0 \cap \hat{I}D_0)(\omega) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$, also ist die Strecke zwischen den Punkten $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega)$ und $(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega)$ gleich $(\hat{E}C_0 \cap (\hat{H}B_0 \cap \hat{H}D_0))(\omega)$, und es gilt $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_0(\omega)$. Für eine Gerade E sei

$$d_\bullet(E)(\omega) := d(E(\omega), (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega)).$$

Nach der Proposition 185 ist die Gerade $\hat{E}C_0(\omega)$ orthogonal zu der winkelhalbierenden Geraden des Sektors $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}D_0)(\omega)$, also gilt

$$d_\bullet(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega) = d_\bullet(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega).$$

Aus (A7.6) folgt

$$d_\bullet(\hat{E}D_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega_d) = d_\bullet(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d)$$

und

$$d_\bullet(\hat{E}D_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega^*) > d_\bullet(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}D_0)(\omega^*).$$

Nach der Proposition 181 gilt $(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_d) \subset \operatorname{Int} \hat{H}C_0(\omega_d)$. Nach der Proposition 183 gilt $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega_d)$. Damit gilt für $\omega = \omega_d$

$$\begin{aligned} d_\bullet(\hat{E}D_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega) &= d_\bullet(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}D_0)(\omega) \\ &> d_\bullet(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega) = d_\bullet(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega). \end{aligned}$$

Nach der Proposition 181 gilt $(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega^*) = (\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega^*)$ und damit

$$\begin{aligned} d_\bullet(\hat{E}D_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega) > d_\bullet(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}D_0)(\omega) \\ = d_\bullet(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega) \\ = d_\bullet(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_0)(\omega) \end{aligned}$$

für $\omega = \omega^*$. Damit gilt

$$\begin{aligned} (\hat{E}B_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega) &\subset \operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega), \\ (\hat{E}D_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega) &\subset \hat{H}C_0(\omega), \\ (\hat{E}D_{-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega) &\subset \hat{H}C_0(\omega) \end{aligned}$$

für $\omega \in [\omega^*, \omega_d]$.

Die Kombinatorik der Seitenfläche von $\hat{P}'$ ist in der Abbildung dargestellt. Nach der Proposition 112 gilt $\ell^-_{\mathcal{K}}(\vartheta_d) < 1$. Nach Satz 48 folgt $\hat{P}' \subset L$ und damit $\pi(P') = \hat{P}' \cap L = \hat{P}'$. Ich untersuche jetzt die Lage von P' relativ zu Halbräumen $\tilde{I}B_{2m+1}$ und $\tilde{I}C_{2m+1}$, um mit Hilfe dieser Halbräume aus P' eine Teilmenge $P \subset P'$ zu konstruieren, so daß $\Psi(P)$ ein Fundamentalbereich ist.

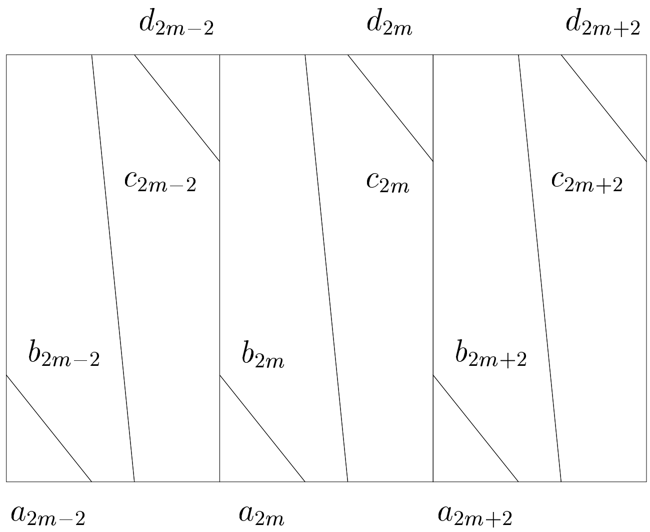


Abbildung 11. Die Seitenfläche von $\hat{P}'$ für $l = 3$.

Proposition 186. *Für den Schnittpunkt $z'(\omega)$ der Geraden $\hat{E}C_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ gilt*

$$z'(\omega) = \frac{A \sin 2\phi - 1}{B \cos \phi} - i\omega \cdot \frac{A \cos 2\phi}{B \sin \phi}.$$

Beweis. Aus den Gleichungen

$$z \in \hat{E}C_0(\omega) \iff z_1 \cos\phi - z_2 \sin\phi = \frac{A\sin 2\phi - 1}{B} + \omega \cdot \frac{A\cos 2\phi}{B}$$
$$z \in \hat{E}B_2(\omega) \iff z_1 \cos\phi + z_2 \sin\phi = \frac{A\sin 2\phi - 1}{B} - \omega \cdot \frac{A\cos 2\phi}{B}$$

läßt sich $z'(\omega)$ leicht ausrechnen. ∎

Proposition 187. *Für den Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ gilt*

$$z''(\omega) = \frac{C\sin 2\phi - 1}{S\sin 2\phi} - i\omega \cdot \frac{C}{S}.$$

Beweis. Aus den Gleichungen

$$z \in \hat{E}B_1(\omega) \iff z_1 \sin 2\phi + z_2 \cos 2\phi = \frac{C\sin 2\phi - 1}{S} - \omega \cdot \frac{C\cos 2\phi}{S}$$
$$z \in \hat{E}C_1(\omega) \iff z_1 \sin 2\phi - z_2 \cos 2\phi = \frac{C\sin 2\phi - 1}{S} + \omega \cdot \frac{C\cos 2\phi}{S}$$

läßt sich $z''(\omega)$ leicht ausrechnen. ∎

Proposition 188. *Die Geraden $\hat{E}D_0(\omega_4)$, $\hat{E}B_2(\omega_4)$ und $\hat{E}C_1(\omega_4)$ schneiden sich in einem Punkt für ein $\omega_4 \in (\omega^*, \omega_d)$. Es gilt*

$(\hat{I}D_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_4$,
$(\hat{I}D_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega) \subset \hat{I}C_1(\omega)$ *für* $\omega \leqslant \omega_4$.

Für den Schnittpunkt $z(\omega)$ der Geraden $\hat{E}D_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ gilt

$z(\omega_4) \in \hat{E}C_1(\omega_4)$,
$z(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_4$,
$z(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_4$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$z \in \hat{I}D_0(\omega) \iff z_1 \cos 3\phi + z_2 \sin 3\phi \geqslant \frac{A(\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi) + 1}{B},$$
$$z \in \hat{I}B_2(\omega) \iff -z_1 \cos\phi - z_2 \sin\phi \geqslant -\frac{A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1}{B},$$
$$z \in \hat{I}C_1(\omega) \iff -z_1 \sin 2\phi + z_2 \cos 2\phi \geqslant -\frac{C(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1}{S}.$$

Ich wende (A7.3) an. Es gilt

$$\delta_1 = -\cos\phi < 0, \quad \delta_2 = -\cos\phi < 0, \quad \delta_3 = \sin 2\phi > 0.$$

Es ist also zu zeigen, daß $\Delta(\omega^*) < 0$ und $\Delta(\omega_d) > 0$ gilt. Es gilt wegen $S = \sqrt{2}B$

$$\begin{aligned}\Delta(\omega) \cdot S = &-\cos\phi\sqrt{2}(A(\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi) + 1)\\ &+ \cos\phi\sqrt{2}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1)\\ &- \sin 2\phi(C(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1)\end{aligned}$$

und wegen $A\sqrt{2}\cos 3\phi = -1$ und $C\cos 3\phi = -\sin 3\phi$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(\omega)\cdot S\cos 3\phi}{\cos\phi} &= (\sin 6\phi + \omega\cos 6\phi) - (\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi)\\ &\quad + 2\sin\phi\sin 3\phi(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi)\\ &\quad + 2\cos 3\phi(\sin\phi - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Wegen $\sin 6\phi - \sin 2\phi = 2\sin 2\phi\cos 4\phi$ und $\cos 6\phi + \cos 2\phi = 2\cos 2\phi\cos 4\phi$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(\omega)\cdot S\cos 3\phi}{2\cos\phi} =& (\cos 4\phi + \sin\phi\sin 3\phi)(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi)\\ &+ \cos 3\phi(\sin\phi - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Wegen $\cos 4\phi = \cos(\phi + 3\phi) = \cos\phi\cos 3\phi - \sin\phi\sin 3\phi$ gilt

$$\frac{\Delta(\omega)\cdot S}{2\cos\phi} = \cos\phi(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) + (\sin\phi - \sqrt{2}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sin 2\phi + \omega^*\cos 2\phi &= \frac{\sqrt{2}(\sin 2\phi\cos\phi - \sin\phi\cos 2\phi) + \cos 2\phi}{\sqrt{2}\cos\phi}\\ &= \frac{\sqrt{2}\sin\phi + \cos 2\phi}{\sqrt{2}\cos\phi}\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\Delta(\omega^*)\cdot S}{\sqrt{2}\cos\phi} = 2\sqrt{2}\sin\phi + \cos 2\phi - 2 = -2\gamma^2 < 0.$$

Es gilt ferner $\sin 2\phi + \omega_d\cos 2\phi = \frac{1}{\sin 2\phi}$ und damit

$$\Delta(\omega_d)\cdot S\tan\phi = 2\gamma^2 > 0. \blacksquare$$

PROPOSITION 189. *Für $\omega \in [\omega_4, \omega_d]$ ist die Schicht*

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}}(\hat{I}B_{2m}\cup\hat{I}C_{2m}\cup\hat{I}D_{2m})(\omega) - \bigcap_{m\in\mathbb{Z}}(\hat{I}D_{2m}\cap\operatorname{Int}\hat{H}C_{2m+1}\cap\hat{I}B_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken

$$\begin{aligned}&(\hat{E}B_{2m}\cap\hat{E}C_{2m})(\omega), \quad (\hat{E}C_{2m}\cap\hat{E}D_{2m})(\omega),\\ &(\hat{E}D_{2m}\cap\hat{E}C_{2m+1})(\omega), \quad (\hat{E}C_{2m+1}\cap\hat{E}B_{2m+2})(\omega)\end{aligned}$$

und den Kanten $\hat{E}C_{2m}(\omega)$, $\hat{E}D_{2m}(\omega)$, $\hat{E}C_{2m+1}(\omega)$ und $\hat{E}B_{2m+2}(\omega)$, genauer gilt:

$$\begin{aligned}&(\hat{E}B_0\cap\hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0\cap\hat{E}D_0)(\omega), (\hat{E}D_0\cap\hat{E}C_1)(\omega),\\ &(\hat{E}C_1\cap\hat{E}B_2)(\omega), (\hat{E}B_2\cap\hat{E}C_2)(\omega), (\hat{E}C_2\cap\hat{E}D_2)(\omega),\\ &(\hat{E}D_2\cap\hat{E}C_3)(\omega), (\hat{E}C_3\cap\hat{E}B_4)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-1}\cap\hat{E}B_0)(\omega)\end{aligned}$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m}\cap\hat{E}C_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m}\cap\hat{E}D_{2m})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m}(\omega)$ enthalten, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}D_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}D_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}D_{2m}(\omega)$ enthalten, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}D_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m+1}(\omega)$ enthalten, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m+2} \cap \hat{E}C_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m+2}(\omega)$ enthalten.

Beweis. Es sei $\omega \in [\omega_4, \omega_d]$. Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m} \cup \hat{I}D_{2m})(\omega)$$

kann auch beschrieben werden als die Vereinigung des konvexen $2p$-Ecks mit den Ecken

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega), (\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}C_2 \cap \hat{E}D_2)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-2} \cap \hat{E}D_{2p-2})(\omega)$$

mit den p Dreiecken, die unter der Anwendung der Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{2i\alpha}$ aus dem Dreieck $\Delta(\omega)$ mit den Ecken $(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega)$, $(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega)$ und $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega)$ entstehen. Das Dreieck $\Delta(\omega)$ ist enthalten im Sektor $(\hat{I}D_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und der Halbebene $\hat{H}C_1(\omega)$. Nach der Proposition 188 gilt

$$(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_4) \subset \hat{E}C_1(\omega_4),$$
$$(\hat{I}D_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega_4) \subset \hat{I}C_1(\omega_4),$$

also gilt $(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_4), (\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d) \subset \hat{I}C_1(\omega_d)$. Nach der Proposition 183 gilt

$$(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega_d) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega_d),$$
$$(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega_d) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega_d),$$
$$(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega_d) \subset \operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega_d).$$

Damit gilt

$$(\hat{E}C_0 \cap \hat{E}D_0)(\omega) \subset \hat{I}C_1(\omega),$$
$$(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega) \subset \hat{I}C_1(\omega),$$
$$(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega)$$

für alle $\omega \in [\omega_4, \omega_d]$, also ist der Durchschnitt der Halbebene $\hat{H}C_1(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Dreieck $(\hat{I}D_0 \cap \hat{H}C_1 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ mit den Ecken $(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega)$, $(\hat{E}D_0 \cap \hat{E}C_1)(\omega)$ und $(\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega)$. ∎

Lemma 190. *Es gilt*

(1) $2A - C = \dfrac{\sqrt{2} - \cos\alpha}{\sin\alpha}$,
(2) $2A^2 - C^2 = 1$,
(3) $A\sqrt{2}\sin 2\phi - C\cos\phi = \sin\phi$,
(4) $2\sin\phi \cdot \dfrac{A\sin 2\phi - 1}{B} - \dfrac{C\sin 2\phi - 1}{S} = \dfrac{2\gamma^2}{S} > 0$,
(5) $0 < \dfrac{A\sin 2\phi - 1}{B} < \dfrac{C\sin 2\phi - 1}{S} < 2\sin\phi \cdot \dfrac{A\sin 2\phi - 1}{B}$.

