ÜBER FUNDAMENTALBEREICHE DISKRETER UNTERGRUPPEN VON $\mathrm{SU}(1,1)$

Anna Pratoussevitch

Bonn 1998

Gesetzt mit $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Математик:
(вынимая из головы шар):

Я вынул из головы шар.
Я вынул из головы шар.
Я вынул из головы шар.
Я вынул из головы шар.

Андрей Семёнович:

Положь его обратно.
Положь его обратно.
Положь его обратно.
Положь его обратно.

Математик:

Нет, не положу!
Нет, не положу!
Нет, не положу!
Нет, не положу!

Андрей Семёнович:

Ну и не клади.
Ну и не клади.
Ну и не клади.

Математик:

Вот и не положу!
Вот и не положу!
Вот и не положу!

Андрей Семёнович:

Ну и ладно.
Ну и ладно.
Ну и ладно.

Математик:

Вот я и победил!
Вот я и победил!
Вот я и победил!

Андрей Семёнович: Ну победил и успокойся!

Математик:

Нет, не успокоюсь!
Нет, не успокоюсь!
Нет, не успокоюсь!

Андрей Семёнович: Хоть ты и математик, а, честное слово, ты не умён.

Математик:

Нет, умён и знаю очень много!
Нет, умён и знаю очень много!
Нет, умён и знаю очень много!

Андрей Семёнович: Много, да только всё ерунду.

Математик:

Нет, не ерунду!
Нет, не ерунду!
Нет, не ерунду!

Андрей Семёнович: Надоело мне с тобой препираться!

Математик:

Нет, не надоело!
Нет, не надоело!
Нет, не надоело!

Андрей Семёнович досадливо машет рукой и уходит. Математик, постояв минуту, уходит вслед за Андреем Семёновичем.

Занавес

11 апреля 1933 года

Einleitung

Избрав тему, бери в руки незаржавленное перо и разборчивым, не каракулистым почерком пиши желаемое на одной стороне листа, оставляя нетронутой другую.

Антон Чехов, Правила для начинающих авторов

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien der hyperbolischen Ebene. Wir identifizieren diese Gruppe mit den Gruppen $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{PSU}(1,1)$, wenn wir die obere Halbebene $\mathbb{H}$ bzw. die Kreisscheibe $\mathbb{D}$ als Modelle der hyperbolischen Ebene nehmen. Der Gegenstand unserer Untersuchung sind homogene Räume, die als Quotienten einer endlichblättrigen Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$ nach einer diskreten Untergruppe entstehen. Einige dieser Räume haben seit langem Interesse gefunden als Seifertsche Faserräume, Lorentz-Raumformen sowie als Umgebungsränder isolierter Singularitäten. Die Lorentz-Metrik auf der Liegruppe $\mathrm{PSU}(1,1)$ und ihren endlichblättrigen Überlagerungen wird durch die Killingform induziert. Igor Dolgachev hat in [D1] und [D2] eine Konstruktion von isolierten Singularitäten angegeben, deren Umgebungsränder zu den Quotienten der k-fachen Überlagerung G_k von $\mathrm{PSU}(1,1)$ nach diskreten Untergruppen diffeomorph sind. Diese Konstruktion wollen wir hier kurz skizzieren.

Wir betrachten ein komplexes Geradenbündel $\mathcal{L}$ über $\mathbb{D}$ mit $\mathcal{L}^{\otimes k} \cong T\mathbb{D}$ und eine *Hochhebung* der Stufe k, das heißt eine diskrete Untergruppe Γ^k von G_k, die vermöge der Überlagerungsabbildung zu ihrem Bild in $\mathrm{PSU}(1,1)$ isomorph ist. Diese Untergruppe von G_k operiert auf dem Geradenbündel $\mathcal{L}$. Bildet man den Quotienten nach dieser Operation und zieht anschließend den Nullschnitt zusammen, so erhält man einen komplexen Raum mit einer isolierten Singularität. Aus der Konstruktion folgt insbesondere, daß der Umgebungsrand dieser Singularität zum Quotienten der k-fachen Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$ nach der diskreten Untergruppe Γ^k diffeomorph ist.

Den Quotienten der Gruppe G_k nach einer diskreten Untergruppe wollen wir beschreiben, indem wir einen Fundamentalbereich für die Operation dieser diskreten Untergruppe durch Linksmultiplikation konstruieren und die Identifikationen angeben, die diese Operation am Rande des Fundamentalbereichs induziert. Thomas Fischer hat in seiner Dissertation [Fi] eine Konstruktion für $G_1 = \mathrm{PSU}(1,1)$ dargestellt. Im ersten Teil dieser Arbeit verallgemeinern wir diese Konstruktion auf den Fall von $G_2 = \mathrm{SU}(1,1)$. Ist die diskrete Untergruppe cokompakt, so sind die konstruierten Fundamentalbereiche kompakte Polytope mit totalgeodätischen Seiten, die Identifikationen am Rande des Fundamentalbereichs sind die Seitenpaarungen. Eine wichtige Voraussetzung zur Durchführung der Konstruktion ist die Existenz eines elliptischen Fixpunktes der Operation der diskreten Untergruppe.

Die Lorentz-Mannigfaltigkeit $\mathrm{SU}(1,1)$ läßt sich in den Pseudo-Euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbilinearform $(\cdot\,,\cdot)$ der Signatur $(+,+,-,-)$ als Pseudosphäre

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^4 : (x,x) = 1\}$$

einbetten. Die Identifikation der Gruppe $\mathrm{SU}(1,1)$ mit der Pseudosphäre $\mathbb{S}$ induziert eine Gruppenstruktur auf $\mathbb{S}$. Die diskrete Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ wird dabei mit einer diskreten Untergruppe von $\mathbb{S}$ identifiziert. Die Multiplikation auf $\mathbb{S}$ und damit auch die Operation von $\tilde{\Gamma}$ durch Linksmultiplikation läßt sich auf ganz $\mathbb{R}^4$ erweitern. Nach der Wahl eines elliptischen Fixpunktes von $\tilde{\Gamma}$ wird mit Hilfe der Tangentialhalbräume an die Pseudosphäre $\mathbb{S}$ in Punkten von $\tilde{\Gamma}$ ein vierdimensionales Polytop konstruiert. Die Bilder der dreidimensionalen Seiten dieses Polytops unter der radialen Projektion sind Fundamentalbereiche für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathbb{S}$.

Als Vorbild dient die Konstruktion der Fundamentalbereiche für die Operation einer endlichen nicht zyklischen Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ von $\mathrm{SU}(2)$, zum Beispiel der binären Ikosaedergruppe $\tilde{I}$, auf $\mathrm{SU}(2)$ durch Linksmultiplikation. Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ wird dabei mit der Sphäre $\mathbb{S}^3$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ identifiziert. Jede dreidimensionale Seitenfläche des vierdimensionalen Polytops $\bigcap_{g\in\tilde{\Gamma}} H_g$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf dem Rand dieses Polytops. Die Bilder dieser Seiten unter der radialen Projektion sind Fundamentalbereiche der Operation für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathrm{SU}(2)$. Dieser Ansatz ist allerdings auf unsere Situation nicht direkt übertragbar, denn es gilt $\bigcap_{g\in\tilde{\Gamma}} H_g = \{0\}$. Dies hängt damit zusammen, daß die Pseudosphäre $\mathbb{S}$ nicht konvex ist, und die Tangentialräume damit keine Stützhyperebenen für $\mathbb{S}$ sind. Wir müssen die Konstruktion des vierdimensionalen Polytops in unserem Fall abändern, das Polytop entsteht als Vereinigung endlicher Durchschnitte von Tangentialhalbräumen H_g mit $g \in \tilde{\Gamma}$.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die Konstruktion auf sechs diskrete Untergruppen von $\mathrm{SU}(1,1)$ angewandt. Die zugehörigen Fundamentalbereiche werden explizit bis zur Ermittlung von Figuren zusammen mit Seitenpaarungen ausgerechnet. Die Wahl der entsprechenden Untergruppen von $\mathrm{SU}(1,1)$ ist durch die Singularitätentheorie motiviert. Die Berechnungen konzentrieren sich auf Singularitäten, die in $\mathbb{C}^3$ eingebettet werden können. In der folgenden Tabelle (vergleiche mit [D1], [D2]) listen wir die Stufe und die Signatur des Bildes in $\mathrm{PSU}(1,1)$ für die Hochhebungen auf, die zu den Singularitäten am Anfang der Serien E, Z, Q, S, W und U nach der Klassifikation von Arnold (siehe [AGV]) gehören.

Stufe 1				Stufe 2
E_{12} $(7,3,2)$	E_{13} $(5,4,2)$	E_{14} $(4,3,3)$	$E_{3,0}$ $(3,2,2,2)$	E_{18} $(5,3,3)$
Z_{11} $(8,3,2)$	Z_{12} $(6,4,2)$	Z_{13} $(5,3,3)$	$Z_{1,0}$ $(4,2,2,2)$	Z_{17} $(7,3,3)$
Q_{10} $(9,3,2)$	Q_{11} $(7,4,2)$	Q_{12} $(6,3,3)$	$Q_{2,0}$ $(5,2,2,2)$	Q_{16} $(9,3,3)$
	W_{12} $(5,5,2)$	W_{13} $(4,4,3)$	$W_{1,0}$ $(3,3,2,2)$	W_{17} $(5,5,3)$
	S_{11} $(6,5,2)$	S_{12} $(5,4,3)$	$S_{1,0}$ $(4,3,2,2)$	S_{16} $(7,5,3)$
		U_{12} $(4,4,4)$	$U_{1,0}$ $(3,3,3,2)$	U_{16} $(5,5,5)$

Abbildung 1. Tabelle der Stufen und Signaturen.

Die Fundamentalbereiche zu den Singularitäten E_{12}, Q_{11} und Z_{10} wurden von Thomas Fischer in seiner Dissertation [Fi] ausgerechnet, wobei für die Konstruktion des Fundamentalbereichs der Fixpunkt mit der größten Ordnung gewählt wurde. Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler und Stefan Scheidt haben in ihrer Diplomarbeit [KNRS] die Berechnung der Fundamentalbereiche für die vierzehn Dreieckssingularitäten in der ersten Stufe für alle Wahlen des Fixpunktes außer der Fixpunkte der Ordnung zwei durchgeführt. Dabei heißt eine Singularität eine *Dreieckssingularität,* wenn das Bild der zugehörigen Hochhebung in $\mathrm{PSU}(1,1)$ eine Dreiecksgruppe ist. In dieser Arbeit bestimmen wir die Fundamentalbereiche für sechs Dreieckssingularitäten in der zweiten Stufe, wobei für die Konstruktion des Fundamentalbereichs stets der Fixpunkt mit der größten Ordnung gewählt wird.

Diese Berechnungen sollen dazu dienen, die Zusammenhänge zwischen den Fundamentalbereichen einerseits und den Arnoldschen Serien und den Deformationsrelationen zwischen den Singularitäten andererseits näher zu untersuchen. Die Zusammenstellung der Abbildungen der Fundamentalbereiche, bei deren Konstruktion immer der Fixpunkt mit der größten Ordnung gewählt wurde, in Serien nach der Klassifikation von Arnold im Kapitel 9 läßt vermuten, daß die kombinatorische Struktur der Fundamentalbereiche die Struktur der Serien widerspiegelt.

Im **Kapitel 1** werden die notwendigen Begriffe und Bezeichnungen eingeführt. Die Gruppe $\mathrm{PSU}(1,1)$ wird als Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene interpretiert, bestimmte Elemente in $\mathrm{PSU}(1,1)$ werden ausgezeichnet und ihre Urbilder in $\mathrm{SU}(1,1)$ beschrieben. Im letzten Abschnitt des Kapitels fassen wir die bekannten Ergebnisse über Dreiecksgruppen zusammen und führen einige Begriffe wie die Kantenkorona $\mathcal{K}$ und die Eckenkorona $\mathcal{E}$ einer Dreiecksgruppe ein.

Unter einer *Hochhebung* einer Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ verstehen wir eine Untergruppe Γ^k von G_k, deren Bild unter der Überlagerungsabbildung gleich Γ ist und die vermöge dieser Abbildung zu Γ isomorph ist. Im **Kapitel 2** untersuchen wir die Frage der Existenz und der Eindeutigkeit bzw. der Anzahl der Hochhebungen einer diskreten, endlich erzeugten, cokompakten Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$, insbesondere auch im Spezialfall der Hochhebung einer Dreiecksgruppe in $\mathrm{SU}(1,1)$. Wie bereits erwähnt, sind die Quotienten von G_k nach diskreten Untergruppen von G_k, die Hochhebungen sind, diffeomorph zu Umgebungsrändern gewisser Singularitäten.

Im **Kapitel 3** beschreiben wir die Konstruktion der Fundamentalbereiche. Die einzelnen Elemente der Konstruktion werden dabei geometrisch interpretiert und explizit durch Gleichungen beschrieben. Ferner definieren wir zu jedem $N \subset \Gamma u \backslash \{u\}$ eine Menge F_N, wobei u der für die Konstruktion der Fundamentalbereiche ausgezeichnete Fixpunkt ist. Unter Benutzung der Menge $F_{\Gamma u \backslash \{u\}}$ geben wir eine andere Beschreibung der konstruierten Fundamentalbereiche.

Im **Kapitel 4** beschreiben wir die Symmetrien des Fundamentalbereichs F_e.

Im **Kapitel 5** gehen wir auf die Methoden zur Herleitung einer endlichen Darstellung des Fundamentalbereichs als kompaktes Polytop ein. Wir beweisen eine Ungleichung über die Punkte der Menge $F_{\mathcal{K}}$. Mit Hilfe dieser Abschätzung können wir in einigen Fällen zeigen, daß $F_e = F_{\mathcal{K}}$ gilt. In anderen Fällen werden wir eine Darstellung der Menge $F_{\mathcal{K}}$ bzw. $F_{\mathcal{E}}$ als kompaktes Polytop herleiten und ihre Kombinatorik untersuchen, um $F_e = F_{\mathcal{K}}$ bzw. $F_e = F_{\mathcal{E}}$ zu beweisen.

In den **Kapiteln 6–8** werden die Rechnungen zur Bestimmung der Fundamentalbereiche in den Fällen $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,3)^2$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma(9,3,3)^2$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,3)^2$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,5)^2$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$ durchgeführt.

Im **Kapitel 9** werden die Abbildungen aller berechneten Fundamentalbereiche entsprechend den Arnoldschen Serien zusammengestellt, einschließlich der von Thomas Fischer, Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler und Stefan Scheidt bestimmten Fundamentalbereiche. Diese Zusammenstellung soll helfen, die Entsprechungen zwischen der kombinatorischen Struktur der Fundamentalbereiche und den Serien von Singularitäten festzustellen.

Am Ende der Arbeit wird ein **Ausblick** auf einige Fragen im Zusammenhang mit der Konstruktion der Fundamentalbereiche gegeben, die in dieser Arbeit (noch) nicht beantwortet werden konnten.

Im **Anhang** sind die Formeln der (hyperbolischen) Trigonometrie zusammengefaßt, die bei den Rechnungen (auch ohne einen expliziten Hinweis auf den Anhang) oft benutzt wurden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die am Entstehen der vorliegenden Arbeit beteiligt waren. Herrn Prof. Dr. Egbert Brieskorn möchte ich ganz herzlich für die intensive Betreuung und das schöne und interessante Thema einer Arbeit danken, die mich in verschiedene Gebiete der Mathematik eingeführt hat. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Ludwig Balke für zahlreiche Gespräche und hilfreiche Kritik, für die mehrmalige sorgfältige Durchsicht des Textes und wertvolle Anregungen, die zur Lesbarkeit der nun vorliegenden Fassung beigetragen haben. Herrn Dr. Claus Hertling danke ich für Diskussionen über Hochhebungen von Gruppen. Weitergeholfen haben mir auch Gespräche mit Frank Rothenhäusler. Dafür auch ihm meinen herzlichen Dank. Birgit Richter bin ich für das Durchlesen der Einleitung dankbar. Für die Hilfe mit dem Programm Maple danke ich Ludwig Balke und Frank Rothenhäusler. Meinem Mann Ilyá danke ich für den Layout dieses Textes und das Schreiben des Programms `off2ps`, das zur Erstellung der Abbildungen der Fundamentalbereiche benutzt wurde. Den größten Dank zolle ich meinem Mann, meinen Eltern und meiner Großmutter für ihre Unterstützung und dafür, daß sie immer für mich da waren.

Kapitel I

Begriffe und Bezeichnungen

Один англичанин никак не мог вспомнить, как эта птица называется.

— Это, — говорит, — крюкица. Ах нет, не крю́кица, а кирюкица. Или нет, не кирю́кица, а куря́кица. Фу ты! Не куря́кица, а кукрикица. Да и не кукри́кица, а кирикрю́кица. . . .

Забыл я, как эта птица называется. А ежели бы не забыл, то рассказал бы вам рассказ про эту кирикуркукукрекицу.

Даниил Хармс

§1. Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene

Verschiedene Modelle der hyperbolischen Ebene ermöglichen die Identifikation der Gruppe ihrer orientierungserhaltenden Isometrien mit verschiedenen Liegruppen. Für die offene Kreisscheibe $\mathbb{D}$ gilt $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}) = \mathrm{PSU}(1,1) = \mathrm{SU}(1,1)/\{\pm 1\}$, für die obere Halbebene $\mathbb{H}$ gilt $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ und für das Hyperquadrikenmodell H^2 gilt $\mathrm{Isom}^+(H^2) = \mathrm{SO}(2,1)_0$. Damit sind diese Gruppen isomorph: $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathrm{PSU}(1,1) \cong \mathrm{SO}(2,1)_0$. Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ scheint uns vertrauter zu sein, für die Gruppe $\mathrm{SU}(1,1)$ ist aber die geometrische Interpretation als Pseudosphäre in einem semi-Euklidischen Raum (Sprechweise aus [ON]) klarer, so daß wir uns in dieser Arbeit überwiegend mit dem Poincaré-Modell $\mathbb{D}$ der hyperbolischen Ebene, der Gruppe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}) = \mathrm{PSU}(1,1)$ der orientierungserhaltenden Isometrien und ihrer zweiblättrigen Überlagerung

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}(1,1) &= \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) : A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \det A = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}\end{aligned}$$

befassen werden. Es sei ρ die hyperbolische und d die Euklidische Metrik auf $\mathbb{D}$. Die Gruppe $\mathrm{SU}(1,1)$ kann durch die Bijektion

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto (a,b)$$

mit der Pseudosphäre $\mathbb{S} := \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ identifiziert werden. Hier und weiter identifizieren wir stillschweigend $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{C}^2$. Die Identifikation der Gruppe $\mathrm{SU}(1,1)$ mit der Pseudosphäre $\mathbb{S}$ induziert eine Gruppenstruktur auf $\mathbb{S}$ mit der Multiplikation

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 + b_1\bar{b}_2, a_1b_2 + b_1\bar{a}_2).$$

Es sei $e \in \mathbb{S}$ das Einselement bezüglich dieser Multiplikation. Es gilt $e = (1,0)$ als Element von $\mathbb{C}^2$, $e = (1,0,0,0)$ als Element von $\mathbb{R}^4$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ als Element von $\mathrm{SU}(1,1)$. Wir werden auch 1 statt e schreiben, wenn es nicht zu Verwechslungen führt.

Es gilt $\mathrm{Z}(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})) = \{1\}$ und $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$. Mit Hilfe der Iwasawa-Zerlegung

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{R} \right\}$$

sieht man, daß $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(1,1)$ homöomorph zu einem offenen Volltorus ist

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2.$$

Den Homöomorphismus kann man auch explizit hinschreiben: Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{a}{|a|}, b\right)$$

ist ein Homöomorphismus zwischen $\mathrm{SU}(1,1)$ und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$. Der offene Volltorus und damit auch $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(1,1)$ ist homotopieäquivalent zu der Kreislinie $\mathbb{S}^1$, es gilt also $\pi_1(\mathrm{SU}(1,1),*) \cong \mathbb{Z}$. Es gibt damit zu jeder natürlichen Zahl k eine bis auf Isomorphie eindeutige k-blättrige Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$. Die unendlichblättrige universelle Überlagerung $p : \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1) \to \mathrm{PSU}(1,1)$ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ ist auch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Auf $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ gibt es eine Liegruppenstruktur derart, daß die Überlagerungssbbildung p zu einem Homomorphismus von Liegruppen wird. Für das Zentrum von $\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)$ gilt

$$Z(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)) = p^{-1}(1) \cong \mathbb{Z}.$$

Die universelle Überlagerung induziert durch

$$G_k := \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)/kZ(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1))$$

eine k-fache Überlagerung $\pi_k : G_k \to \mathrm{PSU}(1,1)$ von $\mathrm{PSU}(1,1)$. Auf G_k wird dadurch eine Liegruppenstruktur induziert und die Überlagerungssbbildung π_k ist ein Homomorphismus von Liegruppen. Für das Zentrum von G_k gilt

$$Z(G_k) = \pi_k^{-1}(1) \cong \mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1))/k\,\mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

Ein Element $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ heißt *elliptisch, hyperbolisch* oder *parabolisch,* je nachdem ob $|\operatorname{Spur} A| = |a+d|$ kleiner, größer oder gleich 2 ist. In die Sprache von $\mathrm{SU}(1,1)$ übersetzt, bedeutet es: Ein Element $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(1,1)$ heißt *elliptisch, hyperbolisch* oder *parabolisch,* je nachdem ob $|\operatorname{Re}(a)|$ kleiner, größer oder gleich 1 ist. Ein elliptisches Element in $\mathrm{SU}(1,1)$ hat in $\bar{\mathbb{D}}$ genau einen Fixpunkt und zwar in $\mathbb{D}$. Ein hyperbolisches Element in $\mathrm{SU}(1,1)$ hat in $\bar{\mathbb{D}}$ genau zwei verschiedene Fixpunkte und zwar in $\partial\mathbb{D}$. Ein parabolisches Element in $\mathrm{SU}(1,1)$ hat in $\bar{\mathbb{D}}$ genau einen Fixpunkt und zwar in $\partial\mathbb{D}$.

Eine diskrete Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ heißt eine *Fuchssche Gruppe.* Eine Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ ist genau dann diskret, endlich erzeugt und cokompakt, wenn Γ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{D}$ operiert und $\mathbb{D}/\Gamma$ eine kompakte Riemannsche Fläche ist. Die Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma$ ist dann eine über endlich vielen Punkten verzweigte Überlagerung von Riemannschen Flächen. Die *Signatur* einer diskreten, endlich erzeugten, cokompakten Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ ist $(g;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, wobei g das Geschlecht der Riemannschen Fläche $\mathbb{D}/\Gamma$ ist, m die Anzahl der Verzweigungspunkte der Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma$ und $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ die Verzweigungsordnungen dieser Punkte. Ein Tupel $(g;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ ist genau dann Signatur einer Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} < 2(g-1) + m.$$

Damit sind genau die folgenden Tupel keine Signaturen von Untergruppen von $\mathrm{PSU}(1,1)$

$$\begin{aligned}
&g = 0, \quad m \leqslant 2: \quad \text{alle},\\
&g = 0, \quad m = 3: \quad (2,2,\alpha),\ \alpha \geqslant 2, \quad (2,3,\alpha),\ \alpha = 3,4,5,6, \quad (2,4,4), \quad (3,3,3),\\
&g = 0, \quad m = 4: \quad (2,2,2,2),\\
&g = 1, \quad m = 0.
\end{aligned}$$

§2. Elliptische und hyperbolische Elemente als Matrizen

Wir zeichnen nun bestimmte Elemente in $\mathrm{PSU}(1,1)$ aus und beschreiben ihre Urbilder in $\mathrm{SU}(1,1)$.

DEFINITION. Es sei $x \in \mathbb{D}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

Für $u \in \mathbb{D}$ mit $u \neq x$ sei $\tau_{u,x} \in \mathrm{PSU}(1,1)$ die *Translation* von u nach x, das heißt, $\tau_{u,x}$ ist das hyperbolische Element mit $\tau_{u,x}(u) = x$, das die Geodätische zwischen u und x invariant läßt. τ_x sei definiert durch $\tau_x := \tau_{0,x}$ für $x \neq 0$ und $\tau_0 := \mathrm{id}$.