Beweis. Es gilt

(1) Es gilt $2A - C = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha$.
(2) Es gilt $2A^2 - C^2 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$.
(3) Wegen $A\sqrt{2}\cos 3\phi = -1$ und $C\cos 3\phi = -\sin 3\phi$ gilt
$$(A\sqrt{2}\sin 2\phi - C\cos\phi) \cdot (-\cos 3\phi) = \sin 2\phi - \sin 3\phi\cos\phi.$$
Wegen $\sin 2\phi = \sin(3\phi - \phi) = \sin 3\phi\cos\phi - \sin\phi\cos 3\phi$ folgt
$$A\sqrt{2}\sin 2\phi - C\cos\phi = \sin\phi.$$
(4) Wegen $S = \sqrt{2}B$ gilt
$$\begin{aligned} &2\sin\phi \cdot \frac{A\sin 2\phi - 1}{B} - \frac{C\sin 2\phi - 1}{S} \\ &\quad = \frac{2\sqrt{2}\sin\phi(A\sin 2\phi - 1) - (C\sin 2\phi - 1)}{S}. \end{aligned}$$
Es gilt ferner
$$\begin{aligned} &2\sqrt{2}\sin\phi(A\sin 2\phi - 1) - (C\sin 2\phi - 1) \\ &\quad = 2\sin\phi(A\sqrt{2}\sin 2\phi - C\cos\phi) - 2\sqrt{2}\sin\phi + 1 \\ &\quad = 2\sin^2\phi - 2\sqrt{2}\sin\phi + 1 = 2\gamma^2 > 0. \end{aligned}$$
(5) Es bleibt,
$$0 < \frac{A\sin 2\phi - 1}{B} < \frac{C\sin 2\phi - 1}{S}$$
zu zeigen. Wegen $S = \sqrt{2}B$, $A\sqrt{2}\cos 3\phi = -1$ und $C\cos 3\phi = -\sin 3\phi$ sind diese Ungleichungen äquivalent zu
$$0 < \sin 2\phi + \sqrt{2}\cos 3\phi < \sin 2\phi\sin 3\phi + \cos 3\phi.$$
Dabei gilt
$$\sin 2\phi + \sqrt{2}\cos 3\phi \geqslant \sin\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} > 0$$
und mit (A1.4)
$$\begin{aligned} &(\sin 2\phi\sin 3\phi + \cos 3\phi) - (\sin 2\phi + \sqrt{2}\cos 3\phi) \\ &\quad = -\cos 3\phi(\sqrt{2} - 1) - \sin 2\phi(1 - \sin 3\phi) \\ &\quad > -\cos 3\phi(\sqrt{2} - 1) - (1 - \sin 3\phi) \\ &\quad = \sin\alpha(\sqrt{2} - 1) - (1 - \cos\alpha) \\ &\quad = \sin\alpha((\sqrt{2} - 1) - \tan(\alpha/2)) \\ &\quad \geqslant \sin\alpha((\sqrt{2} - 1) - \tan(\pi/14)) > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

LEMMA 191. *Es gilt*

$$\frac{C\sin\phi}{S}-\frac{A\cos 2\phi}{B}=\frac{\cos\phi}{S}>0$$

und damit

$$\frac{A\cos 2\phi}{B\sin\phi}<\frac{C}{S}.$$

BEWEIS. Wegen $S=\sqrt{2}B$ gilt

$$\frac{C\sin\phi}{S}-\frac{A\cos 2\phi}{B}=\frac{1}{S}(C\sin\phi-A\sqrt{2}\cos 2\phi).$$

Wegen $A\sqrt{2}\cos 3\phi=-1$ und $C\cos 3\phi=-\sin 3\phi$ gilt

$$(C\sin\phi-A\sqrt{2}\cos 2\phi)\cdot(-\cos 3\phi)=\sin 3\phi\sin\phi-\cos 2\phi.$$

Wegen $\cos 2\phi=\cos(3\phi-\phi)=\cos\phi\cos 3\phi+\sin\phi\sin 3\phi$ folgt

$$C\sin\phi-A\sqrt{2}\cos 2\phi=\cos\phi. \blacksquare$$

PROPOSITION 192. *Die Geraden $\hat{E}C_0(\omega_1)$, $\hat{E}B_1(\omega_1)$ und $\hat{E}C_1(\omega_1)$ schneiden sich in einem Punkt.*

BEWEIS. In der Proposition 187 wurde der Schnittpunkt

$$z''(\omega)=\frac{C\sin 2\phi-1}{S\sin 2\phi}-i\omega\cdot\frac{C}{S}$$

der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ berechnet. Ich setze $z''(\omega)$ in die Gleichung

$$z_1\cos\phi-z_2\sin\phi=\frac{A(\sin 2\phi+\omega\cos 2\phi)-1}{B}$$

der Geraden $\hat{E}C_0(\omega)$ ein und erhalte dann

$$\omega\cdot\left(\frac{C\sin\phi}{S}-\frac{A\cos 2\phi}{B}\right)=\frac{A\sin 2\phi-1}{B}-\frac{C\sin 2\phi-1}{2S\sin\phi}.$$

Nach den Lemmata 190 und 191 gilt

$$\frac{A\sin 2\phi-1}{B}-\frac{C\sin 2\phi-1}{2S\sin\phi}=\frac{\gamma^2}{S\sin\phi},\quad \frac{C\sin\phi}{S}-\frac{A\cos 2\phi}{B}=\frac{\cos\phi}{S}$$

und damit

$$\omega=\frac{\gamma^2}{\sin\phi\cos\phi}=\frac{2\gamma^2}{\sin 2\phi}=\omega_1. \blacksquare$$

PROPOSITION 193. *Die Geraden $\hat{E}C_0(\omega_2)$, $\hat{E}B_2(\omega_2)$ und $\hat{E}C_1(\omega_2)$ schneiden sich in einem Punkt.*

BEWEIS. In der Proposition 186 wurde der Schnittpunkt

$$z'(\omega) = \frac{A\sin 2\phi - 1}{B\cos\phi} - i\omega\cdot\frac{A\cos 2\phi}{B\sin\phi}$$

der Geraden $\hat{E}C_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ ausgerechnet. Ich setze $z'(\omega)$ in die Gleichung

$$z_1\sin 2\phi - z_2\cos 2\phi = \frac{C(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1}{S}$$

der Geraden $\hat{E}C_1(\omega)$ ein und erhalte dann

$$\omega\cos 2\phi\cdot\left(\frac{C}{S} - \frac{A\cos 2\phi}{B\sin\phi}\right) = 2\sin\phi\cdot\frac{A\sin 2\phi - 1}{B} - \frac{C\sin 2\phi - 1}{S}.$$

Nach den Lemmata 190 und 191 gilt

$$2\sin\phi\cdot\frac{A\sin 2\phi - 1}{B} - \frac{C\sin 2\phi - 1}{S} = \frac{2\gamma^2}{S},\quad \frac{C}{S} - \frac{A\cos 2\phi}{B\sin\phi} = \frac{\operatorname{ctg}\phi}{S}$$

und damit

$$\omega = \frac{2\gamma^2\tan\phi}{\cos 2\phi} = \omega_2. \blacksquare$$

PROPOSITION 194. *Es gilt*

$(\hat{I}C_0\cap\hat{I}B_2)(\omega) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_2$,
$(\hat{I}C_0\cap\hat{I}B_2)(\omega) \subset \hat{I}C_1(\omega)$ *für* $\omega \geqslant \omega_2$.

Für den Schnittpunkt $z'(\omega)$ der Geraden $\hat{E}C_0(\omega)$ und $\hat{E}B_2(\omega)$ gilt

$z'(\omega_2) \in \hat{E}C_1(\omega_2)$,
$z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_2$,
$z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_2$.

BEWEIS. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z\in\hat{I}C_0(\omega) &\iff -z_1\cos\phi + z_2\sin\phi \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z\in\hat{I}B_2(\omega) &\iff -z_1\cos\phi - z_2\sin\phi \geqslant -\frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z\in\hat{I}C_1(\omega) &\iff -z_1\sin 2\phi + z_2\cos 2\phi \geqslant -\frac{1}{S}(C(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1).
\end{aligned}$$

Ich wende (A7.3) an. Es gilt

$$\delta_1 = -\cos\phi < 0,\quad \delta_2 = \cos 3\phi = -\sin\alpha < 0,\quad \delta_3 = \sin 2\phi > 0.$$

Nach der Proposition 193 schneiden sich die Geraden $\hat{E}C_0(\omega_2)$, $\hat{E}B_2(\omega_2)$ und $\hat{E}C_1(\omega_2)$ in einem Punkt, also gilt $\Delta(\omega_2) = 0$. Nach der Proposition 181 schneiden sich die Geraden $\hat{E}C_0(\omega^*)$, $\hat{E}D_0(\omega^*)$ und $\hat{E}B_2(\omega^*)$ in einem Punkt, es gilt also $(\hat{E}C_0\cap\hat{E}B_2)(\omega^*) = (\hat{E}D_0\cap\hat{E}B_2)(\omega^*)$. Nach der Proposition 188 gilt $(\hat{E}D_0\cap\hat{E}B_2)(\omega^*) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega^*)$, also folgt $\Delta(\omega^*) < 0$. Es gilt $0 < \omega_2 < \omega^*$ nach der Proposition 177. Damit gilt $\Delta(\omega_2) = 0$, $\Delta(\omega) > 0$ für $\omega < \omega_2$ und $\Delta(\omega) < 0$ für $\omega > \omega_2$. $\blacksquare$

Proposition 195. *Für die Spitzen $z'(\omega)$ bzw. $z''(\omega)$ der Sektoren $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ bzw. $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ gilt:*

$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega)$ *und* $z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_2(\omega)$ *für* $\omega \geqslant 0$,
$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega)$ *für* $\omega < \omega_2$ *und* $z'(\omega) \notin \hat{H}C_1(\omega)$ *für* $\omega > \omega_2$,
$z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega)$ *für* $\omega < \omega_1$ *und* $z''(\omega) \notin \hat{I}C_0(\omega)$ *für* $\omega > \omega_1$.

Beweis. Die Ungleichungen der Halbebenen sind

$$\begin{aligned}
z \in \hat{I}C_0(\omega) &\iff z_1 \cos\phi - z_2 \sin\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{I}B_2(\omega) &\iff z_1 \cos\phi + z_2 \sin\phi \leqslant \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{H}B_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\phi + z_2 \cos 2\phi \geqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\
z \in \hat{H}C_1(\omega) &\iff z_1 \sin 2\phi - z_2 \cos 2\phi \geqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1).
\end{aligned}$$

Nach den Propositionen 186 und 187 gilt

$$z'(\omega) = \frac{A\sin 2\phi - 1}{B\cos\phi} - i\omega \cdot \frac{A\cos 2\phi}{B\sin\phi}, \quad z''(\omega) = \frac{C\sin 2\phi - 1}{S\sin 2\phi} - i\omega \cdot \frac{C}{S}.$$

Es sei $\omega \geqslant 0$. Nach den Lemmata 190 und 191 gilt

$$0 < z_1''(\omega) < z_1'(\omega) \quad \text{und} \quad z_2''(\omega) \leqslant z_2'(\omega) \leqslant 0$$

und folglich

$$\begin{aligned}
z_1'(\omega)\sin 2\phi + z_2'(\omega)\cos 2\phi &> z_1''(\omega)\sin 2\phi + z_2''(\omega)\cos 2\phi,\\
z_1''(\omega)\cos\phi + z_2''(\omega)\sin\phi &< z_1'(\omega)\cos\phi + z_2'(\omega)\sin\phi.
\end{aligned}$$

Aus $z''(\omega) \in \hat{E}B_1(\omega)$ und $z'(\omega) \in \hat{E}B_2(\omega)$ folgt damit

$$z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}B_1(\omega), \quad z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}B_2(\omega).$$

Für $\omega = 0$ gilt $0 < z_1''(0) < z_1'(0)$ und $z_2''(0) = z_2'(0) = 0$ und folglich

$$\begin{aligned}
z_1'(0)\sin 2\phi - z_2'(0)\cos 2\phi &> z_1''(0)\sin 2\phi - z_2'(0)\cos 2\phi,\\
z_1''(0)\cos\phi - z_2''(0)\sin\phi &< z_1''(0)\cos\phi - z_2''(0)\sin\phi.
\end{aligned}$$

Aus $z''(0) \in \hat{E}C_1(0)$ und $z'(0) \in \hat{E}C_0(0)$ folgt damit

$$z'(0) \in \operatorname{Int} \hat{H}C_1(0), \quad z''(0) \in \operatorname{Int} \hat{I}C_0(0).$$

Der Punkt $z'(\omega)$ liegt in $\operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega)$ für $\omega = 0$ und nach der Proposition 194 in $\hat{E}C_1(\omega)$ für $\omega = \omega_2 > 0$, also gilt $z'(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{H}C_1(\omega)$ für $\omega < \omega_2$ und $z'(\omega) \notin \hat{H}C_1(\omega)$ für $\omega > \omega_2$. gilt $z''(\omega_1) \in \hat{E}C_0(\omega_1)$. Der Punkt $z''(\omega)$ liegt in $\operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega)$ für $\omega = 0$ und nach der Proposition 192 in $\hat{E}C_0(\omega)$ für $\omega = \omega_1 > 0$, also gilt $z''(\omega) \in \operatorname{Int} \hat{I}C_0(\omega)$ für $\omega < \omega_1$ und $z''(\omega) \notin \hat{I}C_0(\omega)$ für $\omega > \omega_1$. ∎

PROPOSITION 196. *Aus der Proposition 195 folgt für die Spitzen $z'(\omega)$ bzw. $z''(\omega)$ der Sektoren $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ bzw. $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$*

$z'(\omega) \in (\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ *für* $\omega \in [0,\omega_2]$,
$z'(\omega) \in \mathrm{Int}(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ *für* $\omega \in [0,\omega_2)$,
$z''(\omega) \in (\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ *für* $\omega \in [0,\omega_1]$,
$z''(\omega) \in \mathrm{Int}(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ *für* $\omega \in [0,\omega_1)$. ■

PROPOSITION 197. *Für den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ gilt*

$$z'''(\omega) = \left(\frac{A}{B}\cdot\omega + i\cdot\frac{A\sin 2\phi - 1}{B\sin 2\phi}\right)\cdot e^{-3i\phi}.$$

BEWEIS. Die Gleichungen der Geraden sind

$$\begin{aligned} z \in \hat{E}B_0(\omega) &\iff z_1\cos 5\phi - z_2\sin 5\phi = -\frac{A\sin 2\phi - 1}{B} + \omega\cdot\frac{A\cos 2\phi}{B},\\ z \in \hat{E}C_0(\omega) &\iff z_1\cos\phi - z_2\sin\phi = +\frac{A\sin 2\phi - 1}{B} + \omega\cdot\frac{A\cos 2\phi}{B}. \end{aligned}$$

Die Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{3i\phi}$ von $\mathbb{C}$ überführt den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ in den Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1\cos 2\phi - z_2\sin 2\phi &= -\frac{A\sin 2\phi - 1}{B} + \omega\cdot\frac{A\cos 2\phi}{B},\\ z_1\cos 2\phi + z_2\sin 2\phi &= +\frac{A\sin 2\phi - 1}{B} + \omega\cdot\frac{A\cos 2\phi}{B}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich leicht ausrechnen

$$z'''(\omega)\cdot e^{3i\phi} = \frac{A}{B}\cdot\omega + i\cdot\frac{A\sin 2\phi - 1}{B\sin 2\phi}. \blacksquare$$

PROPOSITION 198. *Für den Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ und den Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ gilt $|z'''(\omega)| < |z''(\omega)|$ für $\omega \in [0,\omega_1]$.*

BEWEIS. Nach der Proposition 197 gilt

$$|z'''(\omega)|^2 = \frac{1}{B^2}\cdot\left(\frac{(A\sin 2\phi - 1)^2}{\sin^2 2\phi} + A^2\cdot\omega^2\right).$$

Nach der Proposition 187 gilt

$$|z''(\omega)|^2 = \frac{1}{S^2}\cdot\left(\frac{(C\sin 2\phi - 1)^2}{\sin^2 2\phi} + C^2\cdot\omega^2\right).$$

Es sei $f(\omega) := |z''(\omega)|^2 - |z'''(\omega)|^2$. Wegen $S^2 = 2B^2$ gilt

$$f(\omega)\cdot S^2\sin^2 2\phi = ((C\sin 2\phi - 1)^2 - 2(A\sin 2\phi - 1)^2) + \omega^2(C^2 - 2A^2)\sin^2 2\phi.$$

Nach dem Lemma 190 gilt $2A - C = \frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ und $2A^2 - C^2 = 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} (C\sin 2\phi - 1)^2 - 2(A\sin 2\phi - 1)^2 &= (C^2 - 2A^2)\sin^2 2\phi + 2(2A - C)\sin 2\phi - 1\\ &= 2\sin 2\phi\cdot\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 - \sin^2 2\phi \end{aligned}$$

und

$$f(\omega)\cdot S^2\sin^2 2\phi = 2\sin 2\phi\cdot\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 - \sin^2 2\phi - \omega^2\sin^2 2\phi.$$

Für $\omega\in[0,\omega_1]$ mit $\omega_1 = \frac{2\gamma^2}{\sin 2\phi}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\omega)\cdot S^2\sin^2 2\phi &\geqslant f(\omega_1)\cdot S^2\sin^2 2\phi \\ &= 2\sin 2\phi\cdot\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 - \sin^2 2\phi - 4\gamma^4. \end{aligned}$$

Es gilt $p = 3k+4$, wobei k eine ungerade natürliche Zahl ist, damit ist p entweder aus $\{7,10,13\}$, oder es gilt $p\geqslant 14$. Für $p\geqslant 14$ gilt

$$\begin{aligned} &\sin\alpha \leqslant \sin(\pi/14),\\ &\sin 2\phi > \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2,\\ &\cos\alpha < 1 \quad\text{und}\quad \sin^2 2\phi, 4\gamma^4 < 1 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} f(\omega_1)\cdot S^2\sin^2 2\phi &= 2\sin 2\phi\cdot\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 - \sin^2 2\phi - 4\gamma^4 \\ &\geqslant \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sin(\pi/14)} - 3 > 0. \end{aligned}$$

Für $p\in\{7,10,13\}$ folgt $f(\omega_1) > 0$ durch explizite Rechnung. ∎

Proposition 199. *Für $\omega\in[0,\omega_1]$ liegt der Schnittpunkt $z''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_1(\omega)$ und $\hat{E}C_1(\omega)$ außerhalb des regelmäßigen p-Ecks mit den Ecken $z'''(\omega)e^{2ij\alpha}$, $0\leqslant j<p$, wobei $z'''(\omega)$ der Schnittpunkt der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ ist.*

Beweis. Nach der Proposition 198 liegt der Punkt $z''(\omega)$ sogar außerhalb des dem Polygon umbeschriebenen Kreises. ∎

Proposition 200. *Der Schnittpunkt $z'''(\omega)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega)$ und $\hat{E}C_0(\omega)$ liegt in* Int *$\hat{I}B_1(\omega)$ für $\omega\geqslant 0$.*

Beweis. Die Gleichungen der Geraden und die Ungleichung der Halbebene sind

$$\begin{aligned} z\in\hat{E}B_0(\omega) &\iff -z_1\cos 5\phi + z_2\sin 5\phi = \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1),\\ z\in\hat{E}C_0(\omega) &\iff z_1\cos\phi - z_2\sin\phi = \frac{1}{B}(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1),\\ z\in\hat{I}B_1(\omega) &\iff z_1\sin 2\phi + z_2\cos 2\phi \leqslant \frac{1}{S}(C(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1). \end{aligned}$$

Ich wende (A7.1) an. Es gilt $\delta = -\sin 4\phi < 0$. Es ist also zu zeigen, daß $\Delta(\omega) < 0$ für $\omega\geqslant 0$ gilt. Es gilt wegen $S=\sqrt{2}B$

$$\begin{aligned} \Delta(\omega)\cdot S =& \sqrt{2}\cos\phi(A(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1)\\ &- \sin 4\phi(C(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) - 1)\\ &+ \sqrt{2}\cos 3\phi(A(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi) - 1) \end{aligned}$$

und wegen $C\cos 3\phi = -\sin 3\phi$ und $A\sqrt{2}\cos 3\phi = -1$

$$\begin{aligned}\Delta(\omega)\cdot S\cos 3\phi =& (\sin 3\phi\sin 4\phi - \cos\phi)(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi)\\ & - \cos 3\phi(\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi)\\ & + \cos 3\phi(\sin 4\phi - \sqrt{2}(\cos\phi + \cos 3\phi)).\end{aligned}$$

Wegen $\cos\phi = \cos(4\phi - 3\phi) = \cos 3\phi\cos 4\phi + \sin 3\phi\sin 4\phi$, $\sin 4\phi = 4\sin\phi\cos\phi\cos 2\phi$ und $\cos\phi + \cos 3\phi = 2\cos\phi\cos 2\phi$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta(\omega)\cdot S =& 4\cos\phi\cos 2\phi(\sin\phi - \frac{1}{\sqrt{2}})\\ & - \cos 4\phi(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi)\\ & - (\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}&\cos 4\phi(\sin 2\phi - \omega\cos 2\phi) + (\sin 2\phi + \omega\cos 2\phi)\\ &\quad = \sin 2\phi(\cos 4\phi + 1) - \omega\cos 2\phi(\cos 4\phi - 1)\\ &\quad = \sin 2\phi(2\cos^2 2\phi) - \omega\cos 2\phi(-2\sin^2 2\phi)\\ &\quad = 4\sin\phi\cos\phi\cos 2\phi(\omega\sin 2\phi + \cos 2\phi)\end{aligned}$$

folgt

$$\Delta(\omega)\cdot S = 4\cos\phi\cos 2\phi((\sin\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \sin\phi(\omega\sin 2\phi + \cos 2\phi)).$$

Für $\omega \geqslant 0$ gilt also

$$\frac{\Delta(\omega)\cdot S}{4\cos\phi\cos 2\phi} \leqslant \frac{\Delta(0)\cdot S}{4\cos\phi\cos 2\phi} = (\sin\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \sin\phi\cos 2\phi < 0. \blacksquare$$

Proposition 201. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega_1)$ *liegt in* $\operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega_1)$.

Beweis. Nach der Proposition 192 schneiden sich die Geraden $\hat{E}C_0(\omega_1)$, $\hat{E}B_1(\omega_1)$ und $\hat{E}C_1(\omega_1)$ in einem Punkt. Nach der Proposition 196 liegt die Spitze $z'(\omega_1)$ des Sektors $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega_1)$ in $\operatorname{Int}(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega_1)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}z'(\omega_1) \in \operatorname{Int}(\hat{E}C_0 \cap \hat{H}B_1)(\omega_1) &= \operatorname{Int}(\hat{E}C_0 \cap \hat{H}C_1)(\omega_1),\\ \operatorname{Int}(\hat{E}C_0 \cap \hat{I}B_1)(\omega_1) &= \operatorname{Int}(\hat{E}C_0 \cap \hat{I}C_1)(\omega_1).\end{aligned}$$

Nach der Proposition 200 gilt $z'''(\omega_1) \in \operatorname{Int}\hat{I}B_1(\omega_1)$ für den Schnittpunkt $z'''(\omega_1)$ der Geraden $\hat{E}B_0(\omega_1)$ und $\hat{E}C_0(\omega_1)$, es folgt also $z'''(\omega_1) \in \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega_1)$. $\blacksquare$

Proposition 202. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega^*)$ *liegt in* $\operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega^*)$.

Beweis. Aus der Beschreibung von $\pi(P')(\omega^*)$ folgt, daß die Ecke $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega^*)$ von $\pi(P')(\omega^*)$ im Sektor $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*)$ liegt, und nach der Proposition 194 gilt $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*) \subset \operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega^*)$. $\blacksquare$

Proposition 203. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega)$ *liegt in* $\operatorname{Int}\hat{I}C_1(\omega)$ *für alle* ω *aus dem Intervall* $[\omega_1, \omega^*]$.

Beweis. Nach den Propositionen 201 und 202 gilt die Behauptung für $\omega = \omega_1$ und für $\omega = \omega^*$, also auch für alle $\omega \in [\omega_1, \omega^*]$. $\blacksquare$

Proposition 204. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(0)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}C_1(0)$.

Beweis. Die Ungleichung der Halbebene $\hat{I}C_1(0)$ ist

$$z \in \hat{I}C_1(0) \iff z_1 \sin 2\phi - z_2 \cos 2\phi \leqslant \frac{C \sin 2\phi - 1}{S}.$$

Für den Schnittpunkt $\zeta = z'''(0)e^{2i\alpha}$ der Geraden $\hat{E}B_2(0)$ und $\hat{E}C_2(0)$ gilt nach der Proposition 197

$$\zeta = z'''(0) \cdot e^{2i\alpha} = i \cdot \frac{A \sin 2\phi - 1}{B \sin 2\phi} \cdot e^{i(2\alpha - 3\phi)}.$$

Damit gilt nach dem Lemma 190 und wegen $\cos(2\alpha - 3\phi) = \sin\alpha > 0$

$$\zeta_1 < |\zeta| = \frac{A \sin 2\phi - 1}{B \sin 2\phi} < \frac{C \sin 2\phi - 1}{S \sin 2\phi},$$
$$\zeta_2 = \frac{A \sin 2\phi - 1}{B \sin 2\phi} \cdot \cos(2\alpha - 3\phi) > 0,$$

also gilt

$$\zeta_1 \sin 2\phi - \zeta_2 \cos 2\phi < \frac{C \sin 2\phi - 1}{S}$$

und damit $\zeta \in \operatorname{Int} \hat{I}C_1(0)$. ∎

Proposition 205. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega^*)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega^*)$.

Beweis. Aus der Beschreibung von $\pi(P')(\omega^*)$ folgt, daß die Ecke $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega^*)$ von $\pi(P')(\omega^*)$ im Sektor $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*)$ liegt, und nach der Proposition 194 gilt $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega^*) \subset \operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega^*)$. ∎

Proposition 206. *Der Schnittpunkt* $(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega)$ *liegt in* $\operatorname{Int} \hat{I}C_1(\omega)$ *für* ω *aus* $[0, \omega^*]$.