Es sei $\rho_{x,\varphi} \in \mathrm{PSU}(1,1)$ die *Drehung* in x um den Winkel φ, das heißt, $\rho_{x,\varphi}$ ist das elliptische Element mit $\rho_{x,\varphi}(x) = x$ und $\rho'_{x,\varphi}(x) = e^{i\varphi}$. Es sei $\rho_\varphi := \rho_{0,\varphi}$.

$t_x \in \mathrm{SU}(1,1)$ sei definiert durch

$$t_x := \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

$r_{x,\varphi} \in \mathrm{SU}(1,1)$ sei definiert durch

$$r_{x,\varphi} := \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} + i\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} & -i\frac{2x}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\frac{2\bar{x}}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} - i\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

$r_\varphi \in \mathrm{SU}(1,1)$ sei definiert durch

$$r_\varphi := \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $r_\varphi = r_{0,\varphi}$ und $r_{x,\varphi} = t_x \cdot r_\varphi \cdot t_x^{-1}$.

PROPOSITION 1. *Es sei $x \in \mathbb{D}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Unter der Identifikation $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathbb{S}$ durch $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \mapsto (a,b)$ gilt*

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} \cdot (1,x), \\ r_\varphi &= (e^{i\varphi/2}, 0), \\ r_{x,\varphi} &= (\cos\frac{\varphi}{2} + i\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2}, -i\frac{2x}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln $\cosh\rho(0,x) = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}$ und $\sinh\rho(0,x) = \frac{2|x|}{1-|x|^2}$ (siehe Anhang) folgt ferner

$$r_{x,\varphi} = (\cos\frac{\varphi}{2} + i\cosh\rho(0,x)\sin\frac{\varphi}{2}, -i\frac{x}{|x|}\sinh\rho(0,x)\sin\frac{\varphi}{2}). \ \blacksquare$$

PROPOSITION 2. *Es sei $\pi = \pi_2 : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{PSU}(1,1)$ die Überlagerungsabbildung. Für $x \in \mathbb{D}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\pi^{-1}(\tau_x) = \pm t_x$ und $\pi^{-1}(\rho_{x,\varphi}) = \pm r_{x,\varphi}$, insbesondere gilt $\pi^{-1}(\rho_\varphi) = \pm r_\varphi$.*

BEWEIS. $\pi^{-1}(\tau_0) = \pm t_0$ ist klar. Es sei $x = re^{i\psi} \neq 0$. Für

$$t_x = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} 1 & re^{i\psi} \\ re^{-i\psi} & 1 \end{pmatrix}$$

rechnet man leicht nach, daß $t_x(0) = x$ und $t_x(\pm e^{i\psi}) = \pm e^{i\psi}$ gilt:

$$\begin{aligned} t_x(0) &= \frac{re^{i\psi}}{1} = e^{i\psi} = x, \\ t_x(e^{i\psi}) &= \frac{e^{i\psi} + re^{i\psi}}{re^{-i\psi}e^{i\psi} + 1} = \frac{(r+1)e^{i\psi}}{r+1} = e^{i\psi}, \\ t_x(-e^{i\psi}) &= \frac{-e^{i\psi} + re^{i\psi}}{-re^{-i\psi}e^{i\psi} + 1} = \frac{(r-1)e^{i\psi}}{-(r-1)} = -e^{i\psi}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\pi(t_x) = \tau_x$ und $\pi^{-1}(\tau_x) = \pm t_x$.

Für

$$r_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

rechnet man leicht nach, daß $r_\varphi(0) = 0$ und $r'_\varphi(0) = e^{i\varphi}$ gilt, es gilt nämlich

$$r'_\varphi(z) = \frac{1}{(e^{-i\varphi/2})^2} = e^{i\varphi}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Daraus folgt $\pi(r_\varphi) = \rho_\varphi$ und $\pi^{-1}(\rho_\varphi) = \pm r_\varphi$.

Für $r_{x,\varphi} = t_x \circ r_\varphi \circ t_x^{-1}$ rechnet man mit $t_x^{-1}(x) = 0$ und $(r_\varphi \circ t_x^{-1})(x) = r_\varphi(0) = 0$ leicht nach, daß $r_{x,\varphi}(x) = x$ und $r'_{x,\varphi}(x) = e^{i\varphi}$ gilt:

$$\begin{aligned} r_{x,\varphi}(x) &= (t_x \circ r_\varphi \circ t_x^{-1})(x) = t_x(0) = x, \\ r'_{x,\varphi}(x) &= (t_x \circ r_\varphi \circ t_x^{-1})'(x) = t'_x(0) \cdot r'_\varphi(0) \cdot (t_x^{-1})'(x) \\ &= e^{i\varphi} \cdot (t_x^{-1})'(t_x(0)) \cdot t'_x(0) = e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

(Dabei werden hier und weiter in diesem Beweis die Elemente von $\mathrm{SU}(1,1)$ durch ihre Wirkung auf $\mathbb{D}$ beschrieben.) Daraus folgt $\pi(r_{x,\varphi}) = \rho_{x,\varphi}$ und $\pi^{-1}(\rho_{x,\varphi}) = \pm r_{x,\varphi}$.

Alternativ kann man auch für

$$r_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} + i\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} & -i\frac{2x}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\frac{2\bar{x}}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} - i\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

direkt zeigen, daß $r_{x,\varphi}(x) = x$ und $r'_{x,\varphi}(x) = e^{i\varphi}$ gilt:

$$\begin{aligned} r_{x,\varphi}(x) &= \frac{((1-|x|^2)\cos\frac{\varphi}{2} + i(1+|x|^2)\sin\frac{\varphi}{2})x - 2ix\sin\frac{\varphi}{2}}{2i\bar{x}x\sin\frac{\varphi}{2} + (1-|x|^2)\cos\frac{\varphi}{2} - i(1+|x|^2)\sin\frac{\varphi}{2}} \\ &= x\frac{(1-|x|^2)(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2})}{(1-|x|^2)(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2})} = x, \\ r'_{x,\varphi}(x) &= \frac{(1-|x|^2)^2}{(2i\bar{x}x\sin\frac{\varphi}{2} + (1-|x|^2)\cos\frac{\varphi}{2} - i(1+|x|^2)\sin\frac{\varphi}{2})^2} \\ &= \frac{(1-|x|^2)^2}{(1-|x|^2)^2(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2})^2} = e^{i\varphi}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

§3. Dreiecksgruppen

Eine *Dreiecksgruppe* ist eine diskrete Gruppe von orientierungserhaltenden Isometrien der hyperbolischen Ebene, die von Spiegelungen an den Seiten eines hyperbolischen Dreiecks mit Winkeln π/p, π/q und π/r mit $p, q, r \in \mathbb{N}$ erzeugt wird. Ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln π/p, π/q und π/r existiert bekanntlich genau dann, wenn die Summe der Winkel kleiner als π, das heißt, die rationale Zahl $1/p + 1/q + 1/r$ kleiner als 1 ist. Die Dreiecksgruppen zu isometrischen Dreiecken sind in der Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien konjugiert.

Für die explizite Konstruktion ist es ratsam, in jeder Isometrieklasse solcher hyperbolischen Dreiecke ein Dreieck auszuzeichnen. Damit wird auch in jeder Konjugationsklasse von Dreiecksgruppen eine Gruppe ausgezeichnet.

Es sei $\Delta(p,q,r) \subset \mathbb{D}$ das hyperbolische Dreieck mit Ecken $u, v, w \in \mathbb{D}$ und Winkeln

$$\alpha_u = \frac{\pi}{p}, \quad \alpha_v = \frac{\pi}{q} \quad \text{und} \quad \alpha_w = \frac{\pi}{r}$$

derart, daß gilt

$$u = 0, \quad v \in \mathbb{R}, \quad v > 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(w) > 0.$$

Daraus folgt unter anderem $w = |w| \cdot e^{i\frac{\pi}{p}}$. Die Seitenlängen

$$\ell_v := \rho(u,v), \quad \ell_w := \rho(u,w), \quad \ell_{vw} := \rho(v,w)$$

des Dreiecks $\Delta(p,q,r)$ lassen sich aus den Winkeln berechnen (siehe Anhang):

$$\cosh \ell_v = \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}+\cos\frac{\pi}{r}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{q}}, \quad \cosh \ell_w = \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{r}+\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}},$$

$$\cosh \ell_{vw} = \frac{\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}+\cos\frac{\pi}{p}}{\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{r}}$$

und

$$\sinh \ell_v = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{q}}, \quad \sinh \ell_w = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}}, \quad \sinh \ell_{vw} = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{r}}.$$

mit

$$W := \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}+\cos^2\frac{\pi}{r}+2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}-1}.$$

Notation. Es sei $C := \cosh \ell_v$ und $S := \sinh \ell_v$. Es gilt also

$$C = \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}+\cos\frac{\pi}{r}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{q}} \quad \text{und} \quad S = \sqrt{C^2-1}.$$

Es sei $\Gamma(p,q,r)^* \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$ die von den Spiegelungen an den Seiten von $\Delta(p,q,r)$ erzeugte Gruppe und es sei

$$\Gamma(p,q,r) = \Gamma(p,q,r)^* \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D}).$$

$\Gamma(p,q,r)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$ mit Signatur $(0;p,q,r)$.

Es sei $\rho_u := \rho_{u,2\pi/p}$, $\rho_v := \rho_{v,2\pi/q}$ und $\rho_w := \rho_{w,2\pi/r}$. Die Dreiecksgruppe $\Gamma(p,q,r)$ wird von den Elementen ρ_u und ρ_v erzeugt und besitzt eine Präsentation

$$\Gamma(p,q,r) \cong \langle a,b,c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1\rangle,$$

wobei der Isomorphismus durch die Zuordnung $a \mapsto \rho_u$, $b \mapsto \rho_v$ und $c \mapsto \rho_w$ gestiftet wird.

Die Bahn des hyperbolischen Dreiecks $\Delta(p,q,r)$ unter der Operation der Gruppe $\Gamma(p,q,r)^*$ ergibt eine Pflasterung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{D}$. Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt dieser Pflasterung der hyperbolischen Ebene mit den Fundamentaldreiecken für die volle Dreiecksgruppe $\Gamma(5,3,3)^*$.

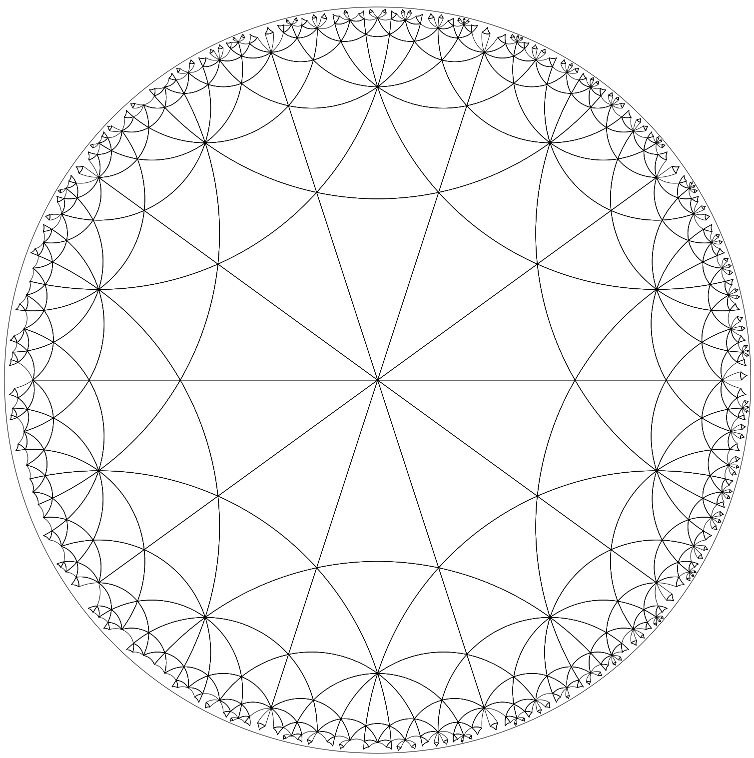


Abbildung 2. Die Pflasterung der hyperbolischen Ebene $\mathbb{D}$ für $\Gamma(5,3,3)^*$.

Wir betrachten nun die Bahn der Ecke $u = 0$ des Dreiecks $\Delta(p,q,r)$ unter der Operation von $\Gamma(p,q,r)$ und zeichnen gewisse Teilmengen darin aus.

DEFINITION. Für $m,l \in \mathbb{Z}$ sei

$$x_{m,l} := \rho_u^m \rho_v^l(u) \quad \text{und} \quad \tilde{x}_{m,l} := \rho_u^m \rho_w^l(u).$$

Die *Eckenkorona* sei definiert durch

$$\mathcal{E} = \{x_{m,l} : m = 0,\dots,p-1,\ l = 1,\dots,q-1\} \cup \{\tilde{x}_{m,l} : m = 0,\dots,p-1,\ l = 1,\dots,r-1\}$$

und die *Kantenkorona* durch $\mathcal{K} = \{x_{0,1},\dots,x_{p-1,1},\tilde{x}_{0,1},\dots,\tilde{x}_{p-1,1}\}$.

PROPOSITION 3. *Für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *gilt* $x_{m,q-1} = \tilde{x}_{m,1}$ *und* $x_{m+1,1} = \tilde{x}_{m,r-1}$.

BEWEIS. Folgt aus $\rho_v^{q-1} = \rho_v^{-1} = \rho_w\rho_u$ und $\rho_w^{r-1} = \rho_w^{-1} = \rho_u\rho_v$. ∎

KOROLLAR 4. *Es gilt also*

$$\mathcal{K} = \{x_{0,1}, x_{0,q-1},\dots,x_{p-1,1},x_{p-1,q-1}\}. \ ∎$$

BEMERKUNG. Die Teilmengen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{K}$ können eingeführt werden, ohne auf die Präsentation von $\Gamma(p,q,r)$ zurückzugreifen. Die (abgeschlossene) *Dirichletzelle* von $x \in \mathbb{D}$ ist

$$D(x) := \{y \in \mathbb{D} : \forall\, z \in \Gamma x\ \rho(y,z) \geqslant \rho(y,x)\}.$$

Es sei x ein Punkt aus der Bahn von u. Die Dirichletzelle von x kann auch als die Vereinigung aller den Punkt x enthaltender Bilder von $\Delta(p,q,r)$ unter den Elementen von $\Gamma(p,q,r)^*$ beschrieben werden. Die *Eckenkorona* $\mathcal{E}_x$ von x besteht aus allen Punkten in $\Gamma u \backslash \{x\}$, deren Dirichletzellen mindestens einen gemeinsamen Punkt mit der Dirichletzelle von x haben, während die *Kantenkorona* $\mathcal{K}_x$ von x aus allen Punkten in $\Gamma u \backslash \{x\}$ besteht, deren Dirichletzellen mindestens eine gemeinsame Kante mit der Dirichletzelle von x haben. Man erkennt nun, daß die Teilmengen $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{K}$ die Ecken- bzw. Kantenkorona des Punktes u sind. Die Definition von $x_{m,l}$ und $\tilde{x}_{m,l}$ dient zur Numerierung der Elemente von $\mathcal{E} = \mathcal{E}_u$ bzw. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_u$.

PROPOSITION 5. *Für alle* $x \in \mathcal{K}$ *gilt*

$$\cosh\rho(0,x) = 2\sinh^2\ell_v \sin^2\frac{\pi}{q} + 1 \quad \textit{und} \quad |x| = \frac{\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}}{\sqrt{\sinh^2\ell_v\sin^2\frac{\pi}{q}+1}}.$$

BEWEIS. Es sei $x \in \{x_{0,1}, x_{0,q-1}\} \subset \mathcal{K}$. Aus der Kosinus-Regel für das gleichschenklige Dreieck $0, v, x$ folgt

$$\begin{aligned}\cosh\rho(0,x) &= \cosh^2\ell_v - \sinh^2\ell_v\cos\frac{2\pi}{q} = \sinh^2\ell_v + 1 - \sinh^2\ell_v\cos\frac{2\pi}{q}\\ &= \sinh^2\ell_v(1-\cos\frac{2\pi}{q}) + 1 = 2\sinh^2\ell_v\sin^2\frac{\pi}{q}+1\end{aligned}$$

Die anderen Elemente der Kantenkorona entstehen aus $x_{0,1}$ bzw. $x_{0,q-1}$ durch Drehung um 0, haben also den gleichen (hyperbolischen) Abstand von $u = 0$. Aus dem hyperbolischen Abstand $\rho(0,x)$ berechnet sich der euklidische Abstand

$$|x| = \sqrt{\frac{\cosh\rho(0,x)-1}{\cosh\rho(0,x)+1}} = \frac{\sinh\ell_v\sin\frac{\pi}{q}}{\sqrt{\sinh^2\ell_v\sin^2\frac{\pi}{q}+1}}. \ ∎$$

PROPOSITION 6. *Für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\begin{aligned}\cosh\rho(x_{m,1},x_{m,q-1}) &= 2\sinh^2\ell_v\sin^2\frac{2\pi}{q}+1\\ \cosh\rho(x_{m,q-1},x_{m+1,1}) &= 2\sinh^2\ell_w\sin^2\frac{2\pi}{r}+1\\ |x_{m,1}-x_{m,q-1}| &= \frac{\sinh\ell_v\sin\frac{2\pi}{q}}{\sinh^2\ell_v\sin^2\frac{\pi}{q}+1}\\ |x_{m,q-1}-x_{m+1,1}| &= \frac{\sinh\ell_w\sin\frac{2\pi}{r}}{\sinh^2\ell_w\sin^2\frac{\pi}{r}+1}.\end{aligned}$$

Es gilt ferner

$$\frac{|x_{m,1} - x_{m,q-1}|}{\cos\frac{\pi}{q}} = \frac{|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|}{\cos\frac{\pi}{r}}.$$

BEWEIS. Aus der Kosinus-Regel für das gleichschenklige Dreieck $v, x_{m,1}, x_{m,q-1}$ folgt

$$\begin{aligned}\cosh\rho(x_{m,1}, x_{m,q-1}) &= \cosh^2\ell_v - \sinh^2\ell_v \cos\frac{4\pi}{q} = \sinh^2\ell_v + 1 - \sinh^2\ell_v \cos\frac{4\pi}{q} \\ &= \sinh^2\ell_v (1 - \cos\frac{4\pi}{q}) + 1 = 2\sinh^2\ell_v \sin^2\frac{2\pi}{q} + 1\end{aligned}$$

Wegen $\rho(0, x_{m,1}) = \rho(0, x_{m,q-1})$ berechnet sich der euklidische Abstand aus dem hyperbolischen Abstand wie folgt

$$\begin{aligned}|x_{m,1} - x_{m,q-1}| &= \frac{\sqrt{2(\cosh\rho(x_{m,1}, x_{m,q-1}) - 1)}}{\cosh\rho(0, x_{m,1}) + 1} \\ &= \frac{\sinh\ell_v \sin\frac{2\pi}{q}}{\sinh^2\ell_v \sin^2\frac{\pi}{q} + 1} = \frac{2\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{q}}{\sinh^2\ell_v \sin^2\frac{\pi}{q} + 1}.\end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\cosh\rho(x_{m,q-1}, x_{m+1,1}) = \cosh\rho(\tilde{x}_{m,1}, \tilde{x}_{m,r-1}) = 2\sinh^2\ell_w \sin^2\frac{2\pi}{r} + 1$$

und

$$|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}| = |\tilde{x}_{m,1} - \tilde{x}_{m,r-1}| = \frac{2\sinh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}\cos\frac{\pi}{r}}{\sinh^2\ell_w \sin^2\frac{\pi}{r} + 1}.$$

Aus der Sinus-Regel für das hyperbolische Dreieck $\Delta(p, q, r)$ folgt

$$\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q} = \sinh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}$$

und damit

$$\frac{|x_{m,1} - x_{m,q-1}|}{\cos\frac{\pi}{q}} = \frac{2\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}}{\sinh^2\ell_v \sin^2\frac{\pi}{q} + 1} = \frac{2\sinh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}}{\sinh^2\ell_w \sin^2\frac{\pi}{r} + 1} = \frac{|x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|}{\cos\frac{\pi}{r}}. \blacksquare$$

Kapitel II

Hochhebung Fuchsscher Gruppen

Подъём на самый верх занял от силы десять минут, а если бы Саша сразу попадал ключом в замочные скважины, понадобилось бы и того меньше. От уровня к уровню вела узкая служебная лестница, вырубленная в толще камня — что это за камень, определить было трудно, потому что он был очень приблизительным, да и существовал недолго: когда за Сашей закрылась последняя дверь, реальность снова приобрела ясные цвета и чёткость.

Виктор Пелевин, Принц госплана

Hochhebungen Fuchsscher Gruppen stellen eine wichtige Klasse diskreter Untergruppen endlicher Überlagerungen von $\mathrm{PSU}(1,1)$ dar. Die Quotienten nach diskreten Untergruppen, die Hochhebungen sind, sind diffeomorph zu Umgebungsrändern gewisser Singularitäten. Im diesem Kapitel untersuchen wir die Frage der Existenz und der Eindeutigkeit bzw. der Anzahl der Hochhebungen einer diskreten, endlich erzeugten, cokompakten Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$, insbesondere auch im Spezialfall der Hochhebung einer Dreiecksgruppe in $\mathrm{SU}(1,1)$.

§4. Existenz und Eindeutigkeit der Hochhebung

Es sei $p : \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1) \to \mathrm{PSU}(1,1)$ eine universelle Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$. Es sei k eine natürliche Zahl. Es sei $\pi = \pi_k : G_k \to \mathrm{PSU}(1,1)$ mit $G_k := \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)/kZ(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1))$ die induzierte k-fache Überlagerung von $\mathrm{PSU}(1,1)$ und $\tau : \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1) \to G_k$ die induzierte universelle Überlagerung von G_k.

Definition. Eine *Hochhebung* einer Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ in G_k ist eine Untergruppe Γ^k von G_k derart, daß $\pi|_{\Gamma^k} : \Gamma^k \to \Gamma$ ein Isomorphismus ist.

Die Frage der Existenz und der Eindeutigkeit bzw. der Anzahl der Hochhebungen einer diskreten, endlich erzeugten, cokompakten Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ läßt sich anhand der Signatur der Gruppe beantworten.

Satz 7. *Es sei Γ eine diskrete, endlich erzeugte, cokompakte Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ mit Signatur $(g;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$. Es sei L das kleinste gemeinsame Vielfache von $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ und $b := 2(g-1)+m$. Es gibt genau dann Hochhebungen von Γ in G_k, wenn*

$$\mathrm{ggT}(k,\alpha_i) = 1 \text{ für } i = 1,\ldots,m$$

gilt und die Zahl

$$L \cdot \Big(b - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}\Big)$$

durch k teilbar ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt es genau k^{2g} Hochhebungen von Γ in G_k, insbesondere ist die Hochhebung im Falle $g = 0$ eindeutig.

Beweis.