Beweis. Nach den Propositionen 204 und 205 gilt die Behauptung für $\omega = 0$ und für $\omega = \omega^*$, also auch für alle $\omega \in [0, \omega^*]$. ∎

Proposition 207. *Für* $\omega \in [0, \omega_1]$ *ist die Schicht*

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega) - \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{I}C_{2m} \cap \operatorname{Int} \hat{H}B_{2m+1} \cap \operatorname{Int} \hat{H}C_{2m+1} \cap \hat{I}B_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}B_m \cap \hat{E}C_m)(\omega)$ *und* $(\hat{E}C_m \cap \hat{E}B_{m+1})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}B_m(\omega)$ *und* $\hat{E}C_m(\omega)$*, genauer gilt:*

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega), (\hat{E}B_1 \cap \hat{E}C_1)(\omega),$$
$$(\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-1} \cap \hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}C_{m-1} \cap \hat{E}B_m)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_m \cap \hat{E}C_m)(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_m(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}B_m \cap \hat{E}C_m)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_m \cap \hat{E}B_{m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_m(\omega)$ *enthalten.*

Für $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ *ist die Schicht*

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega) - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}C_{2m} \cap \operatorname{Int} \hat{H}C_{2m+1} \cap \hat{I}B_{2m+2})(\omega)$$

das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega)$, $(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega)$ *und* $(\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$ *und den Kanten in* $\hat{E}C_{2m}(\omega)$, $\hat{E}C_{2m+1}(\omega)$ *und* $\hat{E}B_{2m+2}(\omega)$, *genauer gilt*

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}C_1)(\omega), (\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-1} \cap \hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m}(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}C_{2m+1})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m+1}(\omega)$ *enthalten, die Kante zwischen den Ecken*

$$(\hat{E}C_{2m+1} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m+2} \cap \hat{E}C_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m+2}(\omega)$ *enthalten.*

Beweis. Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega)$$

für $\omega \in [0, \omega^*]$ ist das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega)$ und $(\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$ und den Kanten in $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ und $\hat{E}C_{2m}(\omega)$, genauer gilt:

$$(\hat{E}B_0 \cap \hat{E}C_0)(\omega), (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_2)(\omega), (\hat{E}B_2 \cap \hat{E}C_2)(\omega),$$
$$(\hat{E}C_2 \cap \hat{E}B_4)(\omega), \ldots, (\hat{E}C_{2p-2} \cap \hat{E}B_0)(\omega)$$

sind die Ecken im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}C_{2m-2} \cap \hat{E}B_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}B_{2m}(\omega)$ enthalten, die Kante zwischen den Ecken

$$(\hat{E}B_{2m} \cap \hat{E}C_{2m})(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_{2m} \cap \hat{E}B_{2m+2})(\omega)$$

ist in der Geraden $\hat{E}C_{2m}(\omega)$ enthalten.

Ich bezeichne die Spitze des Sektors $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ durch $z'(\omega)$, die Spitze des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ durch $z''(\omega)$ und die Spitze des Sektors $(\hat{H}B_0 \cap \hat{H}C_0)(\omega)$ durch $z'''(\omega)$.

Die Schicht

$$\pi(P')(\omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\hat{I}B_{2m} \cup \hat{I}C_{2m})(\omega)$$

für $\omega \in [0,\omega^*]$ kann auch beschrieben werden als die Vereinigung des p-Ecks $\Pi(\omega)$ mit den Ecken $z'''(\omega)e^{2ij\alpha}$ mit den p Dreiecken, die unter der Anwendung der Drehung $\zeta \mapsto \zeta e^{2i\alpha}$ aus dem Dreieck $\Delta(\omega)$ mit den Ecken $z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha}, z'(\omega)$ entstehen.

Es sei $\omega \in [0,\omega_1]$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ mit Spitze im Punkte $z''(\omega)$. Nach der Proposition 196 liegt der Punkt $z''(\omega)$ im Sektor $(\hat{I}C_0 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$, nach der Proposition 199 liegt der Punkt $z''(\omega)$ außerhalb des regelmäßigen p-Ecks $\Pi(\omega)$, also liegt die Spitze $z''(\omega)$ des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ im Dreieck $\Delta(\omega)$. Nach den Propositionen 196, 200 und 206

$$z'(\omega) \in (\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega), \quad z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha} \notin (\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$$

Damit ist der Durchschnitt des Sektors $(\hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1)(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Viereck $(\hat{I}C_0 \cap \hat{H}B_1 \cap \hat{H}C_1 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ mit den Ecken

$$z'(\omega), \quad (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}B_1)(\omega), \quad z''(\omega), \quad (\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega).$$

Es sei $\omega \in [\omega_1,\omega_2]$. Ich betrachte die relative Lage des Dreiecks $\Delta(\omega)$ und der Halbebene $\hat{H}C_1(\omega)$. Nach den Propositionen 195, 203 und 206 gilt

$$z'(\omega) \in \operatorname{Int}\hat{H}C_1(\omega), \quad z'''(\omega), z'''(\omega)e^{2i\alpha} \notin \hat{H}C_1(\omega).$$

Damit ist der Durchschnitt der Halbebene $\hat{H}C_1(\omega)$ mit dem Dreieck $\Delta(\omega)$ gleich dem Dreieck $(\hat{I}C_0 \cap \hat{H}C_1 \cap \hat{I}B_2)(\omega)$ mit den Ecken

$$z'(\omega), \quad (\hat{E}C_0 \cap \hat{E}C_1)(\omega) \quad \text{und} \quad (\hat{E}C_1 \cap \hat{E}B_2)(\omega). \blacksquare$$

Definition. Es sei $P = P[-\omega_d,\omega_d]$ und

$$\begin{aligned}
P[0,\omega_1] &= P'[0,\omega_1] - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{H}C^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2})[0,\omega_1] \\
&= \left(\begin{array}{l} \displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m}) \\ \qquad \displaystyle - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}B^\circ_{2m+1} \cap \tilde{H}C^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2}) \end{array} \right)[0,\omega_1], \\
P[\omega_1,\omega_2] &= P'[\omega_1,\omega_2] - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}C^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2})[\omega_1,\omega_2] \\
&= \left(\begin{array}{l} \displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m}) \\ \qquad \displaystyle - \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}C_{2m} \cap \tilde{H}C^\circ_{2m+1} \cap \tilde{I}B_{2m+2}) \end{array} \right)[\omega_1,\omega_2], \\
P[\omega_2,\omega_3] &= \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m} \cup \tilde{I}C_{2m})[\omega_2,\omega_3],
\end{aligned}$$

$$P[\omega_3,\omega_4] = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m}\cup\tilde{I}C_{2m}\cup\tilde{I}D_{2m})[\omega_3,\omega_4],$$

$$P[\omega_4,\omega_d] = P'[\omega_4,\omega_d] - \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}D_{2m}\cap \operatorname{Int}\tilde{H}C_{2m+1}\cap\tilde{I}B_{2m+2})[\omega_4,\omega_d]$$

$$= \left(\begin{array}{l} \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}B_{2m}\cup\tilde{I}C_{2m}\cup\tilde{I}D_{2m}) \\ \qquad - \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (\tilde{I}D_{2m}\cap\tilde{H}C^\circ_{2m+1}\cap\tilde{I}B_{2m+2}) \end{array}\right)[\omega_4,\omega_d],$$

$$P[-\omega_d,0] = \eta(P[0,\omega_d]).$$

Es gilt $\pi(P)\subset\pi(P')=\hat{P}'\subset L$. Aus den Propositionen 45 und 69 folgt, daß $\pi(P)$ durch die gleichen Operationen wie P aus $I_{m,j}$ und $H_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ und $\tilde{H}_{m,j}$ gebildet wird und $\pi|_P : P\to\pi(P)$ ein Homöomorphismus ist. Es sei $\hat{P}$ durch die gleichen Operationen wie P aus $\hat{I}_{m,j}$ und $\hat{H}_{m,j}$ statt $\tilde{I}_{m,j}$ und $\tilde{H}_{m,j}$ gebildet. Aus $\hat{P}'=\pi(P')$ folgt $\pi(P)=\hat{P}$. Aus der Beschreibung von P' und den Propositionen 189 und 207 ergibt sich eine Bescheibung von P.
Betrachtet man die Schichten $\pi(P)(\omega)$ genauer, so sieht man, daß die Seitenflächen der Stücke $P[-\omega_d,0]$, $P[0,\omega_1]$, $P[\omega_i,\omega_{i+1}]$ mit $i\in\{1,2,3\}$ und $P[\omega_4,\omega_d]$ so zusammenpassen, daß P keine horizontalen in den Ebenen $\{\omega=0\}$ bzw. $\{\omega=\omega_i\}$ mit $i\in\{1,2,3,4\}$ enthaltenen Kanten hat. Die Kombinatorik der Seitenfläche von P ist in der Abbildung dargestellt, wobei b_n für ungerades n zu den beiden unteren Dreiecken und c_n zu den beiden oberen Dreiecken gehört.

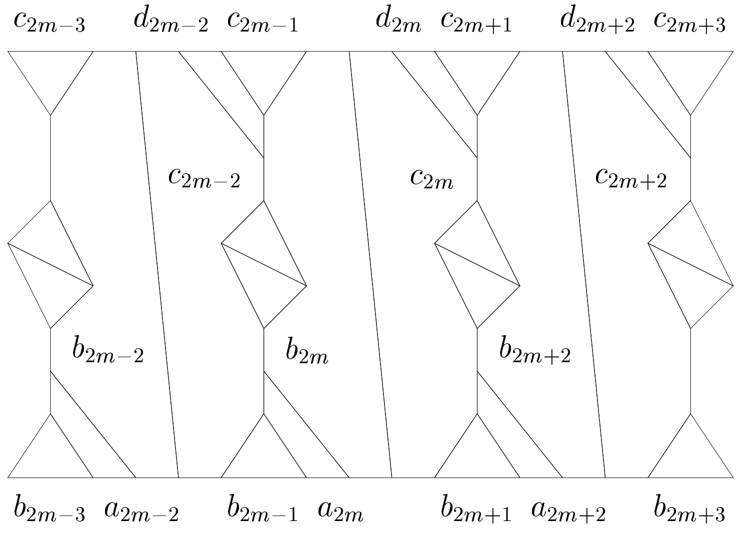


Abbildung 12. Die Seitenfläche von P für $l=3$.

Proposition 208. *Nach der Proposition* 113 *gilt*

$$a_m^{-1}=d_{m-4},\quad b_m^{-1}=c_{m-(2k+4)},$$
$$c_m^{-1}=b_{m+(2k+4)},\quad d_m^{-1}=a_{m+4},$$
$$a_m r_d=b_m,\quad b_m r_d=c_m,\quad c_m r_d=d_m,$$

$$\begin{aligned}
&b_m r_d^{-1} = a_m, \quad c_m r_d^{-1} = b_m, \quad d_m r_d^{-1} = c_m,\\
&r_d^{-1} b_m = a_{m-2k}, \quad r_d^{-1} c_m = b_{m-2k}, \quad r_d^{-1} d_m = c_{m-2k},\\
&r_d a_m = b_{m+2k}, \quad r_d b_m = c_{m+2k}, \quad r_d c_m = d_{m+2k}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_{2m}^{-1} &= \tilde\rho^{-2}(a_{2m+2}) a_{2m-1}^{-1} = \tilde\rho^{-2}(a_{2m+1}) a_{2m-2}^{-1}\\
&= \tilde\rho^{-2}(d_{2m-1}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde\rho^{-2}(d_{2m-2}) a_{2m+1}^{-1},\\
a_{2m+1}^{-1} &= \tilde\rho^{-2}(d_{2m}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde\rho^{-2}(a_{2m+2}) a_{2m}^{-1},\\
b_{2m}^{-1} &= \tilde\rho^{-(k+2)}(c_{2m-1}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde\rho^{-(k+2)}(c_{2m-2}) a_{2m+1}^{-1}\\
&= \tilde\rho^{-(k+2)}(a_{2m+2}) b_{2m-1}^{-1} = \tilde\rho^{-(k+2)}(a_{2m+1}) b_{2m-2}^{-1},\\
b_{2m+1}^{-1} &= \tilde\rho^{-(k+2)}(c_{2m}) a_{2m+2}^{-1} = \tilde\rho^{-(k+2)}(a_{2m+2}) b_{2m}^{-1}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Satz 209. *$\Psi(P)$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde\Gamma$ auf $\tilde G$.*

Beweis. Um den Satz 55 anzuwenden, beschreibe ich die Identifikationen am Rande von P unter der Operation von $\tilde\Gamma$

$$\begin{aligned}
&(r_d; b_m, c_m, d_m) \mapsto \tilde\rho^{-k}(r_d^{-1}; a_m, b_m, c_m),\\
&(a_{2m}; r_d^{-1}, b_{2m-1}, c_{2m-2}, b_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{-2}(d_{2m}; c_{2m}, b_{2m+2}, c_{2m+1}, r_d),\\
&(b_{2m}; r_d^{-1}, a_{2m}, c_{2m-2}, b_{2m-1}, c_{2m-1}, c_{2m-2}, d_{2m-2}, c_{2m-1}, r_d, c_{2m}) \mapsto\\
&\qquad \tilde\rho^{-(k+2)}(c_{2m}; b_{2m}, r_d^{-1}, b_{2m+1}, a_{2m+2}, b_{2m+2}, b_{2m+1}, c_{2m+1}, b_{2m+2}, d_{2m}, r_d),\\
&(d_{2m}; r_d, c_{2m+1}, b_{2m+2}, c_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{2}(a_{2m}; b_{2m}, c_{2m-2}, b_{2m-1}, r_d^{-1}),\\
&(b_{2m+1}; r_d^{-1}, c_{2m}, a_{2m+2}) \mapsto \tilde\rho^{-(k+2)}(c_{2m+1}; b_{2m+1}, b_{2m+2}, c_{2m}),\\
&(b_{2m+1}; c_{2m+1}, b_{2m+2}, c_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{-(k+2)}(c_{2m+1}; r_d, d_{2m}, b_{2m+2}),\\
&(c_{2m+1}; c_{2m}, b_{2m+2}, b_{2m+1}) \mapsto \tilde\rho^{k+2}(b_{2m+1}; a_{2m+2}, c_{2m}, r_d^{-1}),\\
&(c_{2m+1}; b_{2m+2}, d_{2m}, r_d) \mapsto \tilde\rho^{k+2}(b_{2m+1}; c_{2m}, b_{2m+2}, c_{2m+1})
\end{aligned}$$

und die Kantenzyklen

$$\begin{aligned}
&(a_{2m}; b_{2m-1}) \mapsto \tilde\rho^{-1}(b_{2m}; d_{2m-2}) \mapsto \tilde\rho^{-(k+3)}(c_{2m+1}; c_{2m}),\\
&(a_{2m}; c_{2m-2}) \mapsto \tilde\rho^{-2}(c_{2m+1}; d_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{k+1}(b_{2m}; b_{2m-1}),\\
&(b_{2m}; c_{2m-2}) \mapsto \tilde\rho^{-(k+2)}(b_{2m+1}; c_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{k+1}(b_{2m}; c_{2m-1}),\\
&(a_{2m}; r_d^{-1}) \mapsto \tilde\rho^{-2}(c_{2m}; d_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{-2(k+2)}(r_d; b_{2m}),\\
&(b_m; r_d^{-1}) \mapsto \tilde\rho^{-(k+2)}(b_m; c_m) \mapsto \tilde\rho^{-2(k+2)}(r_d; c_m),\\
&(c_{2m}; r_d^{-1}) \mapsto \tilde\rho^{k+2}(a_{2m}; b_{2m}) \mapsto \tilde\rho^{-2(k+2)}(r_d; d_{2m}).
\end{aligned}$$

Die ersten drei Zykel sind vom Typ $\aleph$, die letzten drei Zykel sind vom Typ $\beth$. $\blacksquare$

Bemerkung. Es bleibt zu zeigen, daß $P = F_{\tilde\varepsilon}$ gilt. Dafür sollte man zeigen, daß $F_{\mathcal{E}} \subset P$ gilt.

§25. Abbildungen

In diesem Abschnitt werden für die Fundamentalbereiche aus den Arnoldschen Serien E, Z und Q die Identifikationen am Rand beschrieben und die Abbildungen der Fundamentalbereiche aus dem Anfang der Serien zusammengestellt. Die ersten sechs

Abbildungen zeigen schematische Darstellungen eines Ausschnitts der Oberfläche des Fundamentalbereichs (ohne die in E_{r_d} bzw. $E_{r_d^{-1}}$ enthaltenen Seiten). Die Paare der zu identifizierenden Seitenflächen sind in diesem Schema durch gleiche Schattierung gekennzeichnet. In dieser Weise werden die Identifikationsvorschriften für die in $\tilde{E}_{0,j}$ enthaltenen Seiten angegeben, alle anderen Seiten sind Bilder dieser Seiten unter der Symmetrie $\tilde{\rho}$.

Die weiteren Abbildungen zeigen die Fundamentalbereiche aus dem Anfang der Serien. Durch die Zuordnung $[(1+i\omega, z), \varphi] \mapsto (z, \omega)$ wird $\tilde{E}_{\tilde{e}}$ mit $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ und die Menge $\tilde{S}_{\tilde{e}}$ mit der Schicht mit $|\omega| \leqslant \tan\vartheta_d$ identifiziert. Die Abbildungen stellen den Rand des Bildpolytops in $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ ohne die obere und die untere Seite in der orthogonalen Parallelprojektion dar. Ist eine Seite des Fundamentalbereichs in $\tilde{E}_{m,j} = \tilde{E}_{f_{m,j}}$ enthalten, so wird sie mit (m, j) beschriftet.

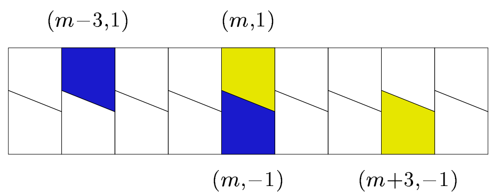


Abbildung 13. Die Fälle $\Gamma(k+3,3,3)^k$ und $\Gamma(k+6,3,2)^k$.

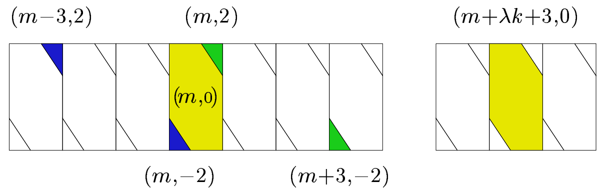


Abbildung 14. Die Fälle $\Gamma(2k+3,3,3)^k$ und $\Gamma(2k+6,3,2)^k$.

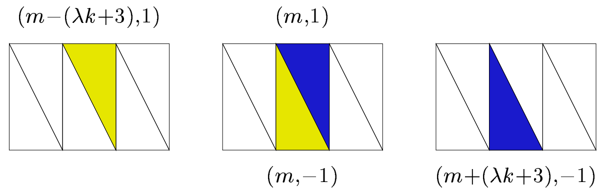


Abbildung 15. Die Fälle $\Gamma(3k+3,3,3)^k$ und $\Gamma(3k+6,3,2)^k$.

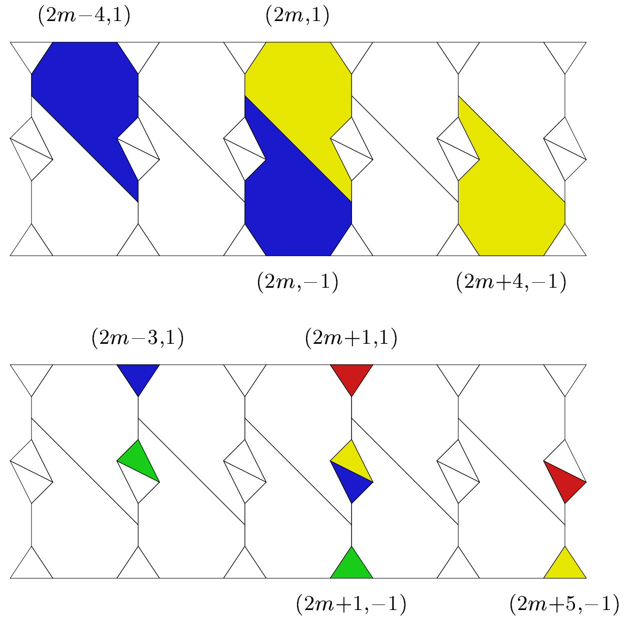


ABBILDUNG 16. Der Fall $\Gamma(k+4,4,2)^k$.

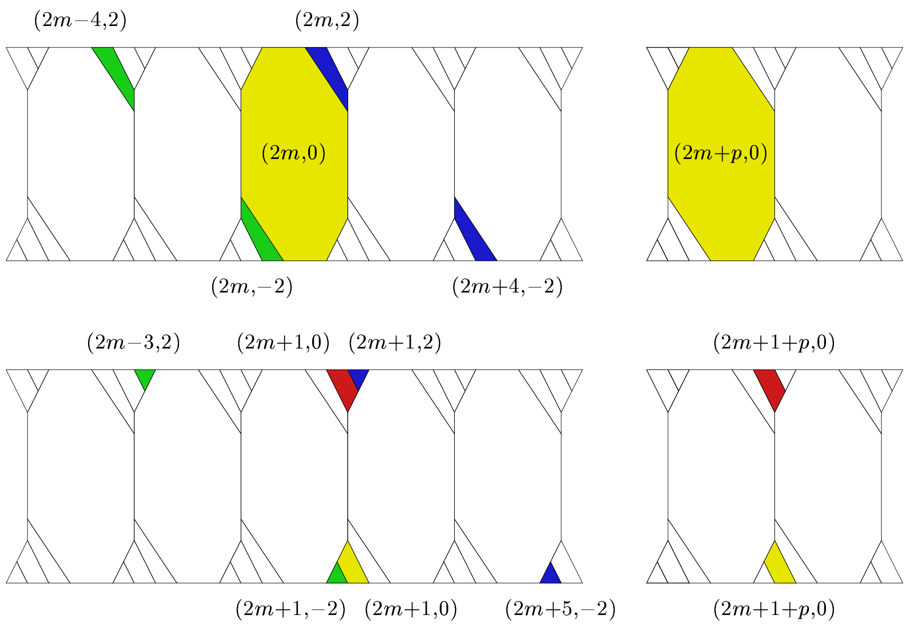


ABBILDUNG 17. Der Fall $\Gamma(2k+4,4,2)^k$.

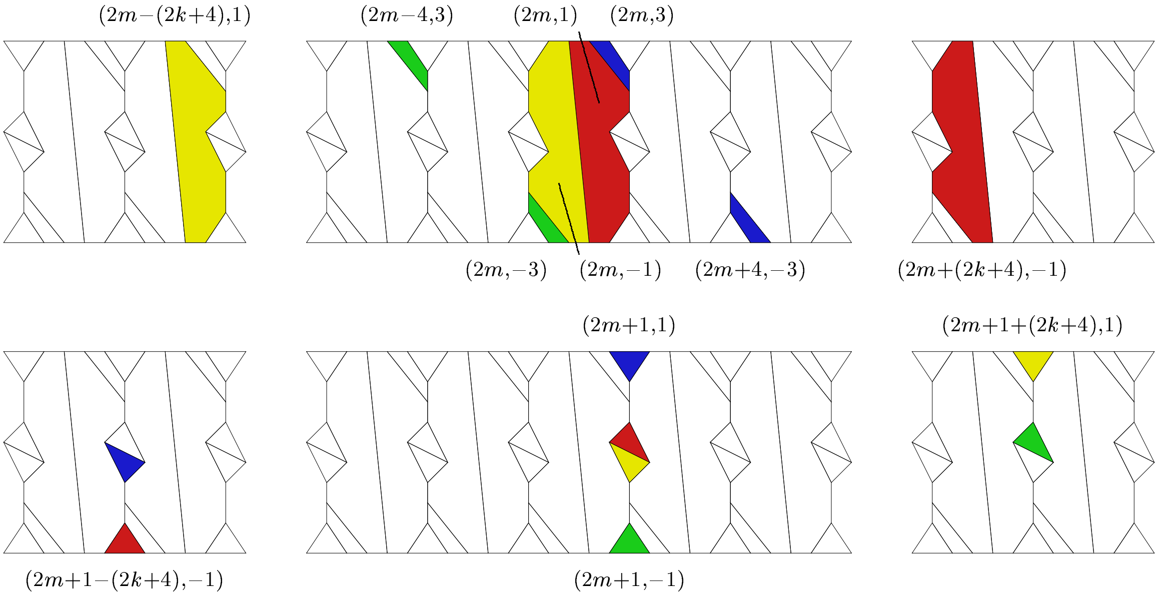


ABBILDUNG 18. Der Fall $\Gamma(3k+4,4,2)^k$.

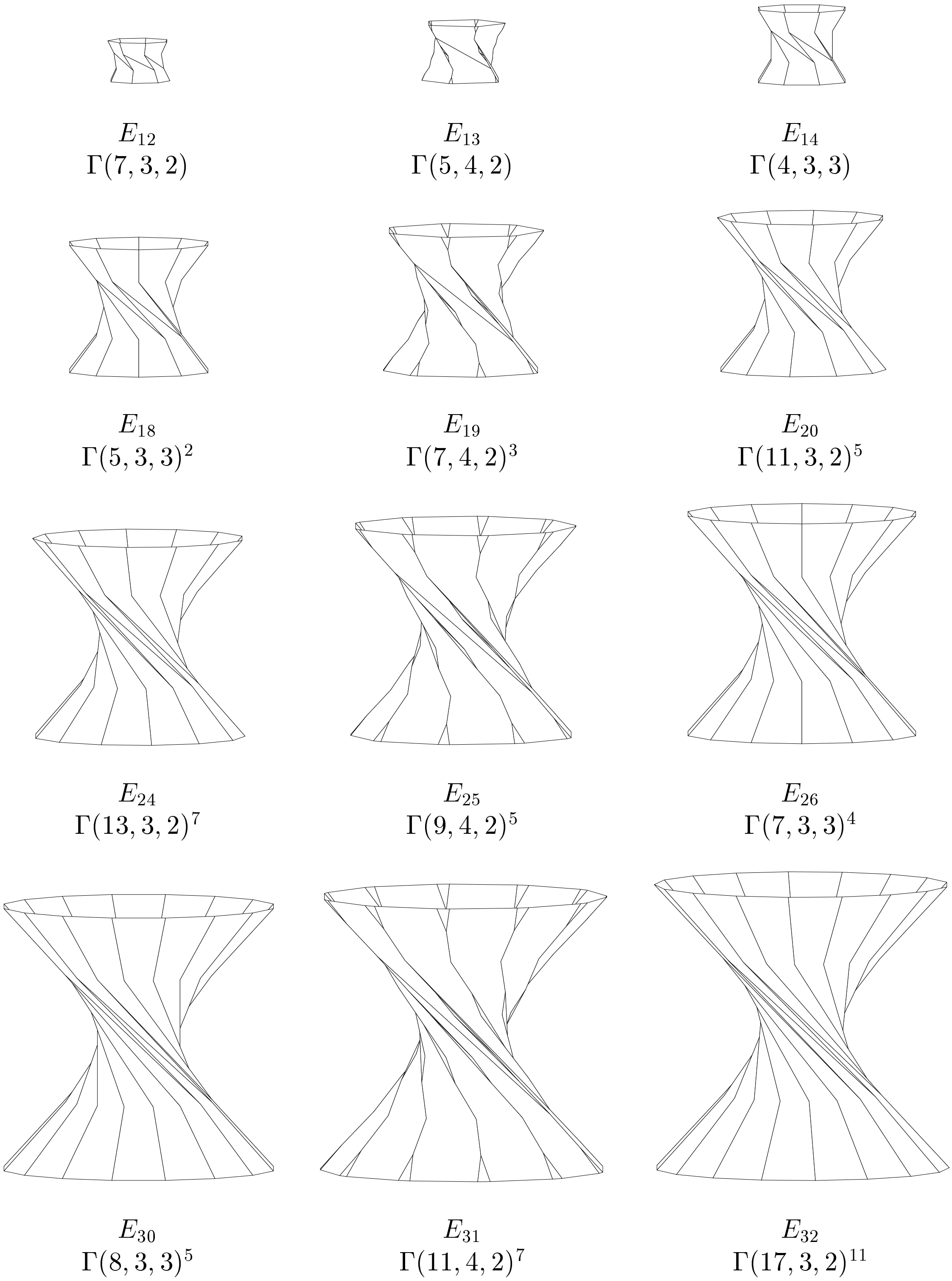


ABBILDUNG 19. Fundamentalbereiche aus dem Anfang der Serie E.