(1) Die folgende Aussage werden wir im Beweis benutzen: Es sei Γ eine diskrete, endlich erzeugte, cokompakte Untergruppe Γ von $\mathrm{PSU}(1,1)$ mit Signatur $(g;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$. Dann gibt es ein Erzeugendensystem $\bar r_1,\ldots,\bar r_m,\bar a_1,\bar b_1,\ldots,\bar a_g,\bar b_g$ von Γ mit Relationen

$$\bar r_1^{\alpha_1} = \cdots = \bar r_m^{\alpha_m} = \bar r_1 \cdot \ldots \cdot \bar r_m \cdot [\bar a_1,\bar b_1] \cdot \ldots \cdot [\bar a_g,\bar b_g] = 1,$$

das sich zu einem Erzeugendensystem $r_1,\ldots,r_m,a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g,h$ von $p^{-1}(\Gamma)$ mit Relationen

$$[r_i,h] = [a_j,h] = [b_j,h] = 1$$

für $i \in I := \{1, \ldots, m\}$, $j \in J := \{1, \ldots, g\}$ und

$$r_1^{\alpha_1} = \cdots = r_m^{\alpha_m} = h, \quad r_1 \cdot \ldots \cdot r_m \cdot [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_g, b_g] = h^b$$

hochheben läßt, wobei h ein Erzeuger von $Z(\widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)) = p^{-1}(1) \cong \mathbb{Z}$ ist. Damit ist gemeint, daß

$$p(r_i) = \bar{r}_i \text{ für } i \in I, \quad p(a_j) = \bar{a}_j, p(b_j) = \bar{b}_j \text{ für } j \in J$$

gilt. Diese Aussage wird (für $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathrm{PSU}(1,1)$) in [RV] bewiesen. Dabei wird die Beschreibung des Quotienten $\mathrm{PSU}(1,1)/\Gamma \cong \widetilde{\mathrm{SU}}(1,1)/p^{-1}(\Gamma)$ als Seifertscher Faserraum und die Berechnung seiner Invarianten aus [NR] benutzt. Zu Seifertschen Faserräumen, ihren Invarianten und Fundamentalgruppen siehe auch [Se], [Or] und [Sc].

(2) Wir beschreiben nun die Hochhebungen durch ihre Erzeugendensysteme: Den Hochhebungen von Γ in G_k entsprechen bijektiv die Folgen $(R_i, A_j, B_j)_{i \in I, j \in J}$ von Elementen aus G_k mit

$$\begin{aligned} &\pi(R_i) = \bar{r}_i \text{ für } i \in I, \quad \pi(A_j) = \bar{a}_j,\ \pi(B_j) = \bar{b}_j \text{ für } j \in J, \\ &R_1^{\alpha_1} = \cdots = R_m^{\alpha_m} = R_1 \cdot \ldots \cdot R_m \cdot [A_1, B_1] \cdot \ldots \cdot [A_g, B_g] = 1. \end{aligned} \qquad (*)$$

Ist Γ^k eine Hochhebung von Γ in G_k und $\varphi : \Gamma \to \Gamma^k$ der Homomorphismus mit $\pi|_{\Gamma^k} \circ \varphi = \mathrm{id}_\Gamma$ und $\varphi \circ \pi|_{\Gamma^k} = \mathrm{id}_{\Gamma^k}$, so erfüllen die Elemente $R_i := \varphi(\bar{r}_i)$ für $i \in I$, $A_j := \varphi(\bar{a}_j)$, $B_j := \varphi(\bar{b}_j)$ die Bedingung $(*)$.

Erfüllen andererseits die Elemente $R_1, \ldots, R_m$ und $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ die Bedingung $(*)$, so sei Γ^k gleich der Untergruppe $\langle R_i, A_j, B_j \mid i \in I, j \in J \rangle$ von G_k, die von den Elementen R_i, A_j und B_j erzeugt wird. Wegen der Bedingung $(*)$ gibt es einen Homomorphismus $\varphi : \Gamma \to \Gamma^k$ mit $\varphi(\bar{r}_i) = R_i$ für $i \in I$ und $\varphi(\bar{a}_j) = A_j$, $\varphi(\bar{b}_j) = B_j$ für $j \in J$ und es gilt $\pi|_{\Gamma^k} \circ \varphi = \mathrm{id}_\Gamma$ und $\varphi \circ \pi|_{\Gamma^k} = \mathrm{id}_{\Gamma^k}$, also ist $\pi|_{\Gamma^k}$ ein Isomorphismus. Damit ist die Untergruppe Γ^k eine Hochhebung von Γ in G_k.

(3) Das Erzeugendensystem einer Hochhebung beschreiben wir nun durch eine Zahlenfolge: Den Folgen $(R_i, A_j, B_j)_{i \in I, j \in J}$ von Elementen aus G_k, die die Bedingung $(*)$ erfüllen, entsprechen bijektiv die Folgen $(u_i, v_j, w_j)_{i \in I, j \in J}$ von Zahlen aus $\{0, \ldots, k-1\}$ mit

$$u_1\alpha_1 + 1 \equiv \cdots \equiv u_m\alpha_m + 1 \equiv b + \sum_{i=1}^{m} u_i \equiv 0 \mod k. \qquad (**)$$

Erfüllen die Elemente $R_1, \ldots, R_m$ und $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ aus G_k die Bedingung

$$\pi(R_i) = \bar{r}_i \text{ für } i \in I, \quad \pi(A_j) = \bar{a}_j,\ \pi(B_j) = \bar{b}_j \text{ für } j \in J,$$

so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $(u_i, v_j, w_j)_{i \in I, j \in J}$ aus $\{0, \ldots, k-1\}$ mit

$$R_i = \tau(r_i h^{u_i}) \text{ für } i \in I, \quad A_j = \tau(a_j h^{v_j}),\ B_j = \tau(b_j h^{w_j}) \text{ für } j \in J.$$

Für $i \in I$ gilt

$$R_i^{\alpha_i} = \tau(r_i^{\alpha_i} h^{\alpha_i u_i}) = \tau(h^{1+u_i\alpha_i})$$

und damit

$$R_i^{\alpha_i} = 1 \iff u_i\alpha_i + 1 \equiv 0 \mod k.$$

Für $j \in J$ gilt $[A_j, B_j] = \tau([a_j h^{v_j}, b_j h^{w_j}]) = \tau([a_j, b_j])$. Es gilt damit

$$R_1 \cdot \ldots \cdot R_m \cdot [A_1, B_1] \cdot \ldots \cdot [A_g, B_g] = \tau(h^{b+u_1+\cdots+u_m})$$

und folglich

$$R_1 \cdot \ldots \cdot R_m \cdot [A_1, B_1] \cdot \ldots \cdot [A_g, B_g] = 1 \iff b + \sum_{i=1}^{m} u_i \equiv 0 \mod k.$$

(4) Die Zusammenfassung der beiden Aussagen ergibt: Den Hochhebungen von Γ in G_k entsprechen bijektiv die Folgen $(u_i, v_j, w_j)_{i \in I, j \in J}$ von Zahlen aus $\{0, \ldots, k-1\}$, die die Bedingung $(**)$ erfüllen.

(5) Wir zeigen nun, daß aus der Existenz einer Hochhebung die Teilbarkeitsbedingungen folgen: Nehmen wir an, es gibt eine Hochhebung von Γ in G_k, das heißt es gibt eine Folge $(u_i, v_j, w_j)_{i\in I, j\in J}$ von Zahlen aus $\{0, \dots, k-1\}$, die die Bedingung $(**)$ erfüllt. Dann gilt $\mathrm{ggT}(k, \alpha_i) = 1$ für $i \in I$ und

$$L \cdot (b - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}) \equiv L \cdot (b + \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i \alpha_i}{\alpha_i}) \equiv L \cdot (b + \sum_{i=1}^{m} u_i) \equiv 0 \mod k.$$

(6) Wir zeigen nun, daß aus den Teilbarkeitsbedingungen die Existenz einer Hochhebung folgt: Wir nehmen an, daß

$$\mathrm{ggT}(k, \alpha_i) = 1 \text{ für } i \in I \quad \text{und} \quad L \cdot (b - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}) \equiv 0 \mod k$$

gilt. Dann gibt es Zahlen $u_1, \dots, u_m \in \{0, \dots, k-1\}$ mit $u_i \alpha_i \equiv -1 \mod k$ für $i \in I$. Außerdem folgt aus der ersten Bedingung, daß L und k teilerfremd sind. Aus der zweiten Bedingung folgt wegen $\mathrm{ggT}(L, k) = 1$ und $u_i \alpha_i \equiv -1 \mod k$, daß die Zahl

$$b - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} \equiv b + \sum_{i=1}^{m} u_i \mod k$$

durch k teilbar ist. Damit existieren Zahlen $u_1, \dots, u_m$ aus $\{0, \dots, k-1\}$, die die Bedingung $(**)$ erfüllen, also existiert mindestens eine Hochhebung. Was die Anzahl der Hochhebungen anbetrifft, so sind die Zahlen $u_1, \dots, u_m \in \{0, \dots, k-1\}$ durch die Bedingung $u_i \alpha_i \equiv -1 \mod k$ mit teilerfremden k und α_i bereits eindeutig festgelegt. An die Zahlen $v_1, \dots, v_g, w_1, \dots, w_g \in \{0, \dots, k-1\}$ werden dagegen keine Forderungen gestellt, es gibt also k^{2g} Möglichkeiten, sie zu wählen. ∎

Die Formulierung des Satzes 7 für die Stufe $k = 2$ ist besonders einprägsam:

Satz 8. *Eine diskrete, endlich erzeugte, cokompakte Untergruppe* Γ *von* $\mathrm{PSU}(1,1)$ *hat genau dann eine Hochhebung in* $\mathrm{SU}(1,1)$*, wenn sie keine Elemente der Ordnung zwei enthält.*

Eine Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$ *von der Signatur* $(g; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ *hat also genau dann eine Hochhebung in* $\mathrm{SU}(1,1)$*, wenn die Zahlen* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *ungerade sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es genau* 2^{2g} *Hochhebungen, insbesondere ist die Hochhebung im Falle* $g = 0$ *eindeutig.*

Beweis. Es sei L das kleinste gemeinsame Vielfache von $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Es genügt zu zeigen, daß die Zahl

$$L \cdot \big(2(g-1) + m - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}\big) = 2(g-1) \cdot L + L \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)$$

für ungerade Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ immer gerade ist. In diesem Fall ist aber jeder der Summanden

$$L \cdot \big(1 - \frac{1}{\alpha_i}\big) = (\alpha_i - 1) \cdot \frac{L}{\alpha_i}$$

und $2(g-1) \cdot L$ gerade, also auch ihre Summe. ∎

Das Problem der Existenz der Hochhebungen in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(1,1)$ ist klassisch. Der Satz 8 wurde zum ersten Mal 1938 von H. Peterssen in [Pe] als ein Satz über Gruppenerweiterungen formuliert und bewiesen. C. L. Siegel stellte diese Frage 1957 in [Si] als ein offenes Problem. Schon 1958 wurde das Problem von L. Bers in [Be] mit Methoden der Teichmüller-Theorie wieder gelöst, diesmal für Hochhebungen von Flächengruppen, das heißt von Gruppen mit Signatur $(g; -)$. Bei I. Kra in [Kr] kann man nachlesen, wer, wann und wie diesen Satz noch bewiesen hat. Aus unserer Sicht besonders interessant ist der 1975 von S. J. Patterson in [Pa] mit Methoden der Gruppenkohomologie ausgeführte Beweis dieses Ergebnisses für endlich erzeugte Fuchssche Gruppen 1. Art, der sich auf die höheren Stufen verallgemeinern läßt.

§5. Hochhebung von Dreiecksgruppen in SU(1, 1)

In diesem Abschnitt wird die Hochhebung der Dreiecksgruppen in $\mathrm{SU}(1,1)$ explizit beschrieben. Wir betrachten die Dreiecksgruppe $\Gamma(p, q, r)$, wobei die natürlichen Zahlen p, q und r ungerade sind.

Definition. Es sei
$$r_u := r_{u,2\pi/p}, \quad r_v := r_{v,2\pi/q}, \quad r_w := r_{w,2\pi/r}.$$

Proposition 9. *Die Elemente r_u, r_v und r_w von $\mathrm{SU}(1,1)$ genügen den Relationen $r_u^p = r_v^q = r_w^r = -1$ und $r_u r_v r_w = -1$. Die eindeutig bestimmte Hochhebung $\Gamma(p,q,r)^2$ der Dreiecksgruppe $\Gamma(p,q,r)$ in $\mathrm{SU}(1,1)$ wird von den Elementen $-r_u$ und $-r_v$ erzeugt und besitzt eine Präsentation*
$$\Gamma(p,q,r)^2 \cong \langle a,b,c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1\rangle,$$
wobei der Isomorphismus durch die Zuordnung $a \mapsto -r_u$, $b \mapsto -r_v$ und $c \mapsto -r_w$ gestiftet wird.

Beweis. Wegen $1 \in \Gamma(p,q,r)^2$ gilt $-1 \notin \Gamma(p,q,r)^2$. Für jede natürliche Zahl n gilt $r_{2\pi/n}^n = (e^{i\frac{\pi}{n}},0)^n = (-1,0) = -1$ und damit $r_{x,2\pi/n}^n = (t_x \cdot r_{2\pi/n} \cdot t_x^{-1})^n = -1$ für jedes $x \in \mathbb{D}$. Damit gilt $r_u^p = r_v^q = r_w^r = -1$ und die Elemente r_u, r_v, r_w können folglich nicht in $\Gamma(p,q,r)^2$ liegen. Es gilt also $-r_u, -r_v, -r_w \in \Gamma(p,q,r)^2$. Da die Zahlen p, q und r ungerade sind, gilt $(-r_u)^p = (-r_v)^q = (-r_w)^r = 1$. Hier sieht man direkt, warum p, q und r ungerade sein müssen. Die restlichen Behauptungen folgen nun aus dem Satz 7. ∎

Bemerkung. Mit Hilfe der expliziten Darstellung von r_u, r_v und r_w in der nächsten Proposition und unter Benutzung der verschiedenen trigonometrischen Formeln für das Dreieck $\Delta(p,q,r)$ kann man auch direkt nachrechnen, daß $r_u r_v r_w = -1$ gilt.

Für spätere Rechnungen beschreiben wir noch die Elemente r_u, r_v und r_w explizit.

Proposition 10. *Unter den Identifikationen $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathbb{S}$ und $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ gilt*
$$\begin{aligned}
r_u &= (e^{i\pi/p},0) = (\cos\frac{\pi}{p}, \sin\frac{\pi}{p}, 0, 0),\\
r_v &= (\cos\frac{\pi}{q} + i\cosh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}, -i\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q})\\
&= (\cos\frac{\pi}{q}, \cosh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}, 0, -\sinh\ell_v \sin\frac{\pi}{q}),\\
r_w &= (\cos\frac{\pi}{r} + i\cosh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}, -ie^{i\frac{\pi}{p}}\sinh\ell_w \sin\frac{\pi}{r})\\
&= (\cos\frac{\pi}{r}, \cosh\ell_w \sin\frac{\pi}{r}, \sinh\ell_w \sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}, -\sinh\ell_w \cos\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}).
\end{aligned}$$

Es gilt also
$$r_u = (e^{i\pi/p},0), \quad r_v = (\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB)$$
und für $k,l \in \mathbb{Z}$
$$r_u^k = (e^{i\pi k/p},0), \quad r_v^l = (\cos\frac{\pi l}{q} + iC\sin\frac{\pi l}{q}, -iB(l)),$$
wobei $C = \cosh\ell_v$, $S = \sinh\ell_v$, $B(l) := S\cdot\sin\frac{\pi l}{q}$ und $B := B(1) = S\cdot\sin\frac{\pi}{q}$ gilt. Es gilt dabei $B(l) = B(q-l)$ und damit $B = B(q-1)$. Es gilt also
$$r_v^{q-1} = (-\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB).$$

Beweis. Die Formeln für $r_u = r_{u,2\pi/p}$, $r_v = r_{v,2\pi/q}$, $r_w = r_{w,2\pi/r}$, $r_u^k = r_{u,2\pi k/p}$ und $r_v^l = r_{v,2\pi l/q}$ folgen aus der Proposition I.1 wegen $u = 0$, $v = |v|$, $w = |w|\cdot e^{i\frac{\pi}{p}}$ und $\ell_v = \rho(0,v)$, $\ell_w = \rho(0,w)$. ∎

Kapitel III

Konstruktion der Fundamentalbereiche

Художественное конструирование — особый вид художественного творчества в области техники, задача которого сделать новые станки, приборы, автомобили, телевизоры и другие технические изделия не только технически совершенными, но и удобными для человека, красивыми по своим формам, отделке, цвету.

Энциклопедический словарь юного техника

§6. Elemente der Konstruktion

Sei Γ eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$ und $\tilde{\Gamma}$ eine (diskrete) Untergruppe von $\mathrm{SU}(1,1)$ mit $\pi(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$. Die Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ ist entweder gleich $\pi^{-1}(\Gamma)$, oder sie ist eine Hochhebung Γ^2 von Γ in $\mathrm{SU}(1,1)$. Es sei $u \in \mathbb{D}$ ein (ausgezeichneter) Fixpunkt von Γ, das heißt es sei $\Gamma_u \neq \{\mathrm{id}\}$. Es sei p die Ordnung des ausgezeichneten Fixpunktes u von Γ, das heißt $p := |\Gamma_u|$ (aus $\Gamma_u \neq \{\mathrm{id}\}$ folgt $p > 1$). Es sei $n := |\tilde{\Gamma}_u|$, also $n = 2p$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ und $n = p$ im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma^2$. Es sei $I_n := [-\tan\frac{\pi}{n}, \tan\frac{\pi}{n}]$. Es sei ferner $I_n^+ := [0, \tan\frac{\pi}{n}]$ und $I_n^- := [-\tan\frac{\pi}{n}, 0]$.

Es sei $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ die Standardbilinearform der Signatur $(+,+,-,-)$ auf $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$.

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^4 : (x,x) = 1\} = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$$

ist die Pseudosphäre vom Radius 1. Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto (a,b)$$

identifiziert

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

mit $\mathbb{S}$. Dadurch wird auf $\mathbb{S}$ eine Multiplikation induziert. Durch lineares Fortsetzen der Multiplikation von $\mathbb{S}$ erhalten wir eine Multiplikation auf $\mathbb{C}^2$: für $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 + b_1\bar{b}_2, a_1b_2 + b_1\bar{a}_2).$$

Es sei $\mathbb{A} = \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ mit $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ und der oben beschriebenen Multiplikation. Man hat die *Konjugationsabbildung* $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ mit $\overline{(a,b)} := (\bar{a}, -b)$. Für $g \in \mathbb{S}$ gilt $\bar{g} = g^{-1}$. Für $x, y \in \mathbb{A}$ gilt $(x,y) = \mathrm{Re}(x\bar{y})$. Für jedes $a \in \mathbb{A}$ mit $(a,a) \neq 0$ sind die Abbildungen $x \mapsto a \cdot x$ und $x \mapsto x \cdot a$ Isometrien von $\mathbb{A}$. Die Bilinearform $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ induziert eine Lorentz-Metrik auf $\mathbb{S}$. Diese Lorentz-Metrik stimmt bis auf den Faktor $-\frac{1}{8}$ mit der Killingform auf $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathbb{S}$ überein. Es sei $\mathbb{A}_+ = \{x \in \mathbb{A} : (x,x) > 0\}$ und $\mathbb{A}_- := \mathbb{A}\backslash\mathbb{A}_+ = \{x \in \mathbb{A} : (x,x) \leqslant 0\}$. Ferner sei $\Psi : \mathbb{A}_+ \to \mathbb{S}$ mit $\Psi(x) := x/\sqrt{(x,x)}$ die radiale Projektion. Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{A}$ sei $M_+ := M \cap \mathbb{A}_+$.

Für $g \in \mathbb{A}$ sei $E_g := \{y \in \mathbb{A} : (y,g) = 1\}$, $H_g := \{y \in \mathbb{A} : (y,g) \leqslant 1\}$ und $I_g := \{y \in \mathbb{A} : (y,g) \geqslant 1\}$. Für $g \in \mathbb{S}$ ist E_g die Hyperebene durch g tangential an $\mathbb{S}$, H_g der von E_g begrenzte Halbraum, der 0 enthält, und I_g der von E_g begrenzte Halbraum, der 0 nicht enthält.

Für $x \in \Gamma u$ sei $L_x := \{g \in \tilde{\Gamma} : gu = x\}$,

$$Q_x := \bigcap_{g \in L_x} H_g \quad \text{und} \quad R_x := \mathbb{A}\backslash Q_x^\circ = \bigcup_{g \in L_x} I_g.$$

Proposition 11. *Für $a, g \in \mathbb{A}$ gilt $a \cdot E_g = E_{ag}$, $a \cdot H_g = H_{ag}$ und $a \cdot I_g = I_{ag}$. Für $x \in \Gamma u$ und $a \in \tilde{\Gamma}$ mit $au = x$ gilt $L_x = a \cdot L_u$ und $Q_x = a \cdot Q_u$.*

Beweis. Für $a, g \in \mathbb{A}$ gilt

$$a \cdot E_g = a \cdot \{x : (x, g) = 1\} = \{y \in \mathbb{A} : (a^{-1}y, g) = 1\} = \{y \in \mathbb{A} : (y, ag) = 1\} = E_{ag},$$

genauso für $a \cdot H_g$ und $a \cdot I_g$. Für $x \in \Gamma u$ und $a \in \tilde{\Gamma}$ mit $au = x$ gilt $L_x = a \cdot \tilde{\Gamma}_u = a \cdot L_u$ und

$$Q_x = \bigcap_{g \in L_x} H_g = \bigcap_{g \in a \cdot L_u} H_g = \bigcap_{g \in L_u} H_{a \cdot g} = \bigcap_{g \in L_u} a \cdot H_g = a \cdot \bigcap_{g \in L_u} H_g = a \cdot Q_u. \blacksquare$$

Die Kombinatorik der Fundamentalbereiche, die wir konstruieren werden, hängt von der Wahl des Fixpunktes u ab. Allerdings spielt dabei nur die Ordnung des Fixpunktes eine Rolle, da die Fundamentalbereiche zu verschiedenen Fixpunkten gleicher Ordnung durch Konjugation mit einem Element von $\mathbb{S}$ ineinander übergehen. Wir können ferner ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $u = 0$ gilt.

§7. Die Mengen Q_x als vierdimensionale Prismen

Für das Verständnis der Konstruktion ist es nützlich, die Mengen Q_x, $x \in \Gamma u$, geometrisch zu veranschaulichen und ihre Lage relativ zu $\mathbb{A}_+$ zu studieren. Es wird sich herausstellen, daß die Q_x vierdimensionale Prismen über regelmäßigen n-Ecken sind, deren Zentren außerhalb von $\mathbb{A}_+$ (und sogar außerhalb von $\bar{\mathbb{A}}_+$) liegen und die desto kleiner sind, je größer $|x|$ ist. Um diese Aussage zu präzisieren, untersuchen wir Durchschnitte von $\mathbb{A}_+$ bzw. Q_x mit zweidimensionalen affinen Unterräumen:

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{A}$. Es sei $M^{\mathbb{C}}(w) := \{z \in \mathbb{C} : (w, z) \in M\}$ für $w \in \mathbb{C}$ und

$$M(\omega) := M^{\mathbb{C}}(1 + i\omega) = \{z \in \mathbb{C} : (1 + i\omega, z) \in M\}$$

für $\omega \in \mathbb{R}$.

Proposition 12. *$\mathbb{A}_+^{\mathbb{C}}(w)$ mit $w \in \mathbb{C}$ ist das Innere des Kreises vom Radius $|w|$ mit Zentrum im Ursprung, insbesondere ist $\mathbb{A}_+(\omega)$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ das Innere des Kreises vom Radius $\sqrt{1 + \omega^2}$ mit Zentrum im Ursprung.* $\blacksquare$

Die Definition

$$Q_x = \bigcap_{g \in L_x} H_g$$

liefert eine Beschreibung von $Q_x^{\mathbb{C}}(w) \subset \mathbb{C}$ als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen. Um $Q_x^{\mathbb{C}}(w)$ als ein regelmäßiges Polygon nachzuweisen, brauchen wir also eine derartige Beschreibung von regelmäßigen Polygonen in $\mathbb{C}$.

Lemma 13. *Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems*

$$\operatorname{Re}\Big((z_0 - z)\exp\big(i(\tfrac{2\pi k}{n} - \theta)\big)\Big) \leqslant r \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1$$

ist dann ein regelmäßiges n-Eck mit Zentrum z_0, Inkreisradius r und Umkreisradius $R = \frac{r}{\cos\frac{\pi}{n}}$. Die Seite des Polygons, auf der die erste Ungleichung zur Gleichung wird, hat dabei die Versetzung θ, das heißt, der Winkel (im positiven Umlaufsinn) zwischen der Richtung, die der positiven reellen Achse entgegengesetzt ist, und dem Strahl aus dem Zentrum des Polygons durch den Mittelpunkt der Seite ist θ.

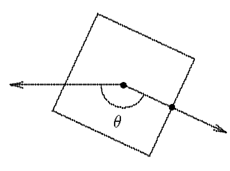


Abbildung 3. Versetzung θ des Schnittbildes von Q_x.

Beweis. Die Aussage des Lemmas ist klar im Falle $r = 1$, $\theta = 0$ und $z_0 = 0$. Die anderen Fälle erhält man aus diesem Fall durch Streckung, Drehung und Parallelverschiebung. ∎

Satz 14.

(1) *Es sei $w \in \mathbb{C}$, $u = 0$, $x \in \Gamma u \backslash \{u\}$ und $g = (a,b) \in \tilde{\Gamma}$ mit $g(u) = x$. $Q_x^{\mathbb{C}}(w)$ ist dann ein regelmäßiges n-Eck mit Zentrum $\frac{\bar{w}}{\bar{x}}$, Inkreisradius $\frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x|}$ und Umkreisradius $\frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x|\cos\frac{\pi}{n}}$. Der Abstand des Zentrums zum Ursprung ist $\frac{|w|}{|x|}$. Die Seite $E_g \cap Q_x^{\mathbb{C}}(w)$ des Polygons hat die Versetzung $\theta = \arg(b)$.*

(2) *Es sei $w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$Q_u^{\mathbb{C}}(w) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \textit{falls } \operatorname{Re}(\bar{w}\exp(\frac{2\pi i k}{n})) \leqslant 1 \quad \textit{für } k = 0,\dots,n-1 \\ \varnothing, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(3) *Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$Q_u(\omega) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \textit{falls } \omega \in I_n \\ \varnothing, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es sei $x \in \Gamma u$ und $g = (a,b) \in \tilde{\Gamma}$ mit $g(0) = x$. Im Falle $x = u = 0$ sei $g := (1,0)$. Aus der Definition von Q_x folgt

$$Q_x = \bigcap_{k=0}^{n-1} H_{gr^k_{0,2\varphi}} = \{y \in \mathbb{A} : \langle gr^k_{0,2\varphi}, y\rangle \leqslant 1 \text{ für } k = 0,\dots,n-1\}$$

mit $\varphi := \frac{2\pi}{n}$. Wegen $r^k_{0,2\varphi} = (e^{k\varphi}, 0)$ gilt

$$gr^k_{0,2\varphi} = (ae^{ik\varphi}, be^{-ik\varphi}).$$

$Q_x^{\mathbb{C}}(w)$ wird also beschrieben durch das Ungleichungssystem

$$(*) \qquad \operatorname{Re}(\bar{w}ae^{ik\varphi} - \bar{z}be^{-ik\varphi}) \leqslant 1 \quad \text{für } k = 0,\dots,n-1.$$

(1) Es sei $x \neq 0$. Aus $x = g(0) = b/\bar{a}$ folgt $a = \bar{b}/\bar{x}$. Aus

$$1 = |a|^2 - |b|^2 = \frac{|b|^2}{|x|^2} - |b|^2 = |b|^2 \cdot \frac{1-|x|^2}{|x|^2}$$

folgt nun $|b| = |x|/\sqrt{1-|x|^2}$. Es sei

$$r := \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x|} = \frac{1}{|b|} \quad \text{und} \quad \theta := \arg(b).$$

Es gilt also

$$b = \frac{1}{r}e^{i\theta} \quad \text{und} \quad a = \frac{1}{r}\frac{1}{\bar{x}}e^{-i\theta}.$$

Es sei $z_0 := \frac{\bar{w}}{\bar{x}}$. Für $k = 0,\dots,n-1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\bar{w}ae^{ik\varphi} - \bar{z}be^{-ik\varphi}) &= \frac{1}{r}\cdot\operatorname{Re}(\frac{\bar{w}}{\bar{x}}e^{i(k\varphi-\theta)} - \bar{z}e^{-i(k\varphi-\theta)}) \\ &= \frac{1}{r}\cdot\operatorname{Re}(z_0e^{i(k\varphi-\theta)} - \overline{ze^{i(k\varphi-\theta)}})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Re}(z_0e^{i(k\varphi-\theta)} - \overline{ze^{i(k\varphi-\theta)}}) \\ &= (z_0e^{i(k\varphi-\theta)} - \overline{ze^{i(k\varphi-\theta)}}) + (\overline{z_0e^{i(k\varphi-\theta)}} - ze^{i(k\varphi-\theta)}) \\ &= (z_0 - z)e^{i(k\varphi-\theta)} + \overline{(z_0-z)e^{i(k\varphi-\theta)}} \\ &= 2\operatorname{Re}((z_0-z)e^{i(k\varphi-\theta)}).\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathrm{Re}(\bar{w}ae^{ik\varphi} - \bar{z}be^{-ik\varphi}) = \frac{1}{r} \cdot \mathrm{Re}((z_0 - z)e^{i(k\varphi-\theta)})$$

und

$$\mathrm{Re}(\bar{w}ae^{ik\varphi} - \bar{z}be^{-ik\varphi}) \leqslant 1 \iff \mathrm{Re}((z_0 - z)e^{i(k\varphi-\theta)}) \leqslant r.$$

Das Ungleichungssystem $(*)$ ist also äquivalent zu

$$\mathrm{Re}((z_0 - z)\exp(i(\tfrac{2\pi k}{n} - \theta))) \leqslant r \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1$$

mit

$$r = \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x|}, \quad \theta = \arg(b) \quad \text{und} \quad z_0 = \frac{\bar{w}}{\bar{x}}.$$

Die Lösungsmenge des Systems $(*)$ ist damit nach dem Lemma 13 ein regelmäßiges n-Eck mit Zentrum z_0, Inkreisradius r und Umkreisradius $r/\cos\frac{\pi}{n}$. Die Seite des Polygons, auf der die erste Ungleichung zur Gleichung wird, also die Seite $E_g \cap Q_x^{\mathbb{C}}(w)$, hat die Versetzung $\arg(b)$.

(2) Nun sei $x = u$. Es gilt $g = (1, 0)$, das Ungleichungssystem $(*)$ ist dann äquivalent zu

$$\mathrm{Re}(\bar{w}\exp(\tfrac{2\pi ik}{n})) \leqslant 1 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Damit gilt

$$Q_u^{\mathbb{C}}(w) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{falls } \mathrm{Re}(\bar{w}\exp(\frac{2\pi ik}{n})) \leqslant 1 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1 \\ \varnothing, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3) Es gilt also

$$Q_u(\omega) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{falls } \mathrm{Re}((1-i\omega)\exp(\frac{2\pi ik}{n})) \leqslant 1 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1 \\ \varnothing, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei gilt $\mathrm{Re}((1-i\omega)\exp(\frac{2\pi ik}{n})) = \cos\frac{2\pi k}{n} + \omega \sin\frac{2\pi k}{n}$ und

$$\cos\tfrac{2\pi k}{n} + \omega\sin\tfrac{2\pi k}{n} \leqslant 1 \iff \begin{cases} \omega \leqslant \dfrac{1-\cos\frac{2\pi k}{n}}{\sin\frac{2\pi k}{n}} = \tan\frac{\pi k}{n}, \text{ falls } \sin\frac{2\pi k}{n} > 0 \\ \cos\dfrac{2\pi k}{n} \leqslant 1, \text{ falls } \sin\frac{2\pi k}{n} = 0 \\ \omega \geqslant \dfrac{1-\cos\frac{2\pi k}{n}}{\sin\frac{2\pi k}{n}} = \tan\frac{\pi k}{n}, \text{ falls } \sin\frac{2\pi k}{n} < 0. \end{cases}$$

Wegen der Monotonie der tan-Funktion auf $(0, \frac{\pi}{2})$ und auf $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ folgt damit

$$\underset{\text{für } k=0,\ldots,n-1}{\cos\tfrac{2\pi k}{n} + \omega\sin\tfrac{2\pi k}{n} \leqslant 1} \iff \tan(\pi - \tfrac{\pi}{n}) \leqslant \omega \leqslant \tan\tfrac{\pi}{n} \iff |\omega| \leqslant \tan\tfrac{\pi}{n}. \blacksquare$$

Die folgenden Ungleichungen ergeben sich aus der Approximation der Prismen Q_x durch die ihnen um- bzw. einbeschriebenen Zylinder. Mit Hilfe der letzten dieser Ungleichungen wird später gezeigt, daß die Familie $\{Q_x\}_{x\in\Gamma u}$ in $\mathbb{A}_+$ lokal endlich ist. Diese technische Aussage spielt wiederum eine wichtige Rolle im Beweis der Tatsache, daß die Teilmengen $\mathcal{F}_g$ von $\mathbb{S}$, die wir konstruieren werden, Fundamentalbereiche für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathbb{S}$ sind. Außerdem werden wir diese Umkreisabschätzungen benutzen, um $Q_x \cap F_e = \varnothing$ für gewisse $x \in \Gamma u$ zu beweisen und damit eine Darstellung des Fundamentalbereichs F_e als einen endlichen Durchschnitt endlicher Vereinigungen von Halbräumen herzuleiten.

Proposition 15. *(Umkreisabschätzungen) Für $x \in \Gamma u \setminus \{u\}$ und $(w,z) \in Q_x$ gilt*

$$-\frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos\frac{\pi}{n}} \leqslant |w| - |x|\cdot|z| \leqslant \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

und

$$|w| - |z| < \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Beweis. Nach der Definition gilt $(w,z) \in Q_x$ genau dann, wenn $z \in Q_x^{\mathbb{C}}(w)$ gilt. Nach Satz 14 ist $Q_x^{\mathbb{C}}(w)$ ein regelmäßiges Polygon mit Umkreisradius $R = \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{|x|\cos\frac{\pi}{n}}$ und Abstand $d = \frac{|w|}{|x|}$ des Zentrums zum Ursprung. Damit gilt $d - R \leqslant |z| \leqslant d + R$ und folglich $-R \leqslant d - |z| \leqslant R$, was zu der ersten Ungleichungskette führt. Aus $|x| < 1$ folgt nun

$$|w| - |z| < |w| - |x|\cdot|z| \leqslant \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\cos\frac{\pi}{n}}. \blacksquare$$

Mit Hilfe dieser Proposition können wir eine untere Schranke für Beträge der Punkte in $Q_x(\omega)$ herleiten.

Proposition 16. *Für $x \in \Gamma u \setminus \{u\}$ gilt $|z| \geqslant \mathcal{M}(|x|,\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}$ für alle $z \in Q_x(\omega)$, wobei*

$$\mathcal{M}(t,\omega) := \frac{1}{t}\left(1 - \frac{\sqrt{1-t^2}}{\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\omega^2}}\right). \blacksquare$$

§8. Die Konstruktion

Zur Erinnerung. Γ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{PSU}(1,1)$, $\tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe von $\mathrm{SU}(1,1)$ mit $\pi(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$. Für $g \in \mathbb{A}$ gilt

$$H_g = \{x \in \mathbb{A} : (x,g) \leqslant 1\} \quad \text{und} \quad E_g = \{x \in \mathbb{A} : (x,g) = 1\}.$$

Für $x \in \Gamma u$ gilt $L_x = \{g \in \tilde{\Gamma} : gu = x\}$ und $Q_x = \cap_{g \in L_x} H_g$.

Zur Notation. Für einen topologischen Raum X und eine Teilmenge A von X werden das Innere und die abgeschlossene Hülle von A in X mit $\mathrm{Int}_X(A)$ und $\mathrm{Cl}_X(A)$ bezeichnet.

Definition. Es sei $P := \cup_{x \in \Gamma u} Q_x$ und $\partial_+ P := (\partial P)_+ = \partial P \cap \mathbb{A}_+$. Für $g \in \tilde{\Gamma}$ sei $F_g := \mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_g \cap \partial_+ P))$. Es sei ferner $\mathcal{F}_g := \Psi(F_g)$.

Satz 17. *$\tilde{\Gamma}$ operiert auf dem Rand ∂P von P. Die Menge $\partial_+ P := \partial P \cap \mathbb{A}_+$ ist invariant unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$.*

$$F_g = \mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_g \cap \partial_+ P))$$

ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\partial_+ P$. Die radiale Projektion $\Psi : \mathbb{A}_+ \to \mathbb{S}$ induziert einen $\tilde{\Gamma}$-äquivarianten Homöomorphismus $\Psi|_{\partial_+ P} : \partial_+ P \to \mathbb{S}$. Das pseudosphärische Polytop $\mathcal{F}_g = \Psi(F_g)$ ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathbb{S}$. Die Überdeckung $\{\mathcal{F}_g\}_{g \in \tilde{\Gamma}}$ von $\mathbb{S}$ ist lokal endlich.

Für je zwei verschiedene $g, h \in \tilde{\Gamma}$ liegt $\mathcal{F}_g \cap \mathcal{F}_h$ in der totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit $(g-h)^{\perp} \cap \mathbb{S}$ von $\mathbb{S}$.

Ist Γ cokompakt, so ist F_g ein kompaktes Polyeder, das heißt eine endliche Vereinigung von endlichen kompakten Durchschnitten affiner Halbräume.

Thomas Fischer hat diesen Satz für den Fall $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ in seiner Dissertation [Fi] formuliert und bewiesen. Einen anderen Beweis des Satzes für $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$, an den unser Beweis angelehnt ist, findet man in [Ba]. Wir geben hier einen Beweis, der beide Fälle $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma^2$ einschließt.

Vor dem eigentlichen Beweis benötigen wir noch einige Hilfsaussagen. Aus der Definition von Q_x folgt sofort

Lemma 18. *Für $x \in \Gamma u$, $a \in \mathbb{A}_+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

(1) $a \in Q_x, 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda a \in Q_x^\circ$,
(2) $a \notin Q_x^\circ, \lambda > 1 \Rightarrow \lambda a \notin Q_x$. ∎

Lemma 19. *Zu jedem $x \in \Gamma u$ und $a \in \mathbb{S}$ existiert ein $\lambda_0 > 0$ derart, daß $\lambda a \in Q_x$ für alle $\lambda \in (0, \lambda_0]$ und $\lambda a \notin Q_x$ für alle $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$ gilt.*

Beweis. Es gilt $Q_u = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : w \in \Pi_n\}$, wobei Π_n das regelmäßige n-Eck

$$\Pi_n := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\bar{w} \exp(\tfrac{2\pi i k}{n})) \leqslant 1 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1\}$$

in $\mathbb{C}$ ist. Offenbar gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein $\lambda_0 > 0$ derart, daß $\lambda w \in \Pi_n$ für alle $\lambda \in (0, \lambda_0]$ und $\lambda w \notin \Pi_n$ für alle $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$ gilt, woraus die Behauptung des Lemmas im Falle $x = u = 0$ folgt. Für $x \in \Gamma u\backslash\{u\}$ folgt die Behauptung daraus, daß $Q_x = g \cdot Q_u$ mit $g \in \tilde{\Gamma}$ gilt. ∎

Lemma 20. *Die Familie $\{Q_x\}_{x \in \Gamma u}$ ist lokal endlich in $\mathbb{A}_+$.*

Beweis. Es sei $(w_0, z_0) \in \mathbb{A}_+$. Man wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $|w_0| - |z_0| > \varepsilon$. Dann ist $U := \{(w, z) \in \mathbb{A} : |w| - |z| > \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von (w_0, z_0). Für $x \in \Gamma u\backslash\{u\}$ mit $|x|$ groß genug gilt nach Proposition 15

$$|w| - |z| \leqslant \frac{\sqrt{1 - |x|^2}}{\cos \frac{\pi}{n}} < \varepsilon$$

für alle $(w, z) \in Q_x$ und damit $Q_x \cap U = \varnothing$. Zu jedem $(w_0, z_0) \in \mathbb{A}_+$ gibt es also eine Umgebung U in $\mathbb{A}_+$ und eine Zahl R derart, daß nur die Prismen Q_x mit $|x| \leqslant R$ die Umgebung U schneiden können. Die Menge $\{x \in \Gamma u : |x| \leqslant R\}$ ist aber endlich, da Γ diskret ist. ∎

Lemma 21. *P_+ ist abgeschlossen in $\mathbb{A}_+$, das heißt $\partial_+ P \subset P_+$.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\mathbb{A}_+\backslash P$ offen in $\mathbb{A}_+$ ist. O.B.d.A. gilt $\mathbb{A}_+\backslash P \neq \varnothing$. Es sei $a \in \mathbb{A}_+\backslash P$. Nach Lemma 20 existiert eine Umgebung U von a in $\mathbb{A}_+$ und eine endliche Teilmenge E von Γu mit $Q_x \cap U = \varnothing$ für alle $x \in \Gamma u\backslash E$. Dann ist $U\backslash P = U\backslash \bigcup_{x \in E} Q_x$ eine offene Umgebung von a in $\mathbb{A}_+\backslash P$. ∎

Lemma 22. *Es gilt*

$$\partial_+ P \subset \mathbb{A}_+ \cap \bigcup_{x \in \Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x \in \Gamma u} R_x.$$

Beweis. Nach Lemma 21 gilt $\partial_+ P \subset P_+$. Es sei $p \in \partial P$. Aus $p \in Q_x^\circ$ für ein $x \in \Gamma u$ würde $U \subset Q_x^\circ \subset P$ für eine Umgebung U von p und damit $p \notin \partial P$ folgen. Damit gilt

$$\partial_+ P \subset P_+ \backslash \bigcup_{x \in \Gamma u} Q_x^\circ = \mathbb{A}_+ \cap \bigcup_{x \in \Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x \in \Gamma u} R_x. \ \blacksquare$$

Proposition 23. *F_g ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\partial_+ P$. Die Überdeckung $\{F_g\}_{g \in \tilde{\Gamma}}$ von $\partial_+ P$ ist lokal endlich.*

Beweis.

(1) $\operatorname{Cl}(\bigcup_{g \in \tilde{\Gamma}} \operatorname{Int}(F_g)) = \partial_+ P$: Es sei $a \in \partial_+ P$. Nach Lemma 20 existieren $g_1, \ldots, g_n \in \tilde{\Gamma}$ und eine Umgebung U von a derart, daß gilt

$$\partial_+ P \cap U = \bigcup_{i=1}^{n} E_{g_i} \cap \partial_+ P \cap U.$$

Es sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Die Hyperebenen E_g und E_h schneiden sich für $g \neq h$ transversal, damit ist $E_{g_i} \cap \partial_+ P \cap U$ gleich einem Durchschnitt von U mit einer endlichen Vereinigung endlicher Durchschnitte von Halbräumen. Deswegen gilt $E_{g_i} \cap \partial_+ P \cap U = \operatorname{Cl}_{\partial_+ P \cap U}(\operatorname{Int}_{\partial_+ P \cap U}(E_{g_i} \cap \partial_+ P \cap U))$ und $a \in \operatorname{Cl}(\operatorname{Int}(F_{g_i}))$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) $\operatorname{Int}(F_g) \cap F_h \neq \varnothing \Rightarrow g = h$: Es sei $g \neq h$, dann schneiden sich E_g und E_h transversal, also hat der Durchschnitt $F_g \cap F_h$ keine inneren Punkte in E_g, also auch keine inneren Punkte in F_g.

(3) Die lokale Endlichkeit der Überdeckung $\{F_g\}_{g \in \tilde{\Gamma}}$ folgt aus Lemma 20. ∎

PROPOSITION 24. *$\Psi|_{\partial_+ P} : \partial_+ P \to \mathbb{S}$ ist ein $\tilde{\Gamma}$-äquivarianter Homöomorphismus.*

BEWEIS.

(1) $\Psi|_{\partial_+ P}$ ist injektiv: Ist $\Psi|_{\partial_+ P}$ nicht injektiv, so existieren $g \in \mathbb{A}$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $g, \lambda g \in \partial_+ P$. Nach Lemma 22 gilt $g \in \partial Q_x$ für ein $x \in \Gamma u$. Nach Lemma 18 folgt $\lambda g \in Q_x^\circ$ und damit $\lambda g \notin \partial_+ P$ wiederum nach Lemma 22. Widerspruch.

(2) $\Psi|_{\partial_+ P}$ ist surjektiv: Es ist zu zeigen, daß es zu jedem $a \in \mathbb{S}$ ein $\lambda > 0$ mit $\lambda a \in \partial P$ gibt. Es sei $a \in \mathbb{S}$ und $\Lambda := \{\lambda > 0 : \lambda a \in P\}$.

- $\Lambda \neq \varnothing$: Es genügt zu zeigen, daß es ein $\lambda > 0$ mit $\lambda a \in Q_u$ gibt. Es sei $a = (w_0, z_0)$. Nach Satz 14 gilt
$$Q_u = \{(w,z) \in \mathbb{A} : \mathrm{Re}(w), \mathrm{Re}(w\xi), \ldots, \mathrm{Re}(w\xi^{n-1}) \leqslant 1\}$$
mit $\xi := \exp(-2\pi/n)$. Für $\lambda := \frac{1}{|w_0|} > 0$ gilt $\lambda a = (w,z)$ mit $|w| = 1$ und damit $\mathrm{Re}(w\xi^k) \leqslant |w\xi^k| = |w| = 1$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
- Λ ist von oben beschränkt: Nach Lemma 20 existiert eine endliche Teilmenge E von Γu mit $a \notin Q_x$ für alle $x \notin E$. Nach Lemma 19 existiert $\lambda_0 > 1$ mit $\lambda a \notin Q_x$ für alle $x \in E$ und $\lambda \geqslant \lambda_0$. Nach Lemma 18 gilt $\lambda a \notin Q_x$ auch für alle $x \notin E$ und $\lambda \geqslant \lambda_0$, also gilt $\lambda a \notin P$ für λ groß genug.
- Es gibt ein $\lambda_0 > 0$ mit $\lambda_0 a \in \partial P$: Für $\lambda_0 := \max \Lambda$ gilt $\lambda_0 a \in P$ und $\lambda a \notin P$ für alle $\lambda > \lambda_0$, also gilt $\lambda_0 a \in \partial P$.

(3) $\Psi|_{\partial_+ P}$ ist stetig, da Ψ stetig ist.

(4) $\Psi|_{\partial_+ P}$ ist offen: Es sei $g \in \partial_+ P$. Nach Lemma 20 existiert eine Umgebung U von g und eine endliche Teilmenge E von Γu mit $Q_x \cap U \neq \varnothing$ für alle $x \in E$ und $Q_x \cap U = \varnothing$ für alle $x \notin E$. Wegen $g \in \partial P$ gilt sogar $g \in \partial Q_x$ für alle $x \in E$. Es sei
$$V := \bigcap_{x \in E} \Psi(\partial Q_x \cap U) \subset \mathbb{S}.$$
Die Teilmenge $V \subset \mathbb{S}$ ist offen und enthält $\Psi(g)$.

Es bleibt zu zeigen, daß die offene Teilmenge V von $\mathbb{S}$ in $\Psi(\partial_+ P \cap U)$ enthalten ist. Es sei $a \in V$. Zu jedem $x \in E$ existiert ein $\lambda_x > 0$ mit $\lambda_x a \in \partial Q_x \cap U$. Setze $\lambda_* := \max\limits_{x \in E} \lambda_x$ und wähle $x_* \in E$ mit $\lambda_{x_*} = \lambda_*$. Dann gilt $\lambda_* a \in \partial Q_{x_*} \cap U \subset P \cap U$. Nach Lemma 18 gilt $\lambda a \notin Q_x$ für alle $x \in E$ und $\lambda > \lambda_*$. Damit gilt $\lambda_* a \in P$ und $\lambda a \notin P$ für alle $\lambda > \lambda_*$. Daraus folgt $\lambda_* a \in \partial P \cap U$ und damit $a \in \Psi(\partial P \cap U)$.

Somit ist $V \subset \Psi(\partial P \cap U)$ gezeigt, V ist also eine offene Umgebung von $\Psi(g)$ in $\Psi(\partial_+ P)$.