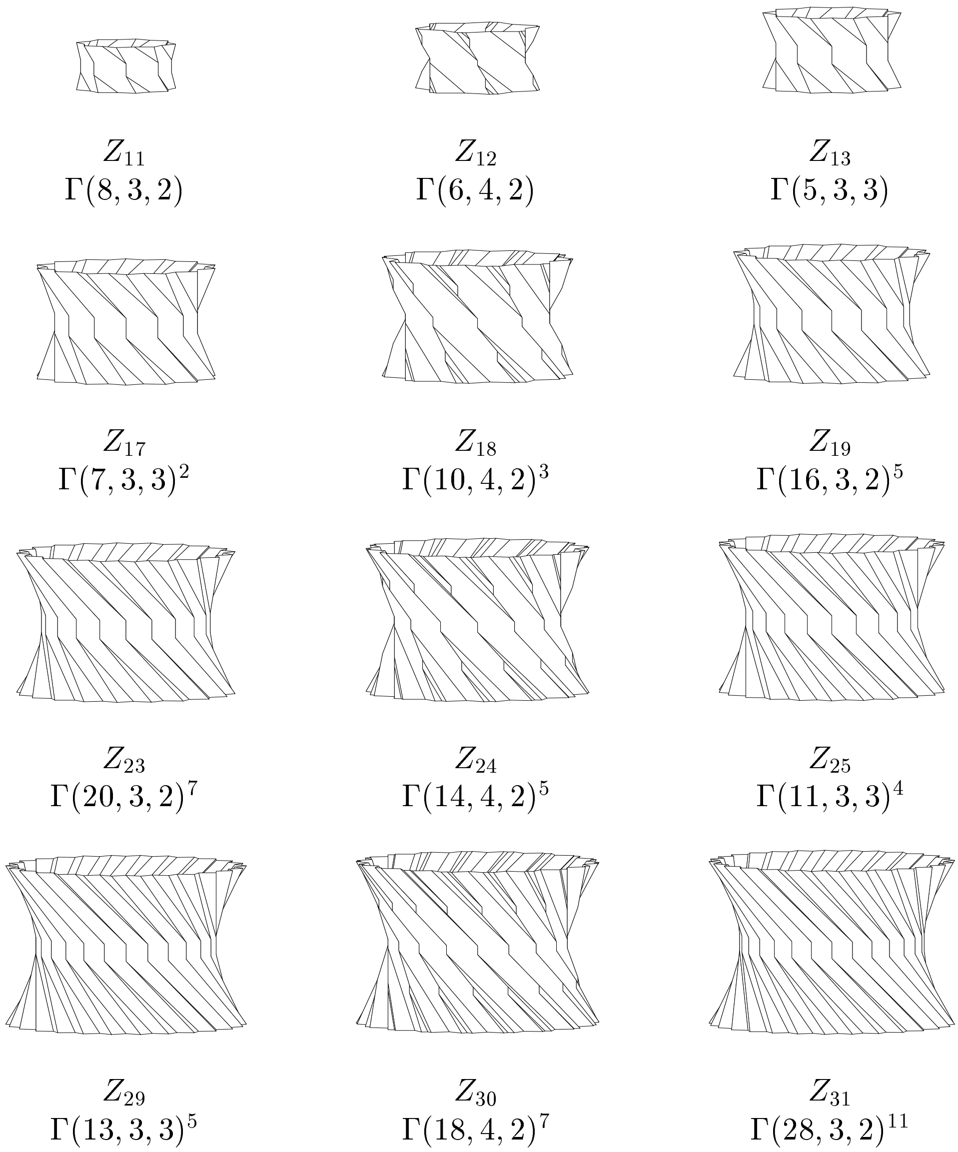


ABBILDUNG 20. Fundamentalbereiche aus dem Anfang der Serie Z.

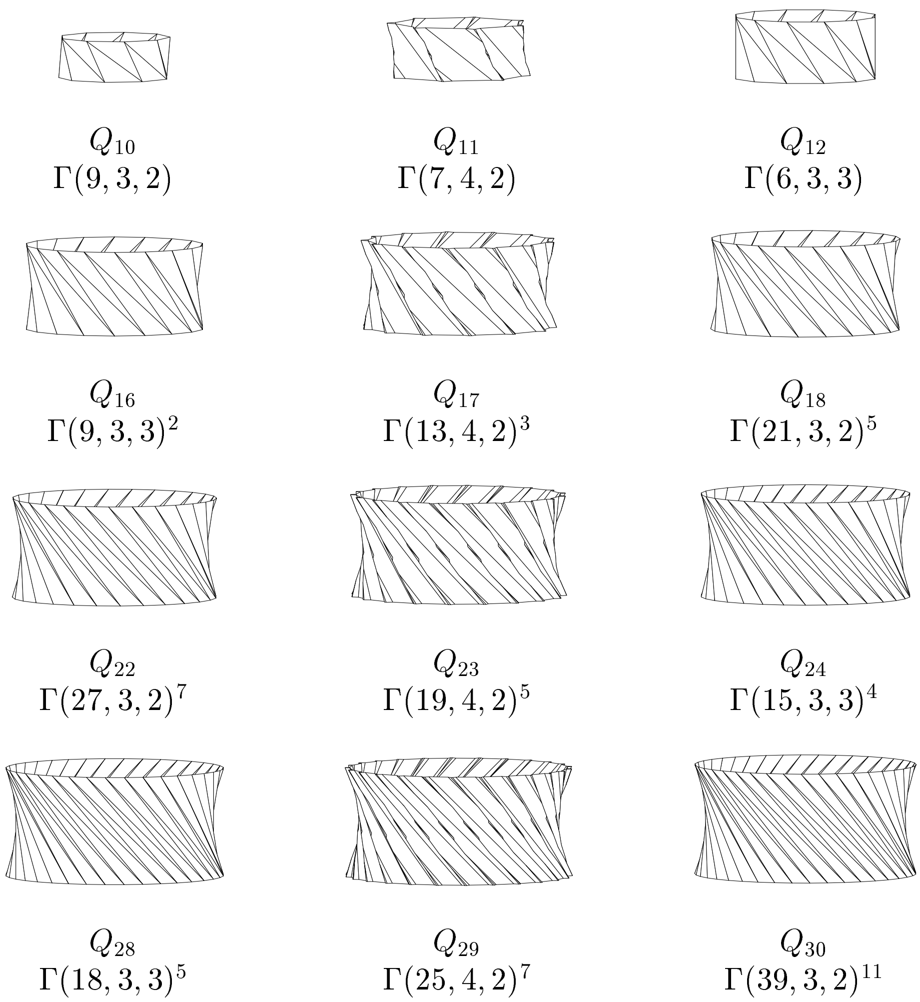
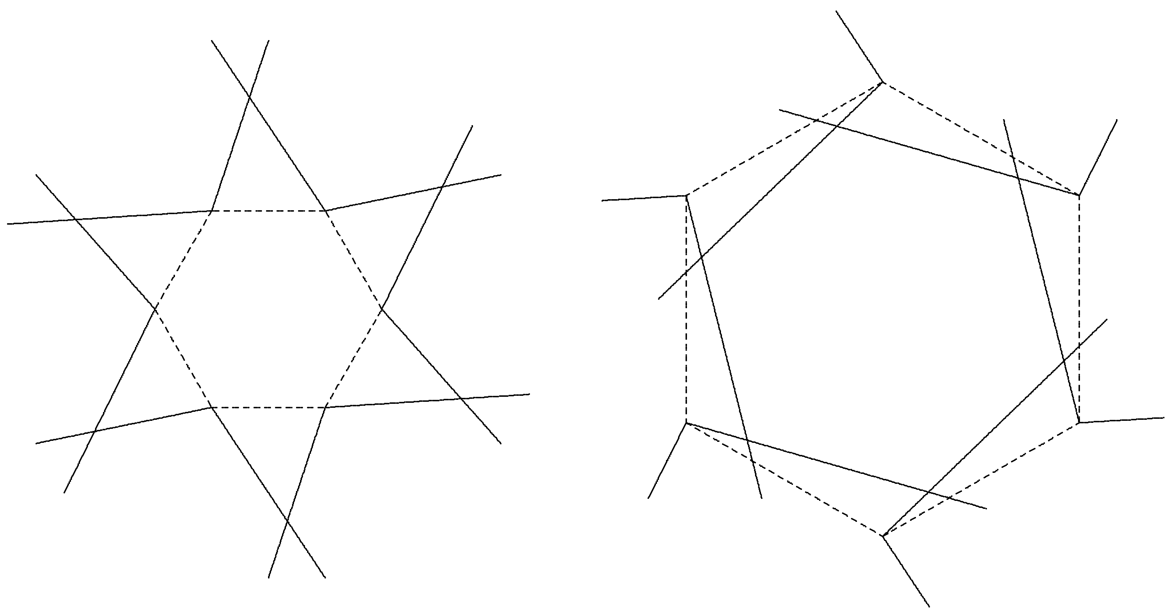


ABBILDUNG 21. Fundamentalbereiche aus dem Anfang der Serie Q.

Anhang

Formelsammlung



Dieser Anhang enthält die Formeln und Fakten aus der euklidischen und hyperbolischen Trigonometrie, linearen Algebra und analytischen Geometrie, die bei den Rechnungen oft benutzt wurden, zum Teil auch ohne einen expliziten Hinweis auf den Anhang.

A1. Trigonometrie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{A1.1}$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{aligned} \tag{A1.2}$$

$$\begin{aligned} \sin x \pm \tan y \cos x &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos y} \\ \cos x \pm \operatorname{ctg} y \sin x &= \frac{\sin(y \pm x)}{\sin y} \end{aligned} \tag{A1.3}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \tan \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \end{aligned} \tag{A1.4}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x (2 \cos 2x + 1) \\ &= \sin x (3 - 4 \sin^2 x) = \sin x (4 \cos^2 x - 1) \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (2 \cos 2x - 1) \\ &= \cos x (4 \cos^2 x - 3) = \cos x (1 - 4 \sin^2 x) \end{aligned} \tag{A1.5}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2} \\ \sin x \cos y &= \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2} \end{aligned} \tag{A1.6}$$

$$(A1.7)\qquad \begin{aligned} \sin x + \sin y &= +2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \sin x - \sin y &= +2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\ \cos x + \cos y &= +2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$(A1.8)\qquad \begin{aligned} \sin x\cos y - \sin(x+y+z)\cos z &= -\sin(y+z)\cos(x+z)\\ \cos x\cos y - \cos(x+y+z)\cos z &= +\sin(y+z)\sin(x+z)\\ \cos x\sin y + \cos(x+y+z)\sin z &= +\sin(y+z)\cos(x+z)\\ \sin x\sin y + \sin(x+y+z)\sin z &= +\sin(y+z)\sin(x+z)\\ \sin x\sin y + \cos(x+y+z)\cos z &= +\cos(y+z)\cos(x+z) \end{aligned}$$

$$(A1.9)\qquad \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos x - \sin x)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\sin x + \cos x)\\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) &= \frac{1}{2}\cdot(1-\sin 2x)\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) &= \frac{1}{2}\cdot(1+\sin 2x) \end{aligned}$$

$$(A1.10)\qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$$

$$(A1.11)\qquad \frac{\sin 3x}{2\sin x} - 1 = \frac{\cos 3x}{2\cos x}$$

$$(A1.12)\qquad \begin{aligned} \sin(x+y) - \sin x + \sin y &= +4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\ \sin(x+y) - \sin x - \sin y &= -4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

$$(A1.13)\qquad \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$$

$$(A1.14)\qquad 1 < \sin x + \cos x < \sqrt{2} \quad \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

A2. Einige Werte der trigonometrischen Funktionen

$$
\begin{array}{llll}
\sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \\
\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \tan \frac{\pi}{4} = 1 & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 \\
\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}
\end{array}
$$

A3. Hyperbolische Trigonometrie

$$
\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\
&\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} \\
&\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} \quad \text{für } x > 0
\end{aligned}
\tag{A3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \sinh^2 x + \cosh^2 x \\
&= 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1
\end{aligned}
\tag{A3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \\
\cosh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \\
\tanh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} \quad \text{für } x > 0
\end{aligned}
\tag{A3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\sinh^2 x &= \frac{\tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x} \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{1 - \tanh^2 x} \\
\tanh^2 x &= 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \\
\operatorname{ctgh}^2 x &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x - 1}
\end{aligned}
\tag{A3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh(x + y + z) &= \cosh x \cosh y \cosh z + \cosh x \sinh y \sinh z \\
&\quad + \sinh x \cosh y \sinh z + \sinh x \sinh y \cosh z \\
\cosh(x + 2y) &= \cosh x (\cosh^2 y + \sinh^2 y) + 2 \sinh x \sinh y \cosh y
\end{aligned}
\tag{A3.5}
$$

A4. Hyperbolische Dreiecksformeln

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma} \tag{A4.1}$$

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{A4.2}$$

$$\cosh c = \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b\cos\gamma \tag{A4.3}$$

Für ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$ gilt

$$\begin{aligned}\cosh c &= \cosh^2 a - \sinh^2 a\cos\gamma \\ &= \sinh^2 a(1-\cos\gamma) + 1 \\ &= 2\sinh^2 a\sin^2\frac{\gamma}{2} + 1.\end{aligned} \tag{A4.4}$$

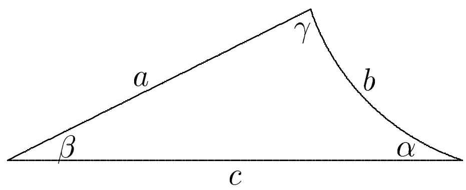


Abbildung 22. Hyperbolisches Dreieck.