(5) $\Psi|_{\partial_+ P}$ ist äquivariant, das heißt es gilt $\Psi|_{\partial_+ P}(a \cdot x) = a \cdot \Psi|_{\partial_+ P}(x)$, weil dies offensichtlich für Ψ gilt. ∎

PROPOSITION 25. *Es gilt*
$$\partial_+ P = \mathbb{A}_+ \cap \bigcup_{x \in \Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x \in \Gamma u} R_x.$$

BEWEIS. Es sei $p \in \mathbb{A}_+ \cap \cup_{x \in \Gamma u} \partial Q_x \cap \cap_{x \in \Gamma u} R_x$. Es sei $x \in \Gamma u$ derart, daß $p \in \partial Q_x$ gilt. Nach Proposition 24 enthält der Strahl $\{\lambda \cdot p : \lambda > 0\}$ genau einen Punkt aus $\partial_+ P$. Für $\lambda \in (0,1)$ gilt $\lambda \cdot p \in Q_x^\circ$ und damit $\lambda \cdot p \notin \partial_+ P$. Für $\lambda \in (1, +\infty)$ gilt $\lambda \cdot p \in R_x^\circ$ und damit $\lambda \cdot p \notin \partial_+ P$. Somit bleibt der Punkt p als einziger Punkt auf dem Strahl, der in $\partial_+ P$ liegen kann. Wir haben damit die Inklusion
$$\mathbb{A}_+ \cap \bigcup_{x \in \Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x \in \Gamma u} R_x \subset \partial_+ P$$
gezeigt. Die umgekehrte Inklusion ist bereits im Lemma 22 gezeigt worden. ∎

PROPOSITION 26. *Ist Γ cokompakt, so ist F_g ein kompaktes Polyeder.*

BEWEIS.

(1) F_g ist kompakt: Es sei $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Int}(F_g)$. Es sei φ die Abbildung $\partial_+ P \xrightarrow{\Psi} \mathbb{S} \to \tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{S}$. Da $\tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{S}$ kompakt ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge $\{\varphi(a_i)\}$ gegen einen Limes $\bar{a} \in \tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{S}$ konvergiert. φ ist surjektiv, also existiert ein $a \in \partial_+ P$ mit $\varphi(a) = \bar{a}$ und damit auch eine Folge $\{h_i\}$ in $\tilde{\Gamma}$ derart, daß die Folge $\{h_i a_i\}$ gegen a konvergiert. Nach Proposition 23 besitzt a eine Umgebung, die nur von endlich vielen Fundamentalbereichen getroffen wird, also tauchen in der Folge $\{h_i\}$ nur endlich viele Werte auf. Damit enthält die Folge $\{h_i\}$ eine konstante

Teilfolge $\{h_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, das heißt es gibt ein $h \in \tilde{\Gamma}$ mit $h_{i_k} = h$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $\{ha_{i_k}\}$ gegen a und damit konvergiert die Folge $\{a_{i_k}\}$ gegen $h^{-1}a$ und es gilt $h^{-1}a \in F_g$.

(2) F_g ist ein kompaktes Polyeder: Nach Lemma 20 und da F_g kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $N \subset \Gamma u$ mit

$$F_g = E_g \cap \mathbb{A}_+ \cap \bigcap_{x\in N} R_x.$$

Da F_g kompakt ist, gilt $\mathrm{Cl}_{\mathbb{A}}(F_g) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{A}_+}(F_g)$. Damit ist F_g die kompakte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $E_g \cap \bigcap_{x\in N} R_x$, also ein kompaktes Polyeder. ∎

Der Beweis des Satzes 17 ergibt sich nun aus bereits bewiesenen Lemmata und Propositionen wie folgt

BEWEIS.

(1) Nach Proposition 11 ist $\partial_+ P := \partial P \cap \mathbb{A}_+$ invariant unter $\tilde{\Gamma}$.

(2) Nach Proposition 23 gilt: F_g ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\partial_+ P$. Die Überdeckung $\{F_g\}_{g\in\tilde{\Gamma}}$ von $\partial_+ P$ ist lokal endlich.

(3) Nach Proposition 24 ist $\Psi|_{\partial_+ P} : \partial_+ P \to \mathbb{S}$ ein $\tilde{\Gamma}$-äquivarianter Homöomorphismus.

(4) Damit folgt: $\mathcal{F}_g$ ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathbb{S}$. Die Überdeckung $\{\mathcal{F}_g\}_{g\in\tilde{\Gamma}}$ von $\mathbb{S}$ ist lokal endlich.

(5) $\mathcal{F}_g \cap \mathcal{F}_h \subset (g-h)^\perp \cap \mathbb{S}$ für $g, h \in \tilde{\Gamma}$ mit $g \neq h$ folgt aus

$$\begin{aligned} F_g \cap F_h \subset E_g \cap E_h \cap \mathbb{A}_+ &= \{x \in \mathbb{A}_+ : (x,g) = (x,h) = 1\} \\ &\subset \{x \in \mathbb{A}_+ : (x, g-h) = 0\} = (g-h)^\perp \cap \mathbb{A}_+ \end{aligned}$$

und $\Psi((g-h)^\perp) = (g-h)^\perp \cap \mathbb{S}$.

(6) Nach Proposition 26 ist F_g ein kompaktes Polyeder, falls Γ cokompakt ist. ∎

§9. Eine andere Beschreibung der Fundamentalbereiche

ZUR ERINNERUNG. Für $x \in \Gamma u$ gilt $R_x = \mathbb{A} \backslash Q_x^\circ = \bigcup_{g\in L_x} I_g$.

DEFINITION. Für $g \in \tilde{\Gamma}$ sei

$$S_g := E_g \cap H_{gr_{u,\frac{4\pi}{n}}} \cap H_{gr_{u,-\frac{4\pi}{n}}},$$

also $S_g = E_g \cap H_{gr_u} \cap H_{g\bar{r}_u}$ für $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ und $S_g = E_g \cap H_{gr_u^2} \cap H_{g\bar{r}_u^2}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma^2$. Insbesondere gilt

$$S_e = E_e \cap \partial Q_u = \{(1+\omega i, z) \in \mathbb{A} : \omega \in I_n\}.$$

Es sei ferner $S_e^\pm := \{(1+\omega i, z) \in \mathbb{A} : \omega \in I_n^\pm\}$.

DEFINITION. Für ein $N \subset \Gamma u \backslash \{u\}$ sei

$$F_N := \mathbb{A}_+ \cap S_e \cap \bigcap_{x\in N} R_x.$$

Es sei $F_\Gamma := F_{\Gamma u\backslash\{u\}}$.

SATZ 27. *Es gilt* $\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma) = \mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_e \cap \partial_+ P)$ *und damit*

$$\mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma)) = F_e.$$

Es gilt also $F_e = F_\Gamma$, *falls* $\mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma)) = F_\Gamma$ *gilt. Es gilt ferner* $F_e \subset F_\Gamma$ *und allgemeiner* $F_e \subset F_N$ *für jedes* $N \subset \Gamma u \backslash \{u\}$.

BEWEIS. Wegen $S_e = E_e \cap \partial Q_u$ gilt $F_\Gamma = \mathbb{A}_+ \cap E_e \cap \partial Q_u \cap \bigcap_{x\in\Gamma u\backslash\{u\}} R_x$. Nach Proposition 25 gilt

$$\partial_+ P = \mathbb{A}_+ \cap \bigcup_{x\in\Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x\in\Gamma u} R_x.$$

Damit gilt

$$F_\Gamma \subset \mathbb{A}_+ \cap E_e \cap \bigcup_{x\in\Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x\in\Gamma u} R_x = E_e \cap \partial_+ P$$

und folglich $\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma) \subset \mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_e \cap \partial_+ P)$. Es gilt ferner

$$E_e \cap \partial_+ P = \mathbb{A}_+ \cap E_e \cap \bigcup_{x\in\Gamma u} \partial Q_x \cap \bigcap_{x\in\Gamma u} R_x \subset \mathbb{A}_+ \cap E_e \cap \bigcap_{x\in\Gamma u\backslash\{u\}} R_x.$$

Es bleibt nun zu zeigen, daß $\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_e \cap \partial_+ P) \subset \partial Q_u$ gilt. Wir nehmen an, daß es einen Punkt $p \in \mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_e \cap \partial_+ P)$ mit $p \notin \partial Q_u$ gibt. Wegen $p \in \partial_+ P$ gilt $p \in \partial Q_x$ für ein $x \in \Gamma u\backslash\{u\}$. Damit schneidet jede Umgebung von p die Menge $E_e \cap Q_x^\circ \subset E_e \backslash \partial_+ P$. Die Abbildung $\Psi : \mathbb{A}_+ \to \mathbb{S}$ ist stetig und die Abbildung $\Psi|_{\partial_+ P} : \partial_+ P \to \mathbb{S}$ ist ein Homöomorphismus, also schneidet jede Umgebung von p die Menge $(\Psi|_{\partial_+ P})^{-1}(\Psi(E_e\backslash \partial_+ P)) \subset \partial_+ P \backslash E_e$. Damit hat der Punkt p keine Umgebung in $\partial_+ P$, die in $E_e \cap \partial_+ P$ enthalten ist, was der Annahme $p \in \mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_e \cap \partial_+ P)$ widerspricht. Damit haben wir $\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma) = \mathrm{Int}_{\partial_+ P}(E_e \cap \partial_+ P)$ und folglich $\mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma)) = F_e$ bewiesen. Da F_Γ abgeschlossen ist, gilt $F_e = \mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma)) \subset \mathrm{Cl}_{\partial_+ P}(F_\Gamma) = F_\Gamma$ und folglich $F_e \subset F_\Gamma \subset F_N$ für jedes $N \subset \Gamma u\backslash\{u\}$. ∎

Bemerkung. Man kann zeigen, daß gilt

$$\mathrm{Int}_{\partial_+ P}(F_\Gamma) = \mathbb{A}_+ \cap E_e \cap H^\circ_{r_{u,\frac{4\pi}{n}}} \cap H^\circ_{r_{u,-\frac{4\pi}{n}}} \cap \bigcap_{x\in\Gamma u\backslash\{u\}} R_x^\circ.$$

§10. Die Prismen Q_x für x aus der Eckenkorona

Es seien p, q, r ungerade natürliche Zahlen und es sei $\tilde\Gamma = \Gamma^2(p,q,r)$. In diesem Abschnitt legen wir einige Bezeichnungen fest, um die Seiten der Prismen

$$Q_{m,l} := Q_{x_{m,l}} \quad \text{und} \quad \tilde Q_{m,l} := Q_{\tilde x_{m,l}}$$

beschreiben zu können.

Definition. Definiere

$$g_{m,l,k} := (-1)^{m+l+k} r_u^m r_v^l r_u^k \quad \text{und} \quad \tilde g_{m,l,k} := (-1)^{m+l+k} r_u^m r_w^l r_u^k$$

für $m, l, k \in \mathbb{Z}$. Es sei ferner

$$E_{m,l,k} := E_{g_{m,l,k}}, \quad H_{m,l,k} := H_{g_{m,l,k}}, \quad I_{m,l,k} := I_{g_{m,l,k}},$$

$$E_{l,k} := E_{0,l,k}, \quad H_{l,k} := H_{0,l,k}, \quad I_{l,k} := I_{0,l,k},$$

$$\tilde E_{m,l,k} := E_{\tilde g_{m,l,k}}, \quad \tilde H_{m,l,k} := H_{\tilde g_{m,l,k}}, \quad \tilde I_{m,l,k} := I_{\tilde g_{m,l,k}},$$

Bemerkung. Es gilt $g_{m,l+q,k} = g_{m,l,k+p} = g_{m,l,k}$ für $m, l, k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 28. *Es gilt $g_{m,l,k}(0) = x_{m,l}$ und $\tilde g_{m,l,k}(0) = \tilde x_{m,l}$. Es gilt ferner*

$$Q_{m,l} = \bigcap_{i=0}^{p-1} H_{m,l,2i} \quad \textit{und} \quad \tilde Q_{m,l} = \bigcap_{i=0}^{p-1} \tilde H_{m,l,2i} \quad \textit{für } m, l, k \in \mathbb{Z}. \;∎$$

Um explizite Ungleichungen für diese Halbräume zu bekommen, rechnen wir die Gruppenelemente $g_{m,l,k}$ und $\tilde g_{m,l,k}$ aus.

Zur Erinnerung. Es gilt $C = \cosh \ell_v$, $S = \sinh \ell_v$ und $B(l) = S \cdot \sin \frac{\pi l}{q}$ für $l \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 29. *Für $m, l, k \in \mathbb{Z}$ sei*

$$\kappa := \frac{\pi k}{p}, \quad \lambda := \frac{\pi l}{q}, \quad \sigma := \frac{\pi(k+m)}{p} \quad \text{und} \quad \delta := \frac{\pi(k-m)}{p}.$$

Dann gilt unter der Identifikation $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} g_{m,l,k} &= \varepsilon(e^{i\sigma}(\cos\lambda + iC\sin\lambda), -ie^{-i\delta}B(l)) \\ &= \varepsilon\big(\cos\sigma\cos\lambda - C\sin\sigma\sin\lambda, \sin\sigma\cos\lambda + C\cos\sigma\sin\lambda, -B(l)\sin\delta, -B(l)\cos\delta\big) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} z \in H_{m,l,k}(\omega) &\Longleftrightarrow -\varepsilon z_1 \sin\delta - \varepsilon z_2 \cos\delta \geqslant -\alpha_{m,l,k}(\omega) \\ z \in I_{m,l,k}(\omega) &\Longleftrightarrow \varepsilon z_1 \sin\delta + \varepsilon z_2 \cos\delta \geqslant \alpha_{m,l,k}(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon = (-1)^{m+l+k}, \quad \alpha_{m,l,k}(\omega) = \frac{1}{B(l)} \cdot \beta_{m,l,k}(\omega)$$

und

$$\beta_{m,l,k}(\omega) = 1 - \varepsilon\cos\sigma\cos\lambda + \varepsilon C\sin\sigma\sin\lambda - \varepsilon\omega(\sin\sigma\cos\lambda + C\cos\sigma\sin\lambda).$$

Die Funktionen $\beta_{m,l,k}$ und $\alpha_{m,l,k}$ sind linear.

Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned} g_{0,l,k} &= \varepsilon(e^{i\kappa}(\cos\lambda + iC\sin\lambda), -ie^{-i\kappa}B(l)) \\ &= \varepsilon\big(\cos\kappa\cos\lambda - C\sin\kappa\sin\lambda, \sin\kappa\cos\lambda + C\cos\kappa\sin\lambda, -B(l)\sin\kappa, -B(l)\cos\kappa\big) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} z \in H_{l,k}(\omega) &\Longleftrightarrow -\varepsilon z_1 \sin\kappa - \varepsilon z_2 \cos\kappa \geqslant -\alpha_{l,k}(\omega) \\ z \in I_{l,k}(\omega) &\Longleftrightarrow \varepsilon z_1 \sin\kappa + \varepsilon z_2 \cos\kappa \geqslant \alpha_{l,k}(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon = (-1)^{l+k}, \quad \alpha_{l,k}(\omega) = \frac{1}{B(l)} \cdot \beta_{l,k}(\omega)$$

und

$$\beta_{l,k}(\omega) = 1 - \varepsilon\cos\kappa\cos\lambda + \varepsilon C\sin\kappa\sin\lambda - \varepsilon\omega(\sin\kappa\cos\lambda + C\cos\kappa\sin\lambda).$$

Die Funktionen $\beta_{l,k}$ und $\alpha_{l,k}$ sind auch linear. Es gilt $\alpha_{m,l,k} = \alpha_{l,m+k}$ und $\beta_{m,l,k} = \beta_{l,m+k}$.

BEWEIS. Mit Hilfe der Proposition II.10 berechnet man

$$\begin{aligned} r_u^k r_v^l r_u^m &= (e^{i\pi k/p}, 0)(\cos\frac{\pi l}{q} + iC\sin\frac{\pi l}{q}, -iB(l))(e^{i\pi m/p}, 0) \\ &= (e^{i\pi((m+k)/p}(\cos\frac{\pi l}{q} + iC\sin\frac{\pi l}{q}), -ie^{-i\pi(m-k)/p}B(l)) \\ &= (e^{i\sigma}(\cos\lambda + iC\sin\lambda), -ie^{-i\delta}B(l)). \blacksquare \end{aligned}$$

Wir können die Aussage der Proposition 28 nun präzisieren:

PROPOSITION 30. *$E_{m,l,0}, E_{m,l,2}, \ldots, E_{m,l,2(p-1)}$ sind die affinen Hüllen der Seiten des Prismas $Q_{m,l}$ im negativen Umlaufsinn.*

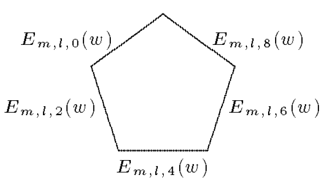


ABBILDUNG 4. Schnittbild von $Q_{m,l}$.

Beweis. Es sei $w \in \mathbb{C}$ und $x \in \Gamma u \backslash \{u\}$. Nach Satz 14 und Proposition 29 hat die Seite $E_{m,l,2k}(w)$ von $Q_{m,l}(w)$ die Versetzung

$$(-1)^{m+l+1}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{p}-\frac{2\pi k}{p}\right).$$

Die Seiten $E_{m,l,0}(w), E_{m,l,2}(w), \ldots, E_{m,l,2(p-1)}(w)$ von $Q_{m,l}(w)$ haben damit die Versetzungen

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{p}, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{p}-\frac{2\pi}{p}, \ldots, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{p}-\frac{2\pi(p-1)}{p},$$

falls $m+l$ ungerade ist, und

$$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi m}{p}, -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi m}{p}+\frac{2\pi}{p}, \ldots, -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi m}{p}+\frac{2\pi(p-1)}{p}$$

sonst. ∎

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir den Spezialfall $q = r$, in dem die Beschreibung der Seiten von $Q_{m,l}$ vereinfacht werden kann, genauer diskutieren, In diesem Fall gilt (vgl. Anhang) $C = \cosh \ell_v = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{q} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}$.

Proposition 31. *Unter den Identifikationen* $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathbb{S}$ *und* $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ *gilt im Falle* $q = r$

$$\begin{aligned}
r_u &= (e^{i\frac{\pi}{p}}, 0) = (\cos\frac{\pi}{p}, \sin\frac{\pi}{p}, 0, 0),\\
r_v &= (iA \cdot e^{-\pi i/2p}, -iB) = (A\sin\frac{\pi}{2p}, A\cos\frac{\pi}{2p}, 0, -B),\\
r_v^{q-1} &= (iA \cdot e^{\pi i/2p}, -iB) = (-A\sin\frac{\pi}{2p}, A\cos\frac{\pi}{2p}, 0, -B)
\end{aligned}$$

mit $A := \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{2p}}$. *Damit gilt: Es sei k eine gerade ganze Zahl. Mit* $\delta := (2k-1)\pi/2p$ *gilt*

$$g_{0,1,k} = (-iA \cdot e^{i\delta}, iB \cdot e^{-i\frac{\pi k}{p}}) = (A\sin\delta, -A\cos\delta, B\sin\frac{\pi k}{p}, B\cos\frac{\pi k}{p})$$

und somit

$$\begin{aligned}
z \in H_{1,k}(\omega) &\iff z_1 \sin\frac{\pi k}{p} + z_2\cos\frac{\pi k}{p} \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin\delta - \omega\cos\delta) - 1),\\
z \in I_{1,k}(\omega) &\iff -z_1 \sin\frac{\pi k}{p} - z_2\cos\frac{\pi k}{p} \geqslant \frac{1}{B}(-A(\sin\delta - \omega\cos\delta) + 1).
\end{aligned}$$

Mit $\sigma := \frac{(2k+1)\pi}{2p}$ *gilt*

$$g_{0,q-1,k} = (iA \cdot e^{i\sigma}, -iB \cdot e^{-i\frac{\pi k}{p}}) = (-A\sin\sigma, A\cos\sigma, -B\sin\frac{\pi k}{p}, -B\cos\frac{\pi k}{p})$$

und damit

$$\begin{aligned}
z \in H_{q-1,k}(\omega) &\iff -z_1 \sin\frac{\pi k}{p} - z_2\cos\frac{\pi k}{p} \geqslant \frac{1}{B}(-A(\sin\sigma - \omega\cos\sigma) - 1),\\
z \in I_{q-1,k}(\omega) &\iff z_1 \sin\frac{\pi k}{p} + z_2\cos\frac{\pi k}{p} \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin\sigma - \omega\cos\sigma) + 1).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir erhalten mit Hilfe der Proposition II.10 $r_u = (e^{i\pi/p}, 0)$,

$$r_v = (\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB) = (A(\sin\frac{\pi}{2p} + i\cos\frac{\pi}{2p}), -iB) = (Aie^{-\pi i/2p}, -iB)$$

und

$$r_v^{q-1} = (-\cos\frac{\pi}{q} + iC\sin\frac{\pi}{q}, -iB) = (A(-\sin\frac{\pi}{2p} + i\cos\frac{\pi}{2p}), -iB) = (Aie^{\pi i/2p}, -iB).$$ ∎

§11. Erklärung der Abbildungen von F_N und F_e

In jedem der Fälle werden wir die Menge F_N mit $N = \mathcal{K}$ bzw. $N = \mathcal{E}$ genauer untersuchen und eine reduzierte Darstellung dieser Menge als $F_N = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_N$ herleiten, wobei $\tilde{F}_N$ ein kompaktes Polytop in E_e ist. Neben dieser Beschreibung von F_N findet man auch Abbildungen, die das Polytop $\tilde{F}_N$ darstellen.

Als Ergebnis der Berechnung des Fundamentalbereichs F_e werden wir eine Darstellung von F_e als kompaktes Polytop in E_e erhalten. Jeweils im letzten Abschnitt des entsprechenden Kapitels befindet sich die Abbildung des Fundamentalbereichs F_e und die Beschreibung der Seitenidentifikationen.

In diesem Kapitel soll erläutert werden, wie wir ein kompaktes Polytop in E_e in einer Abbildung darstellen. Ferner soll erklärt werden, wie wir die Seitenidentifikationen des Fundamentalbereichs F_e beschreiben.

Die Abbildungen von $F_{\mathcal{K}}$, $F_{\mathcal{E}}$ bzw. F_e werden ein kompaktes Polytop der Gestalt

$$S_e \cap \bigcap_{x \in \mathcal{E}} \bigcup_{g \in \tilde{L}_x} I_g$$

mit $\tilde{L}_x \subset L_x$ für $x \in \mathcal{E}$ zeigen. Der dreidimensionale affine Unterraum $E_e = \{(1 + i\omega, z) : \omega \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$ von $\mathbb{A}$ wird durch $(1 + i\omega, z) \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \omega)$ mit $\mathbb{R}^3$ identifiziert. Dabei wird die Menge

$$S_e = E_e \cap H_{r_{u,\frac{4\pi}{n}}} \cap H_{r_{u,-\frac{4\pi}{n}}} = \{(1 + \omega i, z) \in \mathbb{A} : \omega \in I_n\}.$$

mit der Schicht $\{(z_1, z_2, \omega) : \omega \in I_n\}$ in $\mathbb{R}^3$ identifiziert. Die in $E_e \cap E_{r_{u,\frac{4\pi}{n}}}$ bzw. $E_e \cap E_{r_{u,-\frac{4\pi}{n}}}$ enthaltene Seite nennen wir *Deckel* bzw. *Boden.* Die Abbildungen stellen den Rand des Polytops ohne Deckel und Boden in der orthogonalen Parallelprojektion dar.

Nun zur Beschreibung der Seitenidentifikationen des Fundamentalbereichs F_e. Unter der Abbildung des Polytops F_e findet man eine schematische Darstellung seiner Oberfläche (wiederum ohne Deckel und Boden), die dazu dient, die Identifikationen der Seitenflächen darzustellen. Die Paare der zu identifizierenden Seitenflächen sind in diesem Schema durch gleiche Schattierung, Zeichen oder Zahlen gekennzeichnet. In dieser Weise werden die Identifikationsvorschriften für einige Seiten angegeben, alle anderen Seiten sind Bilder dieser Seiten unter der Drehsymmetrie ρ bzw. ρ'.