A5. Daten des Dreiecks $\Delta(p, q, r)$

$\Delta(p,q,r)$ ist ein hyperbolisches Dreieck mit Ecken $u, v, w \in \mathbb{D}$ und Winkeln

$$\alpha_u = \frac{\pi}{p}, \quad \alpha_v = \frac{\pi}{q} \quad \text{und} \quad \alpha_w = \frac{\pi}{r}.$$

Die Seitenlängen $\ell_v := \rho(u,v)$, $\ell_w := \rho(u,w)$ und $\ell_{vw} := \rho(v,w)$ lassen sich mit der Formel (A4.2) aus den Winkeln berechnen.
In den Fällen $\Gamma = \Gamma(p,3,3)$ bzw. $\Gamma = \Gamma(p,3,2)$ gilt mit $\alpha = \frac{\pi}{2p}$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{p}$

$$\cosh\ell_v = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{ctg}\alpha, \quad \sinh\ell_v = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{\cos 3\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}}, \quad \tanh\ell_v = \frac{\sqrt{\cos 3\alpha}}{\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Im Falle $\Gamma = \Gamma(p,4,2)$ gilt mit $\alpha = \frac{\pi}{p}$

$$\cosh\ell_v = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \sinh\ell_v = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad \tanh\ell_v = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\cosh\ell_w = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha} \qquad \sinh\ell_w = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sqrt{2}\sin\alpha} \qquad \tanh\ell_w = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$$

und

$$\sinh^2(2\ell_w) = 4\sinh^2\ell_w\cosh^2\ell_w = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^4\alpha}.$$

A6. Hyperbolische Geometrie

Es sei ρ die hyperbolische und d die Euklidische Metrik auf $\mathbb{D}$. Es gilt für $a, b \in \mathbb{D}$:

$$(A6.1) \qquad |a|^2 = \frac{\cosh \rho(0,a) - 1}{\cosh \rho(0,a) + 1}$$

$$(A6.2) \qquad \cosh \rho(0,a) = \frac{1 + |a|^2}{1 - |a|^2}, \quad |\sinh \rho(0,a)| = \frac{2|a|}{1 - |a|^2}$$

$$(A6.3) \qquad d^2(a,b) = |a|^2 + |b|^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot \frac{\cosh \rho(0,a) \cosh \rho(0,b) - \cosh \rho(a,b)}{\sinh \rho(0,a) \sinh \rho(0,b)}$$

$$(A6.4) \qquad d(a,b) = \frac{\sqrt{2(\cosh \rho(a,b) - 1)}}{\cosh \rho(0,a) + 1}, \quad \text{falls } \rho(0,a) = \rho(0,b)$$

A7. Analytische Geometrie

Proposition (A7.1). *Zwei Geraden und eine abgeschlossene Halbebene H in $\mathbb{R}^2$ seien gegeben durch*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_3y &\leqslant c_3. \end{aligned}$$

Es sei

$$\delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Es sei $\delta \neq 0$, die beiden Geraden schneiden sich also in genau einem Punkt p. Dann gilt

$$\begin{aligned} p \in \operatorname{Int} H &\iff \delta \cdot \Delta > 0, \\ p \notin H &\iff \delta \cdot \Delta < 0, \\ p \in \partial H &\iff \Delta = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $p = (x_0, y_0)$, dann gilt

$$x_0 = \frac{1}{\delta} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad y_0 = \frac{1}{\delta} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

und damit

$$a_3x_0 + b_3y_0 - c_3 = \frac{1}{\delta} \cdot \left(a_3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} - c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \Delta &= a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= - \left(a_3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} - c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$a_3x_0 + b_3y_0 - c_3 = -\frac{\Delta}{\delta}. \blacksquare$$

FOLGERUNG (A7.2). *Drei Geraden in $\mathbb{R}^2$ seien gegeben durch*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_3y &= c_3. \end{aligned}$$

Es sei

$$\delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Es sei $\delta \neq 0$, die ersten beiden Geraden schneiden sich also in genau einem Punkt p. Dann gilt: die drei Geraden schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn $\Delta = 0$ gilt.

PROPOSITION (A7.3). *Drei abgeschlossene Halbebenen H_1, H_2, H_3 in $\mathbb{R}^2$ seien gegeben durch*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geqslant c_1, \\ a_2x + b_2y &\geqslant c_2, \\ a_3x + b_3y &\geqslant c_3. \end{aligned}$$

Es sei

$$\delta_1 := \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \delta_2 := -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \delta_3 := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Es gelte $\delta_3 \neq 0$, $\delta_1 \cdot \delta_3 \leqslant 0$, $\delta_2 \cdot \delta_3 \leqslant 0$ und $\Delta \cdot \delta_3 < 0$, dann gilt $H_1 \cap H_2 \subset \operatorname{Int} H_3$.

BEWEIS. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 &= a_3, \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 &= b_3 \end{aligned}$$

hat wegen $\delta_3 \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung (λ_1, λ_2) mit

$$\lambda_1 = -\frac{\delta_1}{\delta_3}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\delta_2}{\delta_3}.$$

Wegen $\delta_1 \cdot \delta_3, \delta_2 \cdot \delta_3 \leqslant 0$ gilt $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$. Für $(x, y) \in H_1 \cap H_2$ gilt

$$a_1x + b_1y \geqslant c_1 \quad \text{und} \quad a_2x + b_2y \geqslant c_2,$$

und damit

$$\begin{aligned} a_3x + b_3y &= (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)x + (b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2)y \\ &= \lambda_1(a_1x + b_1y) + \lambda_2(a_2x + b_2y) \\ &\geqslant \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2 = -\frac{c_1\delta_1 + c_2\delta_2}{\delta_3}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\Delta = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3.$$

Damit gilt für $(x, y) \in H_1 \cap H_2$ wegen $\Delta \cdot \delta_3 \leqslant 0$

$$a_3x + b_3y \geqslant -\frac{c_1\delta_1 + c_2\delta_2}{\delta_3} = -\frac{-c_3\delta_3 + \Delta}{\delta_3} = c_3 - \frac{\Delta}{\delta_3} > c_3,$$

also $(x, y) \in H_3$. ■

Proposition (A7.4). *Es seien $z = (z_1, z_2)$ die Koordinaten in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Die Halbebenen H^+ und H^- von $\mathbb{C}$ seien gegeben durch die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} z \in H^- &\iff z_1 \sin x + z_2 \cos x \geqslant c, \\ z \in H^+ &\iff z_1 \sin y + z_2 \cos y \geqslant c, \end{aligned}$$

dann hat die Winkelhalbierende des Sektors $H^- \cap H^+$ die Gleichung

$$(\sin x - \sin y)z_1 + (\cos x - \cos y)z_2 = 0$$

und enthält damit den Koordinatenursprung 0. ∎

Proposition (A7.5). *Es seien H^+ und H^- Halbebenen in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit $0 \notin H^+ \cap H^-$. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $\alpha := \pi/N$ und ρ die Drehung um den Winkel 2α um dem Punkt 0, also*

$$\rho(z) = ze^{2i\alpha}.$$

Für $m \in \mathbb{Z}$ betrachte ich
die Halbebenen $H_m^\pm := \rho^m(H^\pm)$,
die Geraden $E_m^\pm := \partial H_m^\pm = \rho^m(\partial H^\pm)$,
die Strahlen $\ell_m^\pm := E_m^\pm \cap H_m^\mp$,
den Sektor $K_m := H_m^- \cap H_m^+ = \rho^m(H^- \cap H^+)$,
den Punkt $p_m := \rho^m(E_m^- \cap E_m^+)$
und den Strahl ℓ_m mit Anfangspunkt p_m und $0 \in \ell_m$.

Wegen $0 \notin K_m$ gilt $\ell_m \cap K_m = \{p_m\}$. Es sei $\psi^\pm$ die Differenz zwischen dem Winkel zwischen den von p_m ausgehenden Strahlen ℓ_m und $\ell_m^\pm$ und dem Winkel $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Es sei 2β der Winkel des Sektors K_m. Es gilt

$$\psi^+ + \psi^- = \pi - 2(\beta - \alpha).$$

Es gelte $\beta - \alpha > 0$ und damit $\psi^+ + \psi^- < \pi$. Die Gestalt der Menge

$$P := \mathbb{C} - \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{Int} K_m$$

hängt von $\psi^\pm$ ab.

Für $\psi^+, \psi^- > 0$ ist P das nichtkonvexe Polygon mit den Ecken $E_m^- \cap E_m^+$ und $E_m^+ \cap E_{m+1}^-$ und Kanten in $E_m^\pm$, genauer gilt: $E_0^- \cap E_0^+, E_0^+ \cap E_1^-, E_1^- \cap E_1^+, \dots, E_{N-1}^+ \cap E_0^-$ sind die Ecken von P im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken $E_{m-1}^+ \cap E_m^-$ und $E_m^- \cap E_m^+$ ist in der Geraden E_m^- enthalten, die Kante zwischen den Ecken $E_m^- \cap E_m^+$ und $E_m^+ \cap E_{m+1}^-$ ist in der Geraden E_m^+ enthalten.

Für $\psi^+ \leqslant 0 < \psi^-$ ist P das regelmäßige Polygon mit den Ecken $E_m^+ \cap E_{m+1}^+$ und Kanten in E_m^+, genauer gilt: $E_0^+ \cap E_1^+, E_1^+ \cap E_2^+, \dots, E_{N-1}^+ \cap E_0^+$ sind die Ecken von P im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken $E_{m-1}^+ \cap E_m^+$ und $E_m^+ \cap E_{m+1}^+$ ist in der Geraden E_m^+ enthalten.

Für $\psi^- \leqslant 0 < \psi^+$ ist P das regelmäßige Polygon mit den Ecken $E_m^- \cap E_{m+1}^-$ und Kanten in E_m^-, genauer gilt: $E_0^- \cap E_1^-, E_1^- \cap E_2^-, \dots, E_{N-1}^- \cap E_0^-$ sind die Ecken von P im positiven Umlaufsinn, die Kante zwischen den Ecken $E_{m-1}^- \cap E_m^-$ und $E_m^- \cap E_{m+1}^-$ ist in der Geraden E_m^- enthalten.

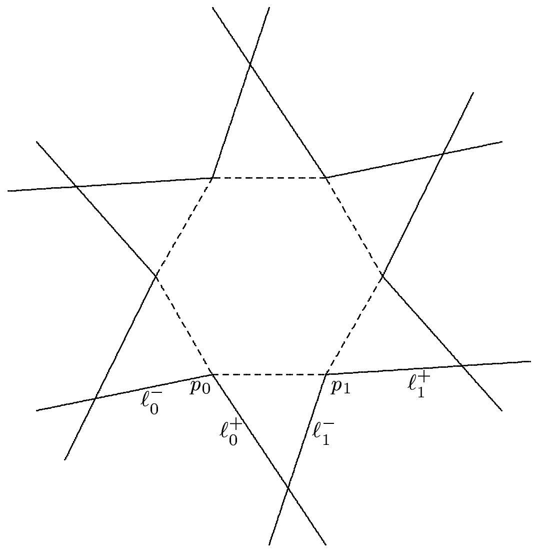


Abbildung 23. Der Fall $\psi^+, \psi^- > 0$.

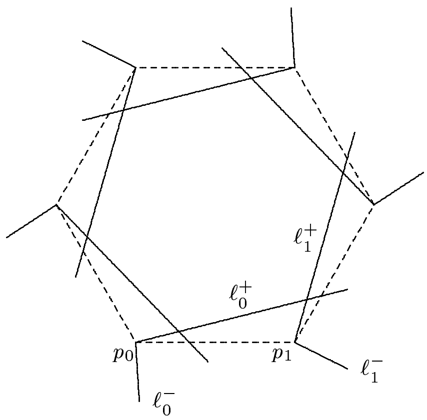


Abbildung 24. Der Fall $\psi^+ \leqslant 0 < \psi^-$.

Die Skizzen verdeutlichen die Gestalt von P für verschiedene Werte von $\psi^\pm$.

Bemerkung. Setzt man zusätzlich $\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ voraus, so tritt der Fall $\psi^+, \psi^- < 0$ nicht auf.

Beweis. Es sei S das Dreieck mit den Ecken 0, p_0 und p_1 und T das durch die Strecke $[p_0, p_1]$ und die Strahlen ℓ_0^- und ℓ_1^- begrenzte (unbeschränkte) Polygon. Dann ist $F := S \cup T$ ein Fundamentalbereich für die Operation der von ρ erzeugten Gruppe auf $\mathbb{C}$. Es sei Π das regelmäßige Polygon mit den Ecken $p_0, \dots, p_{N-1}$.

Es sei $\psi^+, \psi^- > 0$. Die Sektoren $\operatorname{Int} K_m$ liegen außerhalb Π, damit gilt insbesondere $S \subset P$. Wegen $0 < \psi^+ + \psi^- < \pi$ schneiden sich die Strahlen ℓ_0^+ und ℓ_1^- in einem Punkt q, und $\Delta := T - \operatorname{Int} K_0$ ist das Dreieck mit den Ecken p_0, p_1 und q. Es gilt $\Delta \cap \operatorname{Int} K_0 = \varnothing$ und $\Delta \cap \operatorname{Int} K_1 = \varnothing$. Für $m \in \{2, \dots, N-1\}$ gilt $K_m \cap [p_0, p_1] = \varnothing$, $\ell_m^+ \cap \ell_0^+ = \varnothing$ und $\ell_m^- \cap \ell_1^- = \varnothing$ und damit $\Delta \cap K_m = \varnothing$. Daraus folgt $\Delta \subset P$. In diesem Fall gilt also $F \cap P = S \cup \Delta$.

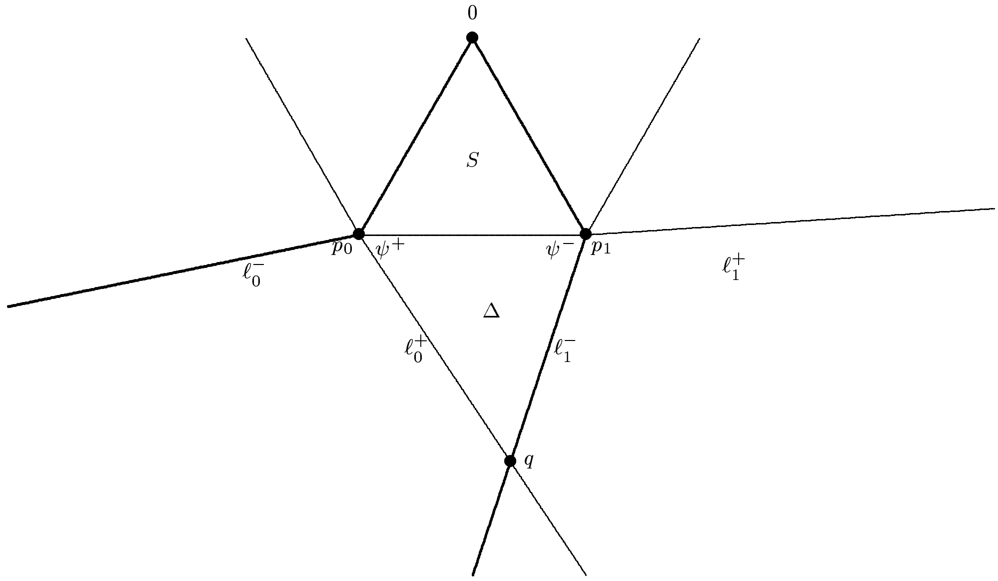


Abbildung 25. Der Fall $\psi^+, \psi^- > 0$.

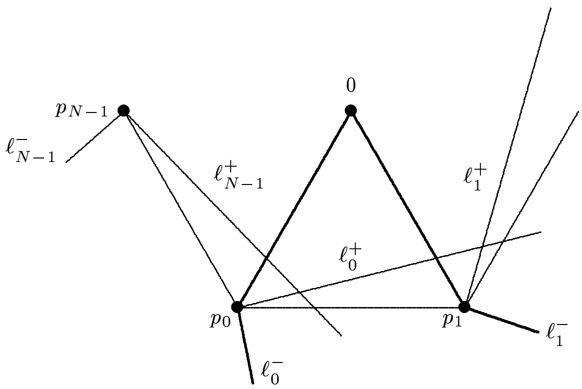


Abbildung 26. Der Fall $\psi^+ \leqslant 0 < \psi^-$.

Es sei $\psi^+ \leqslant 0 < \psi^-$. Wegen $\psi^+ + \psi^- < \pi$ schneiden sich die Strahlen ℓ_0^+ und ℓ_1^- nicht. Damit gilt $T \subset K_0$. Es gilt ferner $\Pi \cap \operatorname{Int} H_m^+ \subset \operatorname{Int} K_m$. Der Durchschnitt $\Pi \cap P$ ist damit das regelmäßige Polygon mit den Ecken $E_m^+ \cap E_{m+1}^+$ und Kanten in E_m^+.

Der Fall $\psi^- \leqslant 0 < \psi^+$ wird analog zum Fall $\psi^+ \leqslant 0 < \psi^-$ bewiesen. ∎

Proposition (A7.6). *Es seien (ω, z) die Koordinaten in $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3$. Für reelle Zahlen ω, ω_1, ω_2 und eine Teilmenge M von $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ sei*

$$M(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : (\omega, z) \in M\},$$
$$M[\omega_1, \omega_2] = \{(\omega, z) \in M : \omega \in [\omega_1, \omega_2]\} = M \cap ([\omega_1, \omega_2] \times \mathbb{C}).$$

Ich betrachte einen Keil $K := H^- \cap H^+$, wobei $H^\pm$ Halbräume in $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3$ sind. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $\alpha := \pi/N$ und ρ die Drehung um den Winkel 2α um die ω-Achse, also

$\rho(\omega, z) = (\omega, ze^{2i\alpha})$. Es sei 2β der Winkel des Sektors $K(\omega)$. (Dieser Winkel hängt nicht von ω ab.) Es sei $\beta - \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Für $m \in \mathbb{Z}$ betrachte ich

die Halbräume $H_m^\pm = \rho^m(H^\pm)$,
die Ebenen $E_m^\pm = \partial H_m^\pm = \rho^m(\partial H^\pm)$
und den Keil $K_m = H_m^- \cap H_m^+ = \rho^m(K)$.

Es sei

$$P := \mathbb{R} \times \mathbb{C} - \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{Int} K_m.$$

Es sei $\omega^\circ \in \mathbb{R}$ derart, daß der Punkt 0 auf der winkelhalbierenden Geraden des Sektors $K(\omega^\circ)$ liegt. Es sei $\omega^+ > \omega^\circ$ derart, daß sich die Geraden $E_0^+(\omega^+)$, $E_1^-(\omega^+)$ und $E_1^+(\omega^+)$ in einem Punkt schneiden. Es sei $\omega^- < \omega^\circ$ derart, daß sich die Geraden $E_0^-(\omega^-)$, $E_0^+(\omega^-)$ und $E_1^-(\omega^-)$ in einem Punkt schneiden. Es seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\omega_1 < \omega^- < \omega^\circ < \omega^+ < \omega_2$$

derart, daß $0 \notin K(\omega)$ für $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ gilt. Dann hat die Seitenfläche von $P[\omega_1, \omega_2]$ die in der folgenden Abbildung dargestellte kombinatorische Struktur.

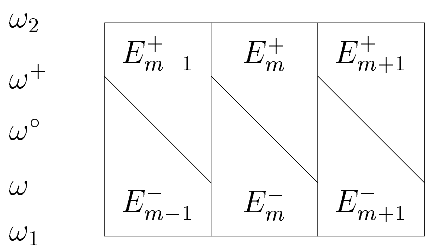


Abbildung 27. Die Seitenfläche von $P[\omega_1, \omega_2]$.

Beweis. Für die Winkel $\psi^\pm(\omega)$ zum Sektor $K(\omega)$ wie sie in der Proposition (A7.5) definiert wurden gilt

$$\psi^-(\omega) + \psi^+(\omega) = \pi - 2(\beta - \alpha) > 0.$$

Die Winkel $\psi^+(\omega)$ bzw. $\psi^-(\omega)$ hängen monoton von ω ab. Die Winkelhalbierende des Sektors $K(\omega^\circ)$ geht durch den Koordinatenursprung, also gilt $\psi^+(\omega^\circ) = \psi^-(\omega^\circ)$ und damit $\psi^-(\omega^\circ), \psi^+(\omega^\circ) > 0$. Die Geraden $E_0^+(\omega^+)$, $E_1^-(\omega^+)$ und $E_1^+(\omega^+)$ schneiden sich in einem Punkt, also gilt $\psi^+(\omega^+) = 0$ und folglich $\psi^-(\omega^+) > 0$. Die Geraden $E_0^-(\omega^-)$, $E_0^+(\omega^-)$ und $E_1^-(\omega^-)$ schneiden sich in einem Punkt, also gilt $\psi^-(\omega^-) = 0$ und folglich $\psi^+(\omega^-) > 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\psi^-(\omega) < 0 < \psi^+(\omega) &\quad \text{für } \omega \in [\omega_1, \omega^-), \\
\psi^-(\omega) = 0 < \psi^+(\omega) &\quad \text{für } \omega = \omega^-, \\
0 < \psi^-(\omega) < \psi^+(\omega) &\quad \text{für } \omega \in (\omega^-, \omega^\circ), \\
0 < \psi^-(\omega) = \psi^+(\omega) &\quad \text{für } \omega = \omega^\circ, \\
0 < \psi^+(\omega) < \psi^-(\omega) &\quad \text{für } \omega \in (\omega^\circ, \omega^+), \\
\psi^+(\omega) = 0 < \psi^-(\omega) &\quad \text{für } \omega = \omega^+, \\
\psi^+(\omega) < 0 < \psi^-(\omega) &\quad \text{für } \omega \in (\omega^+, \omega_2].
\end{aligned}$$

Nach der Proposition (A7.5) ergibt sich eine Beschreibung der Schichten $P(\omega)$ für $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ und daraus eine Beschreibung des Polyeders $P[\omega_1, \omega_2]$. ∎

Literaturverzeichnis

[AGV] Vladimir I. Arnold, Sabir M. Gusein-Zade, Aleksandr N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps,* Vol. I, Birkhäuser 1985

[Ba] Ludwig Balke, Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler, Stefan Scheidt, *Polyhedral fundamental domains for discrete subgroups of* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$*,* Topology **37** (1998), 1247–1264.

[Do] Igor V. Dolgachev, *On the Link Space of a Gorenstein Quasihomogeneous Surface Singularity,* Math. Annalen **203** (1983), 529–540.

[D1] Igor V. Dolgachev, *Quotient-conical singularities on complex surfaces,* Functional Anal. and Appl. **8** (1974), 160–161.

[D2] Igor V. Dolgachev, *Automorphic forms and quasihomogeneous singularities,* Functional Anal. and Appl. **9** (1975), 149–151.

[Fi] Thomas Fischer, *Totalgeodätische Polytope als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen der dreidimensionalen minkowskischen Pseudosphäre,* Doktorarbeit, Bonn 1992.

[KNRS] Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler, Stefan Scheidt, *Fundamentalbereiche diskreter cokompakter Untergruppen von* $\mathrm{PSU}(1, 1)$*,* Diplomarbeit, Bonn 1996.

[Ka] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups,* Chicago Lectures in Math., The University of Chicago Press, Chicago and London 1992.

[KR] Ravi S. Kulkarni, Frank Raymond, *3-dimensional Lorentz space forms and Seifert fiber spaces,* Journal of Differential Geometry **21** (1985), 231–268.

[Mo] Konrad Möhring, *Invarianten quasihomogener, normaler Gorenstein-Flächensingularitäten,* Diplomarbeit, Bonn 2000.

[Mi] John Milnor, *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds* $M(p, q, r)$*,* In: Annals of Math. Studies **84**, edited by L. P. Neuwirth, Knots, groups and 3-manifolds, Princeton 1975, 175–225.

[ON] Barret O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry,* Academic Press, New York, London 1983.

[P] Anna Pratoussevitch, *Über Fundamentalbereiche diskreter Untergruppen von* $\mathrm{SU}(1, 1)$, Diplomarbeit, Bonn 1998.

[RV] Frank Raymond, Alphonse T. Vasquez, *3-manifolds whose universal coverings are Lie groups*, Topology and its Application **12** (1981), 161–179.

[R] Frank Rothenhäusler, *Fundamentalpolyeder Fuchsscher Gruppen der Signatur* $(0,4;p,2,2,2)$, Doktorarbeit, Bonn 2001.

[Wa] Philip Wagreich, *Algebras of automorphic forms with few generators,* Transactions of the AMS **262** (1980), 367–389.

[Wo] Joseph A. Wolf, *Spaces of constant Curvature,* McGraw-Hill New York 1967.

Bilderverzeichnis

Inhaltsverzeichnis