Kapitel IV

Symmetrien des Fundamentalbereichs F_e

Мы довольно долго кружили у Храмины. И как могли вглядывались в восточную, южную и западную башни и в соединявшие их стены. Что касается прочих помещений — они выходили на обрыв, но, согласно законам симметрии, не должны были отличаться от тех, которые мы видели.

Умберто Эко. Имя розы

Wir nennen eine Isometrie φ von $\mathbb{A}$ eine *Symmetrie* des Fundamentalbereichs F_e, wenn $\varphi(\partial_+ P) = \partial_+ P$ und $\varphi(F_e) = F_e$ gilt. Für jede Isometrie φ von $\mathbb{A}$ gilt $\varphi(H_g) = H_{\varphi(g)}$. Damit folgt aus der Definition von $\partial_+ P$ und F_e, daß eine Isometrie φ von $\mathbb{A}$ genau dann eine Symmetrie von F_e ist, wenn $\varphi(\tilde\Gamma) = \tilde\Gamma$, $\varphi(g\tilde\Gamma_u) = \varphi(g) \cdot \tilde\Gamma_u$ für alle $g \in \tilde\Gamma$ und $\varphi(e) = e$ gilt. Ist eine Isometrie φ von $\mathbb{A}$ mit der Multiplikation verträglich, gilt also $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in \tilde\Gamma$, so ist φ genau dann eine Symmetrie von F_e, wenn $\varphi(\tilde\Gamma) = \tilde\Gamma$, $\varphi(\tilde\Gamma_u) = \tilde\Gamma_u$ und $\varphi(e) = e$ gilt.

Wir beschreiben nun einige Isometrien von $\mathbb{A}$. Mit Hilfe der obigen Überlegungen kann man dann einsehen, daß sie Symmetrien des Fundamentalbereichs F_e sind. Diese Symmetrien werden wir später oft benutzen, um den Umfang der Rechnungen zu reduzieren.

Es seien p, q, r ungerade natürliche Zahlen und es sei $\tilde\Gamma = \Gamma^2(p, q, r)$.

Definition. Die Abbildungen $\rho : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ und $\eta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ seien durch $\rho(g) := r_u g r_u^{-1}$ und $\eta((w, z)) := (\bar w, \bar z)$ definiert.

Proposition 32. *Es gilt*

$$\rho : -r_u \mapsto -r_u, \quad -r_v \mapsto -r_u r_v r_u^{-1}$$

und

$$\eta : -r_u \mapsto -r_u^{-1}, \quad -r_v \mapsto -r_v^{-1}.$$

Für $(w, z) \in \mathbb{A}$ gilt $\rho : (w, z) \mapsto (w, z e^{2\pi i/p})$ und $\eta : (w, z) \mapsto (\bar w, \bar z)$. ρ und η sind Isometrien von $\mathbb{A}$ und mit der Multiplikation verträglich. Es gilt

$$\rho(E_g) = E_{\rho(g)}, \quad \rho(H_g) = H_{\rho(g)}, \quad \rho(I_g) = I_{\rho(g)}$$

und

$$\eta(E_g) = E_{\eta(g)}, \quad \eta(H_g) = H_{\eta(g)}, \quad \eta(I_g) = I_{\eta(g)}$$

für $g \in \mathbb{A}$. Dabei gilt für $m, l, k \in \mathbb{Z}$

$$\rho(g_{m,l,k}) = g_{m+1,l,k-1} \quad \text{und} \quad \eta(g_{m,l,k}) = g_{-m,-l,-k}.$$

Die Abbildungen ρ und η überführen die Teilmengen $\mathbb{A}_+$ und S_e von $\mathbb{A}$ in sich. Es gilt

$$\rho(S_e^+) = S_e^+, \quad \rho(S_e^-) = S_e^- \quad \text{und} \quad \eta(S_e^+) = S_e^-, \quad \eta(S_e^-) = S_e^+.$$

Beweis. Mit Hilfe der Proposition II.10 berechnen wir

$$\eta(r_u) = \eta((e^{i\frac{\pi}{p}}, 0)) = (e^{-i\frac{\pi}{p}}, 0) = r_u^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} \eta(r_v) &= \eta((\cos\frac{\pi}{q} + i \sin\frac{\pi}{q} \cosh \ell_v, -i \sin\frac{\pi}{q} \sinh \ell_v)) \\ &= (\cos\frac{\pi}{q} - i \sin\frac{\pi}{q} \cosh \ell_v, i \sinh \ell_v \sin\frac{\pi}{q}) = r_v^{-1}. \end{aligned}$$

Für $(w, z) \in \mathbb{A}$ gilt

$$\rho((w,z)) = (e^{\pi i/p}, 0)(w,z)(e^{-\pi i/p}, 0) = (e^{\pi i/p} w, e^{\pi i/p} z)(e^{-\pi i/p}, 0) = (w, ze^{2\pi i/p}).$$

Für $m, l, k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\rho(g_{m,l,k}) = r_u g_{m,l,k} r_u^{-1} = (-1)^{m+l+k} r_u^{m+1} r_v^l r_u^{k-1} = g_{m+1,l,k-1}$$

und

$$\eta(g_{m,l,k}) = \eta(\varepsilon r_u^m r_v^l r_u^k) = \varepsilon r_u^{-m} r_v^{-l} r_u^{-k} = g_{-m,-l,-k},$$

wobei $\varepsilon := (-1)^{m+l+k} = (-1)^{-m-l-k}$. ■

Proposition 33. *Die von ρ und η erzeugte Gruppe $\langle \rho, \eta \rangle$ von Isometrien des Fundamentalbereichs F_e ist eine Diedergruppe.*

Im Falle $q = r$ besitzt der Fundamentalbereich F_e zusätzliche Symmetrien.

Definition. Die Abbildung $\rho' : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ sei durch $\rho'(g) := r'_u g {r'_u}^{-1}$ definiert, wobei $r'_u := r_{u,\pi/p}$ gilt.

Proposition 34. *Für $(w, z) \in \mathbb{A}$ gilt*

$$\rho' : (w, z) \mapsto (w, ze^{\pi i/p}).$$

Es gilt $(\rho')^2 = \rho$. Es gilt

$$\rho' : -r_u \mapsto -r_u, \quad -r_v \mapsto -r_v^{q-1} r_u^{-1}.$$

ρ' ist eine Isometrie von $\mathbb{A}$ und mit der Multiplikation verträglich. Es gilt

$$\rho'(E_g) = E_{\rho'(g)}, \quad \rho'(H_g) = H_{\rho'(g)}, \quad \rho'(I_g) = I_{\rho'(g)}$$

für $g \in \mathbb{A}$. Für jede ganze Zahl k gilt $\rho'(g_{m,1,k}) = g_{m,q-1,k-1}$ und $\rho'(g_{m,q-1,k}) = g_{m+1,1,k}$. Die Abbildung ρ' überführt die Teilmengen $\mathbb{A}_+$, S_e, S_e^+, S_e^- von $\mathbb{A}$ in sich.

Beweis. Für $(w, z) \in \mathbb{A}$ gilt

$$\rho'((w,z)) = (e^{\pi i/2p}, 0)(w,z)(e^{-\pi i/2p}, 0) = (e^{\pi i/2p} w, e^{\pi i/2p} z)(e^{-\pi i/2p}, 0) = (w, ze^{\pi i/p}).$$

Mit Hilfe der Proposition III.31 berechnen wir

$$\rho'(r_u) = \rho'((e^{\pi i/p}, 0)) = (e^{\pi i/p}, 0) = r_u$$

und

$$r_v^{q-1} r_u^{-1} = (iA \cdot e^{\pi i/2p}, -iB) \cdot (e^{-i\pi/p}, 0) = (iA \cdot e^{-\pi i/2p}, -iBe^{\pi i/p}) = \rho'(r_v).$$

Damit gilt $\rho'(r_v r_u^k) = r_v^{q-1} r_u^{-1} r_u^k = r_v^{q-1} r_u^{k-1}$. Daraus folgt $\rho'(g_{0,1,k}) = g_{0,q-1,k-1}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Durch analoge Rechnung oder unter Benutzung der Identität $(\rho')^2 = \rho$ zeigt man, daß $\rho'(g_{m,q-1,k}) = g_{m+1,1,k}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt. ■

Kapitel V

Endliche Darstellung des Fundamentalbereichs als kompaktes Polytop

А серое зеркало реки, иногда с буксиром, пыхтящим против течения, рассказало мне о бесконечности и стоицизме больше, чем математика и Зенон.

Иосиф Бродский, Меньше единицы

Nach Satz III.17 ist das Polyeder F_e kompakt, falls die Untergruppe Γ cokompakt ist. In diesem Fall existiert eine endliche Teilmenge N von $\Gamma u \backslash \{u\}$ derart, daß $F_e = F_N$ gilt. Der Satz III.17 gibt aber keinen Hinweis darauf, wie man diese endliche Teilmenge findet. In diesem Kapitel werden einige Methoden beschrieben, um so eine endliche Darstellung des Fundamentalbereichs F_e zu erhalten. In allen sechs in dieser Arbeit genauer betrachteten Fällen gilt $F_e = F_{\mathcal{E}}$, in allen Fällen bis auf den Fall $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$ gilt sogar $F_e = F_{\mathcal{K}}$.

§12. Netzabschätzung für $F_{\mathcal{K}}(\omega)$

Wir zeigen durch die Approximation der Prismen Q_x durch die ihnen einbeschriebenen Zylinder, daß für jedes $\omega \in I_n$ die Teilmenge $(S_e \cap \bigcap_{x \in \mathcal{K}} R_x)(\omega)$ von $\mathbb{C}$ außerhalb eines Ringgebietes liegt. Unter bestimmten Voraussetzungen folgt daraus eine Abschätzung für die Beträge der Punkte in $F_{\mathcal{K}}(\omega)$.

Definition. Ein s-*Netz* vom Radius d ist eine endliche Teilmenge der Kreislinie vom Radius d mit Zentrum 0 in $\mathbb{C}$, so daß für eine Numerierung $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1$ im Umlaufsinn $\max_i |x_i - x_{i+1}| = s \neq 0$ gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $s \leqslant 2d$.

Definition. Für ein s-Netz $N \subset \Gamma u \backslash \{u\}$ vom Radius $d < 1$ mit $s < 2d\sqrt{1-d^2}$ sei

$$R_N := \frac{2d^2}{\sqrt{4d^2 - s^2}}$$

und

$$\Omega_N := \frac{\sqrt{4d^2(1-d^2) - s^2}}{s}.$$

Es sei ferner

$$\ell_N^-(\omega) := \frac{1}{2d^2}\left(\sqrt{4d^2 - s^2} - \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{1+\omega^2} - s^2}\right)$$

und

$$\ell_N^+(\omega) := \frac{1}{2d^2}\left(\sqrt{4d^2 - s^2} + \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{1+\omega^2} - s^2}\right)$$

für $\omega \in [-\Omega_N, \Omega_N]$. Die Funktionen $\ell_N^-(\omega)$ und $\ell_N^+(\omega)$ sind gerade. $\ell_N^-(\omega)$ ist monoton fallend auf $(-\Omega_N, 0)$ und monoton steigend auf $(0, \Omega_N)$, $\ell_N^+(\omega)$ ist monoton steigend auf $(-\Omega_N, 0)$ und monoton fallend auf $(0, \Omega_N)$. Es sei

$$\ell_N^\pm := \ell_N^\pm(\tan\frac{\pi}{n}) = \ell_N^\pm(-\tan\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{2d^2}\left(\sqrt{4d^2 - s^2} \pm \sqrt{4d^2(1-d^2)\cos^2\frac{\pi}{n} - s^2}\right),$$

falls $\tan\frac{\pi}{n} \leqslant \Omega_N$ gilt.

Definition. Für $t > 0$ sei

$$S_e(t) := \{(1 + \omega i, z) \in \mathbb{A} : \omega \in [-t, t]\},$$

es gilt also insbesondere $S_e = S_e(\tan\frac{\pi}{n})$. Für ein Netz $N \subset \Gamma u$ und $t \in [0, \Omega_N]$ sei

$$U_N(t) := \{(1 + i\omega, z) \in S_e(t) : |z| < \ell_N^-(\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2}\}$$

und

$$U_N := U_N(\tan\frac{\pi}{n}) = \{(1+i\omega, z) \in S_e : |z| < \ell_N^-(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}\}.$$

Bemerkung. Die Abbildungen ρ, η und ρ' überführen die Mengen $U_N(t)$ und insbesondere U_N in sich.

Proposition 35. *Für ein s-Netz $N \subset \Gamma u$ vom Radius $d < 1$ mit $s < 2d\sqrt{1-d^2}$ gilt:*

Für jedes $\omega \in [-\Omega_N, \Omega_N]$ und $z \in \left(\bigcap_{x\in N} R_x\right)(\omega)$ gilt entweder

$$|z| < \ell_N^-(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}$$

oder

$$|z| > \ell_N^+(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}.$$

Ist $\Omega_N \geqslant \tan\frac{\pi}{n}$ und $\ell_N^- \leqslant 1 \leqslant \ell_N^+$, so ist jede zusammenhängende Teilmenge von $S_e \cap \bigcap_{x\in N} R_x$, die nicht in $\mathbb{A}_-$ enthalten ist, in $U_N \subset \mathbb{A}_+$ enthalten. Es gilt ferner $F_N \subset U_N \subset \mathbb{A}_+$.

Allgemeiner gilt: Ist $t \in [0, \Omega_N]$ und $\ell_N^-(t) \leqslant 1 \leqslant \ell_N^+(t)$, so ist jede zusammenhängende Teilmenge von $S_e(t) \cap \bigcap_{x\in N} R_x$, die nicht in $\mathbb{A}_-$ enthalten ist, in $U_N(t) \subset \mathbb{A}_+$ enthalten.

Beweis. Es sei $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1$ eine Numerierung von N mit $\max_{i=1,\ldots,m} |x_i - x_{i+1}| = s$. Es gilt $|x_i| = d$ für $i = 1, \ldots, m$. Es sei $w := 1 + i\omega$. Nach Satz III.14 sind $Q_{x_i}(\omega)$ für $i = 1, \ldots, m$ regelmäßige Polygone mit Zentren $z_i = \frac{\bar{w}}{\bar{x}_i}$ und Inkreisradius $r = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$. Für $i = 1, \ldots, m$ gilt also $|z_i| = \frac{|w|}{|x_i|} = \frac{|w|}{d}$ und

$$|z_i - z_{i+1}| = \left|\frac{\bar{w}}{\bar{x}_i} - \frac{\bar{w}}{\bar{x}_{i+1}}\right| = \frac{|w|}{|\bar{x}_i|\cdot|\bar{x}_{i+1}|}\cdot|\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i| = \frac{|w|}{d^2}\cdot|x_{i+1} - x_i|.$$

Somit bilden $z_1, \ldots, z_m$ ein s'-Netz vom Radius $d' := \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{d}$ mit $s' := \frac{s\sqrt{1+\omega^2}}{d^2}$. Für $x \in N$ liegt z außerhalb von $Q_x(\omega)$ und damit erst recht außerhalb des $Q_x(\omega)$ einbeschriebenen Kreises.

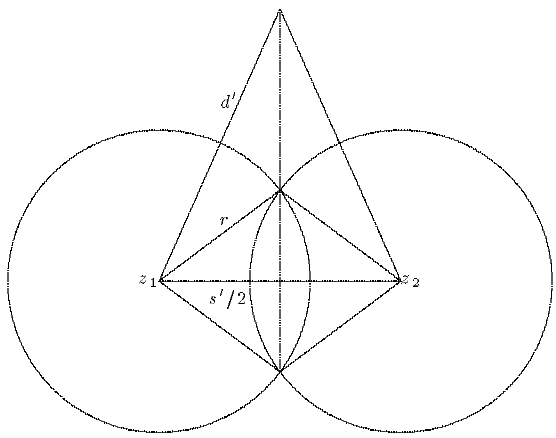


Abbildung 5. Umkreisabschätzung.

Unter der Voraussetzung $2r \geqslant s'$ schneiden sich die den Polygonen $Q_{x_i}(\omega)$ und $Q_{x_{i+1}}(\omega)$ einbeschriebenen Kreise und es gilt

$$|z| < \sqrt{d'^2 - (s'/2)^2} - \sqrt{r^2 - (s'/2)^2} \quad \text{oder} \quad |z| > \sqrt{d'^2 - (s'/2)^2} + \sqrt{r^2 - (s'/2)^2}.$$

Dabei ist die Voraussetzung $2r \geqslant s'$ zu der Ungleichung $2d\sqrt{1-d^2} \geqslant s\sqrt{1+\omega^2}$ und damit zu der Voraussetzung $|\omega| \leqslant \Omega_N$ äquivalent. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&\sqrt{d'^2 - (s'/2)^2} \pm \sqrt{r^2 - (s'/2)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1+\omega^2}{d^2} - \frac{s^2(1+\omega^2)}{4d^4}} \pm \sqrt{\frac{1-d^2}{d^2} - \frac{s^2(1+\omega^2)}{4d^4}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{2d^2}\left(\sqrt{4d^2 - s^2} \pm \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{1+\omega^2} - s^2}\right).
\end{aligned}$$

Es gelte $\ell_N^- \leqslant 1 \leqslant \ell_N^+$. Wegen der Monotonie von $\ell_N^-(\omega)$ und $\ell_N^+(\omega)$ auf $(-\Omega_N, 0)$ und $(0, \Omega_N)$ folgt $\ell_N^-(\omega) < 1 < \ell_N^+(\omega)$ für alle $\omega \in I_n$. Daraus folgen die restlichen Behauptungen. ∎

Die Netzabschätzungen sollen nun auf die Kantenkorona $\mathcal{K}$ angewandt werden.

Satz 36. *Es sei $\Gamma = \Gamma(p,q,r)$ mit $r \leqslant q \leqslant p$. Die Kantenkorona $\mathcal{K}$ ist ein s-Netz vom Radius d mit*

$$s = \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{2\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1} \quad \textit{und} \quad d = \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}}{\sqrt{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}}.$$

Es gilt $d < 1$ und $s < 2d\sqrt{1-d^2}$. Es gilt ferner

$$R_{\mathcal{K}} = \tanh \ell_v = \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} + 2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} - 1}}{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r}},$$

$$\Omega_{\mathcal{K}} = \tan\frac{\pi}{q}$$

und

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathcal{K}}^{\pm}(\omega) &= \operatorname{ctgh} \ell_v \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}{\sinh \ell_v \sin\frac{\pi}{q}} \\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r} \pm \sin\frac{\pi}{p}\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} + 2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} - 1}},
\end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathcal{K}}^{\pm} &= \operatorname{ctgh} \ell_v \pm \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}{\sinh \ell_v \sin\frac{\pi}{q}} \\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r} \pm \sin\frac{\pi}{p}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{q}}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} + 2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} - 1}}.
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Proposition I.5 ist $\mathcal{K}$ ein Netz vom Radius

$$d = \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}}{\sqrt{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}}.$$

Die Dichte s des Netzes $\mathcal{K}$ ist gleich

$$s = \max\{|x_{m,1} - x_{m,q-1}|, |x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|\}.$$

Nach Proposition I.6 und wegen $q \geqslant r$ gilt

$$|x_{m,1} - x_{m,q-1}| = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{r}} \cdot |x_{m,q-1} - x_{m+1,1}| \geqslant |x_{m,q-1} - x_{m+1,1}|$$

und folglich

$$s = |x_{m,1} - x_{m,q-1}| = \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{2\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}.$$

Man berechnet

$$1 - d^2 = \frac{1}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1},$$

$$\frac{2d}{s} = \frac{2 \sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}}{\sqrt{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}} \cdot \frac{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}{\sinh \ell_v \sin \frac{2\pi}{q}} = \frac{\sqrt{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}}{\cos \frac{\pi}{q}}$$

und folglich

$$\frac{4d^2}{s^2} \cdot (1 - d^2) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{q}}.$$

Damit gilt

$$\Omega_{\mathcal{K}} = \frac{\sqrt{4d^2(1-d^2) - s^2}}{s} = \sqrt{\frac{4d^2}{s^2} \cdot (1 - d^2) - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{q}} - 1} = \tan \frac{\pi}{q}.$$

Man berechnet ferner

$$\frac{s}{2d^2} = \frac{\sinh \ell_v \sin \frac{2\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1} \cdot \frac{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}{2 \sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q}} = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}},$$

$$\frac{\sqrt{4d^2 - s^2}}{2d^2} = \sqrt{\frac{1}{d^2} - \frac{s^2}{4d^4}} = \sqrt{\frac{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q} + 1}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q}} - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sinh^2 \ell_v \sin^2 \frac{\pi}{q}}} = \operatorname{ctgh} \ell_v$$

und folglich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2d^2} \cdot \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{1+\omega^2} - s^2} &= \frac{s}{2d^2} \cdot \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{s^2(1+\omega^2)} - 1} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{q}(1+\omega^2)} - 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2 \frac{\pi}{q}}}{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$R_{\mathcal{K}} = \frac{2d^2}{\sqrt{4d^2 - s^2}} = \tanh \ell_v$$

und

$$\begin{aligned}\ell_{\mathcal{K}}^{\pm}(\omega) &= \frac{1}{2d^2} \left(\sqrt{4d^2 - s^2} \pm \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{1+\omega^2} - s^2} \right) \\ &= \operatorname{ctgh} \ell_v \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2 \frac{\pi}{q}}}{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}} = \frac{\cosh \ell_v \sin \frac{\pi}{q} \pm \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2 \frac{\pi}{q}}}{\sinh \ell_v \sin \frac{\pi}{q}}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln für $\cosh \ell_v$ und $\sinh \ell_v$ (siehe Anhang) erhält man

$$R_{\mathcal{K}} = \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} + 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} - 1}}{\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r}}$$

und

$$\ell_{\mathcal{K}}^{\pm}(\omega) = \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r} \pm \sin \frac{\pi}{p} \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2 \frac{\pi}{q}}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{p} + \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} + 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} - 1}}. \blacksquare$$

PROPOSITION 37. *Es gilt stets* $\ell_{\mathcal{K}}^{+} > 1$.

BEWEIS. Es genügt,

$$\frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}+\cos\frac{\pi}{r}}{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}+\cos^2\frac{\pi}{r}+2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}-1}} > 1$$

zu zeigen. Dabei gilt

$$\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}+\cos\frac{\pi}{r} > \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}+\cos^2\frac{\pi}{r}+2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}-1}$$

$$\Longleftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{p}\cos^2\frac{\pi}{q} > \cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}-1 \Longleftrightarrow (1-\cos^2\frac{\pi}{p})(1-\cos^2\frac{\pi}{q}) > 0. \blacksquare$$

Damit läßt sich die Proposition 35 wie folgt spezialisieren:

PROPOSITION 38. *Es sei* $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^2$ *mit* $r \leqslant q \leqslant p$. *Es gilt:*

Für jedes $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{q}, \tan\frac{\pi}{q}]$ *und* $z \in \Big(\bigcap_{x\in\mathcal{K}} R_x\Big)(\omega)$ *gilt entweder*

$$|z| < \ell_{\mathcal{K}}^{-}(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}$$

oder

$$|z| > \ell_{\mathcal{K}}^{+}(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}.$$

Ist $\ell_{\mathcal{K}}^{-} \leqslant 1$, *so ist jede zusammenhängende Teilmenge von* $S_e \cap \bigcap_{x\in\mathcal{K}} R_x$, *die nicht in* $\mathbb{A}_-$ *enthalten ist, in* $U_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$ *enthalten. Es gilt ferner* $F_{\mathcal{K}} \subset U_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$.

Allgemeiner gilt: Ist $t \in [0, \tan\frac{\pi}{q}]$ *und* $\ell_{\mathcal{K}}^{-}(t) \leqslant 1$, *so ist jede zusammenhängende Teilmenge von* $S_e(t) \cap \bigcap_{x\in\mathcal{K}} R_x$, *die nicht in* $\mathbb{A}_-$ *enthalten ist, in* $U_{\mathcal{K}}(t) \subset \mathbb{A}_+$ *enthalten.*

§13. Anwendung der Netzabschätzung zum Beweis von $F_\Gamma = F_{\mathcal{K}}$

Im vorigen Abschnitt haben wir eine obere Abschätzung für Beträge der Punkte in $F_{\mathcal{K}}(\omega)$ bewiesen, andererseits haben wir in Proposition III.16 eine untere Schranke für Beträge der Punkte in $Q_x(\omega)$ hergeleitet. Ist für alle $x \notin \mathcal{K} \cup \{u\}$ und $\omega \in I_n$ die obere Schranke für Beträge der Punkte in $F_{\mathcal{K}}(\omega)$ kleiner, als die untere Schranke für Beträge der Punkte in $Q_x(\omega)$, so können die Prismen Q_x mit $x \notin \mathcal{K}\cup\{u\}$ keine gemeinsamen Punkte mit $F_{\mathcal{K}}$ und folglich auch mit $F_e \subset F_{\mathcal{K}}$ haben, es gilt also $F_e = F_{\mathcal{K}}$.

ZUR ERINNERUNG. Die Proposition III.16 besagt: Für $x \in \Gamma u\backslash\{u\}$ gilt $|z| \geqslant \mathcal{M}(|x|,\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}$ für alle $z \in Q_x(\omega)$, wobei

$$\mathcal{M}(t,\omega) := \frac{1}{t}\left(1 - \frac{\sqrt{1-t^2}}{\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\omega^2}}\right).$$

DEFINITION. Für $R > 0$ sei

$$\mathcal{M}_R := \mathcal{M}(R, \tan\frac{\pi}{n}) = \frac{1-\sqrt{1-R^2}}{R}$$

und $K_R := \{x \in \mathbb{D} : |x| \geqslant R\}$.

PROPOSITION 39. *Ist* $N \subset \Gamma u$ *ein s-Netz vom Radius d mit* $\tan\frac{\pi}{n} \leqslant \Omega_N$, $1 \leqslant \ell_N^{+}$ *und* $\ell_N^{-} \leqslant \mathcal{M}_R$ *für ein* $R \geqslant R_N$, *dann gilt* $Q_x \cap F_N = \varnothing$ *für alle* $x \in \Gamma u \cap K_R$.

BEWEIS. Es gilt $S_e = \{(1+i\omega, z) \in \mathbb{C}^2 : \omega \in I_n,\ z \in \mathbb{C}\}$. Damit ist für ein $x \in \Gamma u\backslash\{u\}$ die Bedingung $Q_x \cap F_N = \varnothing$ genau dann erfüllt, wenn $(Q_x \cap F_N)(\omega) = \varnothing$ für alle $\omega \in I_n$ gilt. Nach Proposition 35 gilt

$$|z| < \ell_N^{-}(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}$$

für alle $z \in F_N(\omega)$. Nach Proposition III.16 gilt

$$|z| \geqslant \mathcal{M}(|x|,\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2}$$

für alle $x \in \Gamma u$ und $z \in Q_x(\omega)$. Damit genügt es, $\mathcal{M}(|x|,\omega) \geqslant \ell_N^-(\omega)$ für alle $\omega \in I_n$ zu zeigen.

Die Funktion

$$f(t) := \frac{1}{t}(1 - c\sqrt{1-t^2}) \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\omega^2}} \geqslant 1$$

ist wegen

$$f'(t) = \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}(c - \sqrt{1-t^2})$$

monoton steigend auf $(0,1)$. Damit gilt $\mathcal{M}(|\xi|,\omega) \geqslant \mathcal{M}(R,\omega)$ für $\xi \in K_R$, also genügt es, $\mathcal{M}(R,\omega) \geqslant \ell_N^-(\omega)$ für alle $\omega \in I_n$ zu zeigen.

Die Funktion $\Delta(\omega) := \mathcal{M}(R,\omega) - \ell_N^-(\omega)$ läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\Delta(\omega) &= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\sqrt{1-R^2}}{\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\omega^2}}\right) - \frac{1}{2d^2}\left(\sqrt{4d^2-s^2} - \sqrt{\frac{4d^2(1-d^2)}{1+\omega^2} - s^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\left(\frac{\sqrt{4d^2(1-d^2)-s^2(1+\omega^2)}}{2d^2} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R\cos\frac{\pi}{n}}\right) + \frac{1}{R} - \frac{\sqrt{4d^2-s^2}}{2d^2}.\end{aligned}$$

Die Funktionen

$$g(\omega) := \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

und

$$h(\omega) := \frac{\sqrt{4d^2(1-d^2)-s^2(1+\omega^2)}}{2d^2} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R\cos\frac{\pi}{n}}$$

sind monoton fallend auf $I_n^+ = [0, \tan\frac{\pi}{n}]$. Die Funktion $g(\omega)$ ist positiv auf I_n^+. Wegen

$$\mathcal{M}_R = \frac{1}{R} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R} \quad \text{und} \quad \ell_N^- = \frac{1}{R_N} - \frac{\sqrt{4d^2(1-d^2)\cos^2\frac{\pi}{n} - s^2}}{2d^2}$$

gilt ferner

$$\begin{aligned}h(\tan\frac{\pi}{n}) \cdot \cos\frac{\pi}{n} &= \frac{\sqrt{4d^2(1-d^2)\cos^2\frac{\pi}{n} - s^2}}{2d^2} - \frac{\sqrt{1-R^2}}{R} \\ &= \left(\frac{1}{R_N} - \ell_N^-\right) + \left(\mathcal{M}_R - \frac{1}{R}\right) = (\mathcal{M}_R - \ell_N^-) + \left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R}\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Die Funktion $h(\omega)$ ist monoton fallend auf I_n^+ und es gilt $h(\tan\frac{\pi}{n}) \geqslant 0$, also gilt $h(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in I_n^+$. Die Funktionen $g(\omega)$ und $h(\omega)$ sind positiv und monoton fallend auf I_n^+, also ist die Funktion $\Delta(\omega) = g(\omega) \cdot h(\omega) + \text{const}$ monoton fallend auf I_n^+. Es gilt $\Delta(\tan\frac{\pi}{n}) = \mathcal{M}_R - \ell_N^- \geqslant 0$, also ist die Funktion $\Delta(\omega)$ positiv auf I_n^+. Da die Funktion $\Delta(\omega)$ gerade ist, folgt $\Delta(\omega) \geqslant 0$ und damit $\mathcal{M}(R,\omega) \geqslant \ell_N^-(\omega)$ für alle $\omega \in I_n = [-\tan\frac{\pi}{n}, \tan\frac{\pi}{n}]$. ∎

Diese Proposition kann wie folgt auf die Kantenkorona $\mathcal{K}$ spezialisiert werden:

Proposition 40. *Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^2$ mit $r \leqslant q \leqslant p$. Ist $\ell_{\mathcal{K}}^- \leqslant \mathcal{M}_R$ für ein $R \geqslant R_{\mathcal{K}}$, dann gilt $Q_x \cap F_{\mathcal{K}} = \varnothing$ für alle $x \in \Gamma u \cap K_R$.*

Beweis. Es gilt $\ell_{\mathcal{K}}^+ > 1$ nach Proposition 37. ∎

Satz 41. *Es sei $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^2$ mit $r \leqslant q \leqslant p$. Ist $\ell_{\mathcal{K}}^- \leqslant \mathcal{M}_R$ für ein $R \geqslant R_{\mathcal{K}}$ mit $\Gamma u \backslash (\mathcal{K} \cup \{0\}) \subset K_R$, so gilt $F_\Gamma = F_{\mathcal{K}}$.*

Beweis. Es gilt

$$\ell_{\mathcal{K}}^- \leqslant \mathcal{M}_R = \frac{1 - \sqrt{1-R^2}}{R} < 1$$

nach Voraussetzung. Nach Proposition 40 gilt $Q_x \cap F_{\mathcal{K}} = \varnothing$ für alle $x \in \Gamma u \backslash (\mathcal{K} \cup \{u\})$ und damit $F_\Gamma = F_{\mathcal{K}}$. ∎

§14. Ein kombinatorisches Kriterium und seine Anwendung

Die folgende Aussage wurde in der Diplomarbeit [Korollar 10.2, KNRS] bewiesen.
Es sei M eine zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand, $\tilde{\Gamma}$ eine diskrete Gruppe, die durch Homöomorphismen eigentlich diskontinuierlich auf M operiert.

Satz 42. *Es sei $\tilde{F}$ eine Teilmenge von M mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\tilde{F}$ ist zusammenhängend, der Rand $\partial\tilde{F}$ von $\tilde{F}$ ist eine Mannigfaltigkeit.*

(2) *$\tilde{F}$ ist homöomorph zu einem kompakten Polytop in $\mathbb{R}^3$ mit homogenem dreidimensionalen Fahnenkomplex. Damit ist klar, was die Menge der Flächen $\mathcal{F}$ bzw. die Menge der Kanten $\mathcal{K}$ von $\tilde{F}$ ist. Es sei $\mathcal{C} := \{(f,k) \in \mathcal{F} \times \mathcal{K} : k \subset f\}$ und $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ die Involution derart, daß für $(g,l) := \tau(f,k)$ gilt $f \cap g = k = l$.*

(3) *Es gibt eine kompakte Teilmenge F von M mit folgenden Eigenschaften:*
- *Es gilt $F \subset \tilde{F}$:*
- *Der Durchschnitt von γF° und δF ist leer für beliebige $\gamma, \delta \in \tilde{\Gamma}$ mit $\gamma \neq \delta$, die Mengen γF mit $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ überdecken M:*
- *Die Überdeckung $\{\gamma F\}_{\gamma \in \tilde{\Gamma}}$ von M ist lokal endlich:*

(4) *Es gibt eine Involution σ auf $\mathcal{C}$ und eine Familie $\{\gamma_f\}_{f \in \mathcal{F}}$ von Elementen aus $\tilde{\Gamma}$ mit folgenden Eigenschaften:*
- *Es gilt $\sigma(f,k) = (\gamma_f f, \gamma_f k)$ für jedes $(f,k) \in \mathcal{C}$.*
- *Zu jeder Seite $f \in \mathcal{F}$ und jedem Punkt $x \in f^\circ$ gibt es eine Umgebung U von x mit $\gamma_f(U \cap \tilde{F}^\circ) \cap \tilde{F}^\circ = \varnothing$.*
- *Es gilt $\gamma_{\gamma_f f} = \gamma_f^{-1}$ für jedes $f \in \mathcal{F}$.*
- *$\tilde{\Gamma}$ ist erzeugt von $\{\gamma_f\}_{f \in \mathcal{F}}$.*

(5) *Es sei $(f,k) \in \mathcal{C}$. Setze $m = m(f,k) := \min\{m \in \mathbb{N}\backslash\{0\} : (\tau\sigma)^m(f,k) = (f,k)\}$. Für $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ sei $(f_i, k_i) := (\tau\sigma)^{i-1}(f,k)$, $\gamma_i := (\gamma_{f_i} \cdot \ldots \cdot \gamma_{f_1})^{-1}$, $\tilde{F}_i := \gamma_i \tilde{F}$ und $h_i := \gamma_i f_{i+1}$.*
- *Es gilt $\gamma_{m(f,k)} = 1$ für jedes $(f,k) \in \mathcal{C}$.*
- *Zu jeder Kante $k \in \mathcal{K}$ und jedem Punkt $x \in k^\circ$ gibt es eine Umgebung U von x mit*

$$U \cap \tilde{F}_i \cap \tilde{F}_{i+1} = U \cap h_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m(f,k)+1\}$ und

$$U \cap \tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j = U \cap k$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, m(f,k)+1\}$ mit $i < j-1$.

Es sei $N := \tilde{\Gamma} \times \tilde{F}/\sim$ mit $(\delta\gamma_f, x) \sim (\delta, \gamma_f x)$ für $\delta \in \tilde{\Gamma}$, $f \in \mathcal{F}$ und $x \in f$. $\mathrm{pr} : N \to M$ sei definiert durch $\mathrm{pr} : [(\gamma, x)] \mapsto \gamma x$.

(6) *$\mathrm{pr}_* : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ ist surjektiv.*

Dann ist pr ein Homöomorphismus und $\tilde{F} = F$ ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf M.

Bemerkung. Aus den Bedingungen (1)–(5) folgt, daß $\psi : N \to M$ eine Überlagerung ist.

Bemerkung. Ist $\tilde{F}$ nichtzusammenhängend, so muß dem Satz eine zusätzliche Bedingung hinzugefügt werden, die für zusammenhängende $\tilde{F}$ immer erfüllt ist.

Wir werden diesen Satz in der folgenden Situation anwenden: $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^2$ sei die eindeutig bestimmte Hochhebung $\Gamma(p,q,r)^2$ der Dreiecksgruppe $\Gamma(p,q,r)$ in $SU(1,1)$. $M := \mathbb{S}$ ist eine zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand, auf der die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ durch Homöomorphismen eigentlich diskontinuierlich operiert. Wir betrachten eine (endliche) Teilmenge N von $\Gamma u \backslash \{u\}$, von der wir vermuten, daß $F_e = F_N = \mathbb{A}_+ \cap S_e \cap \bigcap_{x \in N} R_x$ gilt. Wir setzen $\tilde{F} := \Psi(F_N)$ und $F := \mathcal{F}_e$. Erfüllen sie die Voraussetzungen (1)–(6), so können wir den Satz anwenden und es folgt, daß $\mathcal{F}_e = F = \tilde{F} = \Psi(F_N)$ gilt.

Wir listen nun die Voraussetzungen auf und beschreiben etwas genauer, wie wir bei ihrer Überprüfung vorgehen werden.

(1) $\tilde{F}$ ist zusammenhängend: Es genügt zu zeigen, daß F_N zusammenhängend ist. In allen sechs in dieser Arbeit genauer betrachteten Fällen werden wir dies feststellen können.

(2) $\tilde{F}$ ist homöomorph zu einem kompakten Polytop in $\mathbb{R}^3$ mit homogenem dreidimensionalen Fahnenkomplex: Wir werden beweisen müssen, daß F_N ein kompaktes Polytop mit homogenem dreidimensionalen Fahnenkomplex ist. Dafür werden wir die Darstellung von F_N als eine endliche Vereinigung endlicher kompakter Durchschnitte affiner Halbräume soweit reduzieren, daß die Durchschnittsbildung mit $\mathbb{A}_+$ überflüssig wird.

(3) Es gibt eine kompakte Teilmenge F von M mit folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $F \subset \tilde{F}$: Die Bedingung ist erfüllt, denn es gilt $F_e \subset F_N$ und damit $F = \mathcal{F}_e = \Psi(F_e) \subset \Psi(F_N) = \tilde{F}$.
- Der Durchschnitt von γF° und δF ist leer für beliebige $\gamma, \delta \in \tilde{\Gamma}$ mit $\gamma \neq \delta$, die Mengen γF mit $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ überdecken M: Die Bedingung ist erfüllt, da $F = \mathcal{F}_e$ nach Satz III.17 ein Fundamentalbereich für die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $\mathbb{S}$ ist.
- Die Überdeckung $\{\gamma F\}_{\gamma \in \tilde{\Gamma}}$ von M ist lokal endlich: Dies folgt auch aus dem Satz III.17.

Die Voraussetzungen (4) und (5) werden mit kombinatorischen Mitteln überprüft. Es genügt, diese Bedingungen für F_N statt $\tilde{F} := \Psi(F_N)$ zu überprüfen, da der Homöomorphismus $\Psi|_{\partial_+ P}$ äquivariant ist.

(4) Man kann zeigen, daß zu jeder Seitenfläche f von F_N ein eindeutig bestimmtes $g \in \tilde{\Gamma}$ mit $f \subset E_g \cap E_e$ existiert, falls die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ keine parabolischen Elemente enthält. Wir definieren dann $\gamma_f := \bar{g} = g^{-1}$.

- Es gilt $\sigma(f,k) = (\gamma_f f, \gamma_f k)$ für jedes $(f,k) \in \mathcal{C}$: Für jede Seitenfläche f von F_N müssen wir berechnen, wie f unter γ_f abgebildet wird. Da die Multiplikation mit γ_f eine lineare Abbildung $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ ist, genügt es, die Bilder der Ecken von f auszurechnen. Es sei f eine Seitenfläche von F_N, die in $E_g \cap E_e$ enthalten ist. Eine Ecke von f stellen wir als Durchschnitt $E_e \cap E_g \cap E_{h_1} \cap E_{h_2}$ von vier Hyperebenen dar und erhalten dadurch eine Darstellung des Bildes dieser Ecke unter $\gamma_f = \bar{g}$ als
$$\bar{g}(E_e \cap E_g \cap E_{h_1} \cap E_{h_2}) = E_e \cap E_{\bar{g}} \cap E_{\bar{g}h_1} \cap E_{\bar{g}h_2}.$$
Damit kennen wir die Bilder aller Ecken von f. Sind diese Bilder wieder Ecken einer Seitenfläche f' von F_N in richtiger Reihenfolge, das heißt so, daß die Bilder der von einer Kante verbundenen Ecken wieder durch eine Kante verbunden sind, so bildet die Multiplikation mit $\gamma_f = \bar{g}$ die Seitenfläche f bijektiv auf die Seitenfläche f' ab und überführt dabei die Ecken und Kanten von f in die Ecken und Kanten von f'.
- Zu jeder Seite $f \in \mathcal{F}$ und jedem Punkt $x \in f^\circ$ gibt es eine Umgebung U von x mit $\gamma_f(U \cap \tilde{F}^\circ) \cap \tilde{F}^\circ = \varnothing$: Die Seitenfläche f sei in $E_g \cap E_e$ enthalten. Die durch Multiplikation mit $\gamma_f = \bar{g}$ gegebene Abbildung ist orientierungtreu und überführt die Seite f in die in $E_{\bar{g}} \cap E_e$ enthaltene Seite. Bei vorgegebener Orientierung des Kantenzuges der Seite f kann man an der von der Multiplikation mit $\bar{g}$ induzierten Orientierung der Bildseite sehen, daß es zu jedem $x \in f^\circ$ eine Umgebung U mit $\bar{g}(U \cap \tilde{F}^\circ) \cap \tilde{F}^\circ = \varnothing$ gibt.
- Es gilt $\gamma_{\gamma_f f} = \gamma_f^{-1}$ für jedes $f \in \mathcal{F}$: Die Seitenfläche f sei in E_g enthalten, dann gilt $\gamma_f = \bar{g}$. Da $\gamma_f f$ in $\bar{g}(E_g \cap E_e) = E_{\bar{g}} \cap E_e$ enthalten ist, folgt $\gamma_{\gamma_f f} = g = \gamma_f^{-1}$.
- $\tilde{\Gamma}$ ist erzeugt von $\{\gamma_f\}_{f \in \mathcal{F}}$: Es genügt, die erzeugenden Elemente $-r_u$ und $-r_v$ von $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,q,r)^2$ darzustellen. Der Deckel d des Fundamentalbereichs F_e ist in $E_{r_u^2} \cap E_e$ enthalten, damit gilt $-r_u = r_u^{p+1} = (\gamma_d)^{\frac{p+1}{2}}$. In allen sechs Fällen werden wir feststellen, daß es eine Seitenfläche f gibt, die in $E_{0,q-1,2k} \cap E_e$ enthalten ist. Damit gilt $\gamma_f = \bar{g}_{0,q-1,2k} = r_u^{p-2k} r_v$, das erzeugende Element $-r_v$ kann also als $-r_v = (-r_u)^{2k-p}\gamma_f$ dargestellt werden.

(5) Im Weiteren notieren wir die in $E_a \cap E_b \cap E_e$ enthaltene Kante der in $E_a \cap E_e$ enthaltenen Seitenfläche als (a,b). Diese Notation ist nicht eindeutig, die folgenden Aussagen gelten aber für alle solche Kanten und Seitenflächen, falls es mehrere gibt. Nachdem wir die Wirkung der Involution σ beschrieben haben, können wir für jedes Paar $(f,k) \in \mathcal{C}$ den Kantenzyklen, also die Folge der Paare $(f_i, k_i) := (\tau\sigma)^{i-1}(f,k)$ ausrechnen. Wir werden dabei feststellen, daß alle Kantenzyklen zu einem der drei folgenden Typen gehören:

$\aleph$. Der Zykel besteht aus drei konvexen Kanten, die nicht im Deckel oder Boden enthalten sind.

$\beth$. Der Zykel besteht aus drei Kanten, von denen zwei konvex und im Deckel bzw. Boden enthalten sind, die dritte Kante ist nicht konvex und nicht im Deckel bzw. Boden enthalten.

$\gimel$. Der Zykel besteht aus fünf konvexen Kanten, die nicht im Deckel oder Boden enthalten sind.

Wir wollen noch anmerken, daß die Zyklen vom Typ $\aleph$ und $\beth$ aus generischen Kanten und die Zyklen vom Typ $\gimel$ aus nicht generischen Kanten bestehen, wobei wir eine Kante *generisch* nennen, wenn sie in genau drei Fundamentalbereichen F_g enthalten ist.

Die Zyklen vom Typ $\aleph$ und $\beth$ sehen so aus:

$$(a,b) \xrightarrow{\sigma} (\bar{a}, \bar{a}b) \xrightarrow{\tau} (\bar{a}b, \bar{a}) \xrightarrow{\sigma} (\bar{b}a, \bar{b}) \xrightarrow{\tau} (\bar{b}, \bar{b}a) \xrightarrow{\sigma} (b,a) \xrightarrow{\tau} (a,b)$$

oder, in der Kurzschreibweise,

$$(a,b) \mapsto (\bar{a}b, \bar{a}) \mapsto (\bar{b}, \bar{b}a).$$

Damit gilt $\gamma_1 = a$, $\gamma_2 = a \cdot \bar{a}b = b$ und $\gamma_3 = b \cdot \bar{b} = e$. Für einen Zykel vom Typ $\aleph$ gilt für eine genügend kleine Umgebung U eines inneren Punktes der Kante (a,b)

$$\begin{aligned} F_N \cap U &= (I_a \cap I_b \cap E_e) \cap U, \\ \gamma_1 F_N \cap U &= a(I_{\bar{a}b} \cap I_{\bar{a}} \cap E_e) \cap U = (I_b \cap I_e \cap E_a) \cap U, \\ \gamma_2 F_N \cap U &= b(I_{\bar{b}} \cap I_{\bar{b}a} \cap E_e) \cap U = (I_e \cap I_a \cap E_b) \cap U. \end{aligned}$$

Damit sind

$$F_N \cap \gamma_1 F_N \cap U = (I_b \cap E_a \cap E_e) \cap U$$

und

$$F_N \cap \gamma_2 F_N \cap U = (I_a \cap E_b \cap E_e) \cap U$$

gleich den Durchschnitten der Umgebung U mit den in $E_a \cap E_e$ bzw. $E_b \cap E_e$ enthaltenen Seitenflächen. Ferner ist

$$\gamma_1 F_N \cap \gamma_2 F_N \cap U = (I_e \cap E_a \cap E_b) \cap U = a(I_{\bar{a}} \cap E_{\bar{a}b} \cap E_e) \cap U$$

gleich dem Bild der in $E_{\bar{a}b} \cap E_e$ enthaltenen Seitenfläche von F_N unter der Multiplikation mit $\gamma_1 = a$. Für einen Zykel vom Typ $\beth$ gilt für eine genügend kleine Umgebung U eines inneren Punktes der Kante (a,b)

$$\begin{aligned} F_N \cap U &= ((I_a \cup I_b) \cap E_e) \cap U, \\ \gamma_1 F_N \cap U &= a(H_{\bar{a}b} \cap I_{\bar{a}} \cap E_e) \cap U = (H_b \cap I_e \cap E_a) \cap U, \\ \gamma_2 F_N \cap U &= b(I_{\bar{b}} \cap H_{\bar{b}a} \cap E_e) \cap U = (I_e \cap H_a \cap E_b) \cap U. \end{aligned}$$

Damit sind

$$F_N \cap \gamma_1 F_N \cap U = (H_b \cap E_a \cap E_e) \cap U$$

und

$$F_N \cap \gamma_2 F_N \cap U = (H_a \cap E_b \cap E_e) \cap U$$

gleich den Durchschnitten der Umgebung U mit den in $E_a \cap E_e$ bzw. $E_b \cap E_e$ enthaltenen Seitenflächen. Ferner ist

$$\gamma_1 F_N \cap \gamma_2 F_N \cap U = (I_e \cap E_b \cap E_a) \cap U = a(I_{\bar{a}} \cap E_{\bar{a}b} \cap E_e) \cap U$$

gleich dem Bild der in $E_{\bar{a}b} \cap E_e$ enthaltenen Seitenfläche von F_N unter der Multiplikation mit $\gamma_1 = a$. Die Zyklen vom Typ $\gimel$ treten in den Fällen $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,r)^2$ mit $r \in \{3,5\}$ auf. In diesen Fällen gibt es Kanten, die als Durchschnitt von fünf Hyperebenen E_a, E_b, E_c, E_d und E_e mit $a,b,c,d \in \tilde{\Gamma}$ darstellbar sind. Die gegenseitige Lage dieser Hyperebenen wird in der folgenden Abbildung dargestellt:

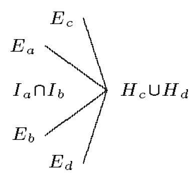


Abbildung 6. Hyperebenen durch eine ungenerische Kante (Schnittbild).

Der entsprechende Kantenzykel hat die folgende Gestalt:

$$(a,b) \mapsto (\bar{a}c, \bar{a}) \mapsto (\bar{c}d, \bar{c}a) \mapsto (\bar{d}b, \bar{d}c) \mapsto (\bar{b}, \bar{b}d).$$

Damit gilt $\gamma_1 = a$, $\gamma_2 = a \cdot \bar{a}c = c$, $\gamma_3 = c \cdot \bar{c}d = d$, $\gamma_4 = d \cdot \bar{d}b = b$ und $\gamma_5 = b \cdot \bar{b} = e$. Für eine genügend kleine Umgebung U eines inneren Punktes der Kante (a,b) gilt

$$\begin{aligned}
F_N \cap U &= (I_a \cap I_b \cap E_e) \cap U, \\
\gamma_1 F_N \cap U &= a(I_{\bar{a}c} \cap I_{\bar{a}} \cap E_e) \cap U = (I_c \cap I_e \cap E_a) \cap U, \\
\gamma_2 F_N \cap U &= c(I_{\bar{c}d} \cap I_{\bar{c}a} \cap E_e) \cap U = (I_d \cap I_a \cap E_c) \cap U, \\
\gamma_3 F_N \cap U &= d(I_{\bar{d}b} \cap I_{\bar{d}c} \cap E_e) \cap U = (I_b \cap I_c \cap E_d) \cap U, \\
\gamma_4 F_N \cap U &= b(I_{\bar{b}} \cap I_{\bar{b}d} \cap E_e) \cap U = (I_e \cap I_d \cap E_b) \cap U.
\end{aligned}$$

Damit sind

$$F_N \cap \gamma_1 F_N \cap U = (I_b \cap I_c \cap E_a \cap E_e) \cap U$$

und

$$F_N \cap \gamma_4 F_N \cap U = (I_a \cap I_d \cap E_b \cap E_e) \cap U$$

gleich den Durchschnitten der Umgebung U mit den in $E_a \cap E_e$ bzw. $E_b \cap E_e$ enthaltenen Seitenflächen. Ferner sind

$$F_N \cap \gamma_2 F_N \cap U = (I_a \cap I_b \cap I_d \cap E_c \cap E_e) \cap U$$

und

$$F_N \cap \gamma_3 F_N \cap U = (I_a \cap I_b \cap I_c \cap E_d \cap E_e) \cap U$$

gleich der Kante k.

(6) $\mathrm{pr}_* : \pi_1(N) \to \pi_1(\mathbb{S})$ ist surjektiv: $\mathbb{S}$ ist homöomorph zum offenen Volltorus, die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}) \cong \mathbb{Z}$ wird erzeugt von der Homotopieklasse der Schleife $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}$ mit $c(t) = (e^{it}, 0)$. In allen sechs in dieser Arbeit genauer betrachteten Fällen werden wir feststellen können, daß das Bild des Weges $I_n \to \mathbb{A}$ mit $t \mapsto (1 + ti, 0)$ in F_N enthalten ist. Unter Ψ geht dieser Weg in einen Weg $w : I_n \to \tilde{F}$ mit $w(t) = \frac{1}{1+t^2}(1 + it, 0)$ zwischen $(e^{-\pi i/n}, 0)$ und $(e^{\pi i/n}, 0)$ über. Damit erhalten wir für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ Wege $w_i : I_n \to N$ mit $w_i(t) := [r^i_{u,4\pi/n}, w(t)]$. Es gilt dabei

$$w_{i+1}(-\tan\frac{\pi}{n}) = [r^{i+1}_{u,4\pi/n}, (e^{-\pi i/n}, 0)] = [r^i_{u,4\pi/n}, (e^{\pi i/n}, 0)] = w_i(\tan\frac{\pi}{n}),$$

wir können also die Wege $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ zusammensetzen und erhalten eine Schleife in N, deren Bild unter pr (nach geeigneter Umparametrisierung) gleich c ist.

§15. Reduktion der Darstellung von F_N

In einigen Fällen werden wir mit Hilfe der Netzabschätzung die Gleichheit $F_e = F_{\mathcal{K}}$ zeigen können. In den anderen Fällen werden wir für eine (endliche) Teilmenge N von $\Gamma u \backslash \{u\}$ die Menge $\tilde{F}_e := F_N$ untersuchen, um mit Hilfe des kombinatorischen Kriteriums die Gleichheit $\tilde{F}_e = F_e$ zu beweisen. Um eine Beschreibung der kombinatorischen Struktur von $F_e = F_{\mathcal{K}}$ im ersten Fall und $\tilde{F}_e = F_N$ (und damit auch F_e, falls das kombinatorische Kriterium anwendbar ist) im zweiten Fall zu erhalten, muß die Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$ bzw. F_N vereinfacht (reduziert) werden. In diesem Abschnitt werden einige Methoden vorgestellt, die es ermöglichen, die Redundanz eines Halbraumes in der Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$ bzw. F_N zu beweisen.

Es sei g ein Element von $\mathrm{SU}(1,1)$, das nicht zu der Standgruppe von $0 \in \mathbb{D}$ gehört. Es gilt also $g = (a, b) \in \mathbb{S}$ mit $b \neq 0$. Es sei $a = a_1 + ia_2$.

Lemma 43.

(1) *Für $\omega \in \mathbb{R}$ und $z \in I_g(\omega)$ gilt*

$$|z| \geqslant \frac{1 - a_1 - \omega a_2}{|b|}.$$

(2) *Für $\varphi \in (0,\pi)$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $z \in (I_g \cap H_{gr_{2\varphi}})(\omega)$ gilt*

$$|z| \geqslant \frac{-(a_1 \sin\frac{\varphi}{2} + a_2 \cos\frac{\varphi}{2}) - \omega(-a_1 \cos\frac{\varphi}{2} + a_2 \sin\frac{\varphi}{2})}{|b|}.$$

(3) *Für $\varphi \in (0,\pi)$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $z \in (I_g \cap H_{gr_{-2\varphi}})(\omega)$ gilt*

$$|z| \geqslant \frac{-(a_1 \sin\frac{\varphi}{2} - a_2 \cos\frac{\varphi}{2}) - \omega(a_1 \cos\frac{\varphi}{2} + a_2 \sin\frac{\varphi}{2})}{|b|}.$$

Beweis.
(1) Es gilt

$$\begin{aligned} z \in I_g(\omega) &\Longleftrightarrow (1,\omega,z_1,z_2) \in I_g \Longleftrightarrow a_1 + \omega a_2 - z_1 b_1 - z_2 b_2 \geqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow 1 - a_1 - \omega a_2 \leqslant -(z_1 b_1 + z_2 b_2) \leqslant |z| \cdot |b|. \end{aligned}$$

(2),(3) Es gilt $gr_{2\varphi} = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{smallmatrix}\right)$ mit

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi, \quad & a_2' &= a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi, \\ b_1' &= b_1 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi, \quad & b_2' &= -b_1 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} z \in H_{gr_{2\varphi}}(\omega) &\Longleftrightarrow (1,\omega,z_1,z_2) \in H_{gr_{2\varphi}} \Longleftrightarrow a_1' + \omega a_2' - z_1 b_1' - z_2 b_2' \leqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow -a_1' - \omega a_2' + z_1 b_1' + z_2 b_2' \geqslant -1. \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen

$$a_1 + \omega a_2 - z_1 b_1 - z_2 b_2 \geqslant 1 \quad \text{und} \quad -a_1' - \omega a_2' + z_1 b_1' + z_2 b_2' \geqslant -1$$

folgt durch Addition

$$(a_1 - a_1') + \omega(a_2 - a_2') - z_1(b_1 - b_1') - z_2(b_2 - b_2') \geqslant 0$$

und damit

$$-(a_1 - a_1') - \omega(a_2 - a_2') \leqslant -z_1(b_1 - b_1') - z_2(b_2 - b_2') \leqslant |z| \cdot \sqrt{(b_1 - b_1')^2 + (b_2 - b_2')^2}.$$

Dabei gilt

$$\sqrt{(b_1 - b_1')^2 + (b_2 - b_2')^2} = 2 \cdot |\sin\frac{\varphi}{2}| \cdot |b| \neq 0,$$

also

$$|z| \geqslant \frac{-(a_1 - a_1') - \omega(a_2 - a_2')}{\sqrt{(b_1 - b_1')^2 + (b_2 - b_2')^2}} \geqslant \frac{-(a_1 - a_1') - \omega(a_2 - a_2')}{2 \cdot |\sin\frac{\varphi}{2}| \cdot |b|}.$$

Es gilt ferner

$$a_1 - a_1' = a_1(1 - \cos\varphi) + a_2 \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}(a_1 \sin\frac{\varphi}{2} + a_2 \cos\frac{\varphi}{2}).$$

und (analog)

$$a_2 - a_2' = 2\sin\frac{\varphi}{2}(-a_1 \cos\frac{\varphi}{2} + a_2 \sin\frac{\varphi}{2}). \ \blacksquare$$

Die folgende Proposition erweist sich im Beweis des nächsten Satzes als sehr nützlich.

Proposition 44. *Ist die Funktion f linear und die Funktion g konvex, so gilt für $a, b \in \mathbb{R}$*

$$f(\omega) \geqslant g(\omega) \quad \textit{für alle } \omega \in [a,b] \iff f(\omega) \geqslant g(\omega) \quad \textit{für alle } \omega \in \partial[a,b] = \{a,b\}. \ \blacksquare$$

Lemma 45. *Die Funktionen $\omega \mapsto \sqrt{1+\omega^2}$ und $\omega \mapsto \ell_{\mathcal{K}}^-(\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2}$ sind konvex.*

Beweis. Es gilt $\big(\sqrt{1+\omega^2}\big)'' = \big(1+\omega^2\big)^{-3/2}$, also ist die erste Funktion konvex. Es gilt

$$\ell_{\mathcal{K}}^-(\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2} = \frac{1}{W} \cdot \left((\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r})\sqrt{1+\omega^2} - \sin\frac{\pi}{p}\sqrt{1-(1+\omega^2)\cos^2\frac{\pi}{q}} \right)$$

und folglich

$$(\ell_{\mathcal{K}}^-(\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2})'' = \frac{1}{W} \cdot \left(\frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r}}{(1+\omega^2)^{3/2}} + \frac{\sin\frac{\pi}{p}\sin^2\frac{\pi}{q}\cos^2\frac{\pi}{q}}{\big(1-(1+\omega^2)\cos^2\frac{\pi}{q}\big)^{3/2}} \right)$$

mit $W = \cos^2\frac{\pi}{p} + \cos^2\frac{\pi}{q} + \cos^2\frac{\pi}{r} + 2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} - 1$, also ist auch die zweite Funktion konvex. ∎

Satz 46. *Es sei $\varphi \in (0,\pi)$. Ist $1 - a_1 \pm a_2 \tan\frac{\pi}{n}$,*

$$-(a_1\sin\frac{\varphi}{2} + a_2\cos\frac{\varphi}{2}) \pm \tan\frac{\pi}{n}(-a_1\cos\frac{\varphi}{2} + a_2\sin\frac{\varphi}{2})$$

bzw.

$$-(a_1\sin\frac{\varphi}{2} - a_2\cos\frac{\varphi}{2}) \pm \tan\frac{\pi}{n}(a_1\cos\frac{\varphi}{2} + a_2\sin\frac{\varphi}{2})$$

größer oder gleich $|b|/\cos\frac{\pi}{n}$, so ist der Schnitt von I_g, $I_g \cap H_{gr_{2\varphi}}$ bzw. $I_g \cap H_{gr_{-2\varphi}}$ mit $(S_e)_+ = S_e \cap \mathbb{A}_+$ leer. Es sei $n \geqslant q$. Ist $1 - a_1 \pm a_2 \tan\frac{\pi}{n}$,

$$-(a_1\sin\frac{\varphi}{2} + a_2\cos\frac{\varphi}{2}) \pm \tan\frac{\pi}{n}(-a_1\cos\frac{\varphi}{2} + a_2\sin\frac{\varphi}{2})$$

bzw.

$$-(a_1\sin\frac{\varphi}{2} - a_2\cos\frac{\varphi}{2}) \pm \tan\frac{\pi}{n}(a_1\cos\frac{\varphi}{2} + a_2\sin\frac{\varphi}{2})$$

größer oder gleich $|b| \cdot \ell_{\mathcal{K}}^-/\cos\frac{\pi}{n}$, so ist der Schnitt von I_g, $I_g \cap H_{gr_{2\varphi}}$ bzw. $I_g \cap H_{gr_{-2\varphi}}$ mit $U_{\mathcal{K}}$ und folglich auch mit $F_{\mathcal{K}} \subset U_{\mathcal{K}}$ leer.

Beweis. Nach Lemma 43, Proposition 35 und wegen $n \geqslant q \Rightarrow \tan\frac{\pi}{n} \leqslant \tan\frac{\pi}{q}$ genügt es, die Ungleichung $f(\omega) \geqslant g(\omega)$ für alle $\omega \in I_n$ mit

$$f(\omega) = \frac{1 - a_1 - \omega a_2}{|b|} \quad \text{bzw.} \quad f(\omega) = \frac{-(a_1\sin\frac{\varphi}{2} \pm a_2\cos\frac{\varphi}{2}) - \omega(\mp a_1\cos\frac{\varphi}{2} + a_2\sin\frac{\varphi}{2})}{|b|}$$

und $g(\omega) = \sqrt{1+\omega^2}$ bzw. $g(\omega) = \ell_{\mathcal{K}}^-(\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2}$ zu zeigen. Dabei ist die Funktion $f(\omega)$ linear und die Funktion $g(\omega)$ nach Lemma 45 konvex, also folgt die Behauptung mit Hilfe der Proposition 44 und mit $\big(1+\tan^2(\pi/n)\big)^{1/2} = \frac{1}{\cos(\pi/n)}$. ∎

Wir könnten jetzt die Reduktionskriterien explizit für Gruppenelemente $g_{m,l,k}$ und $\tilde{g}_{m,l,k}$ formulieren. Es ist aber im allgemeinen einfacher, den Beweis des letzten Satzes als Prototyp zu benutzen und direkt mit den Ungleichungen der Halbräume zu argumentieren, als die Kriterien in allgemeiner Form herzuleiten und dann konkrete Werte in diese komplizierten Ausdrücke einzusetzen.

Kapitel VI

Die Fälle $\Gamma(p,3,3)^2$

Не менее важно использовать одинаковые детали или даже целые узлы в различных машинах. Скажем, для ряда близких по конструкции металлорежущих станков применить одинаковые коробки передач, ходовые винты, зажимы, штурвалы, рукоятки и т. п. Такие узлы и детали называются унифицированными.

Энциклопедический словарь юного техника

Gegeben sei eine ungerade natürliche Zahl $p \geqslant 5$. Für die Konstruktion des Fundamentalbereichs von $\tilde{\Gamma} := \Gamma(p,3,3)^2$ sei der Fixpunkt $u = 0$ von Γ der Ordnung p gewählt. Wir werden in allen drei Fällen $p = 5, 7, 9$ zeigen können, daß $F_e = F_{\mathcal{K}}$ gilt. Dafür werden wir $F_{\mathcal{K}}$ als $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ darstellen, wobei $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ ein kompaktes Polytop in $\mathbb{A}$ ist, das sogar in $\mathbb{A}_+$ enthalten ist, wie wir dann mit Hilfe der Proposition V.38 zeigen werden. Damit gilt $F_{\mathcal{K}} = \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ und wir erhalten eine Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$ als kompaktes Polytop in $\mathbb{A}_+$. In den Fällen $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,3)^2$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(9,3,3)^2$ werden wir den Satz V.41 benutzen können, um $F_e = F_{\mathcal{K}}$ zu zeigen und damit eine Darstellung von F_e als kompaktes Polytop in $\mathbb{A}_+$ zu erhalten. Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$ wenden wir auf die Menge $\tilde{F} := \Psi(F_{\mathcal{K}})$ den Satz V.42 an, um $\mathcal{F}_e = \tilde{F}$ und $F_e = F_{\mathcal{K}}$ zu beweisen.

§16. Spezialisierung der bisherigen Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die bisherigen Ergebnisse für den Spezielfall $q = r = 3$ zusammenfassend dargestellt und, wenn möglich, vereinfacht. Es gilt $\mathcal{E} = \mathcal{K}$ und

$$\begin{aligned}
C &= \cosh \ell_v = \cosh \ell_w = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}, \\
S &= \sinh \ell_v = \sinh \ell_w = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2p} - 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}{\sin\frac{\pi}{2p}}, \\
R_{\mathcal{K}} &= \tanh \ell_v = \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}{\cos\frac{\pi}{2p}}, \\
B &= \sinh \ell_v \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2p} - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}{\sin\frac{\pi}{2p}}, \\
A &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2p}}.
\end{aligned}$$

Proposition 47. *Es gilt*

$$\ell_{\mathcal{K}}^- = \frac{\cos\frac{\pi}{2p} - \sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n} - 1}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}.$$

Beweis. Nach Satz V.36 mit Hilfe der Formeln für $\operatorname{ctgh} \ell_v$ und $\sinh \ell_v$ aus dem Anhang folgt

$$\ell_{\mathcal{K}}^- = \operatorname{ctgh} \ell_v - \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{3}}}{\sinh \ell_v \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2p} - \sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n} - 1}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}. \blacksquare$$

Um den Satz V.41 anwenden zu können, benötigen wir ein $R \geqslant R_{\mathcal{K}}$ mit $\Gamma u \backslash (\mathcal{K} \cup \{0\}) \subset K_R = \{x \in \mathbb{D} : |x| \geqslant R\}$.

Proposition 48. *Für*

$$R := \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{p}}}{\cos\frac{\pi}{p}\sqrt{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2p}}{\cos\frac{\pi}{p}}\cdot\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}.$$

gilt $R > R_{\mathcal{K}}$ *und* $\Gamma u\backslash(\mathcal{E}\cup\{0\}) \subset K_R$.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{2p}}{\cos\frac{\pi}{p}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{2p}}{2\cos^2\frac{\pi}{2p}-1} \geqslant \frac{\cos^2\frac{\pi}{2p}}{2\cos^2\frac{\pi}{2p}} = \frac{1}{2} > 1$$

und damit

$$R > \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}}{\cos\frac{\pi}{2p}} = R_{\mathcal{K}}.$$

In [KNRS, Lemma 11.2] ist gezeigt, daß $\rho(0,x) \geqslant 2\ell_v + \ell_{vw}$ und damit

$$\cosh\rho(0,x) \geqslant \cosh(2\ell_v + \ell_{vw})$$

für jedes $x \in \Gamma u\backslash(\mathcal{E}\cup\{0\})$ gilt. Nach der Formel [KNRS, (11.6)] gilt

$$\cosh(2\ell_v + \ell_{vw}) = \frac{4\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos\frac{\pi}{p}-1}{1-\cos\frac{\pi}{p}}.$$

Daraus folgt (siehe Anhang)

$$\begin{aligned}|x| &= \sqrt{\frac{\cosh\rho(0,x)-1}{\cosh\rho(0,x)+1}} \geqslant \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos\frac{\pi}{p}-1}{2\cos^2\frac{\pi}{p}}}\\ &= \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{p}}}{\cos\frac{\pi}{p}\sqrt{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2p}}{\cos\frac{\pi}{p}}\cdot\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}. \blacksquare\end{aligned}$$

Damit läßt sich der Satz V.41 wie folgt spezialisieren:

Satz 49. *Für eine ungerade natürliche Zahl* $p \geqslant 7$ *und* $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^2$ *gilt* $F_\Gamma = F_{\mathcal{K}}$.

Beweis. Wir wenden den Satz V.41 für den in der Proposition 48 definierten Radius R an. Es gilt

$$2\cos^2\frac{\pi}{p}(1-R^2) = 2\cos^2\frac{\pi}{p} - (2\cos\frac{\pi}{p}-1)(1+\cos\frac{\pi}{p}) = 1-\cos\frac{\pi}{p} = 2\sin^2\frac{\pi}{2p}$$

und damit

$$\mathcal{M}_R = \frac{1}{R}(1-\sqrt{1-R^2}) = \frac{\cos\frac{\pi}{p}-\sin\frac{\pi}{2p}}{\cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}}.$$

Nach Proposition 47 gilt

$$\ell_{\mathcal{K}}^- = \frac{\cos\frac{\pi}{2p}-\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n}-1}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R - \ell_{\mathcal{K}}^- &= \frac{\cos\frac{\pi}{p}-\sin\frac{\pi}{2p}-\cos^2\frac{\pi}{2p}+\sin\frac{\pi}{2p}\cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n}-1}}{\cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}}\\ &= \frac{\tan\frac{\pi}{2p}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p}-1}}\left(\cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n}-1}-\sin\frac{\pi}{2p}-1\right).\end{aligned}$$

Damit genügt es, für alle natürlichen Zahlen $p \geqslant 7$ die Ungleichung $f(p) \geqslant 1$ für

$$f(p) := \cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p} - 1} - \sin\frac{\pi}{2p}$$

zu zeigen. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend und es gilt

$$f(6) = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \geqslant 1,$$

also gilt $f(p) \geqslant 1$ für alle $p \geqslant 6$. [Es gilt allerdings $f(5) = \frac{\sqrt{5+3\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < 1$.] ∎

Die Netzabschätzungen können zur Herleitung einer endlicher Darstellung des Fundamentalbereichs für andere Familien diskreter Untergruppen von $\mathrm{SU}(1,1)$ nützlich sein, insbesondere in den Fällen $q, r \leqslant 3$, in denen die Eckenkorona $\mathcal{E}$ mit der Kantenkorona $\mathcal{K}$ übereinstimmt. Für den Fall $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma(p,3,2))$ werden ähnliche Überlegungen in der Dissertation [Fi, Kapitel 6] von Thomas Fischer angestellt. Der Fall $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma(p,3,3))$ wird im folgenden Satz untersucht

Satz 50. *Für eine natürliche Zahl $p \geqslant 4$ und $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma(p,3,3))$ gilt $F_\Gamma = F_{\mathcal{K}}$.*

Beweis. Wie im Beweis des Satzes 49 genügt es, für alle natürlichen Zahlen $p \geqslant 4$ die Ungleichung $f(p) \geqslant 1$ für

$$f(p) := \cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n} - 1} - \sin\frac{\pi}{2p} = \cos\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2p} - 1} - \sin\frac{\pi}{2p}$$

zu zeigen. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend und es gilt

$$f(4) = \frac{1+\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} > 1,$$

also gilt $f(p) \geqslant 1$ für alle $p \geqslant 4$. ∎

§17. Reduktion der Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$

Proposition 51. *Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$ gilt $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ mit*

$$\tilde{F}_{\mathcal{K}} = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{4} \left((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m}) \cap (I_{m,2,1-m} \cup I_{m,2,3-m})\right).$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,3)^2$ gilt $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ mit

$$\tilde{F}_{\mathcal{K}} = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{6} \left((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m} \cup I_{m,1,6-m}) \cap (I_{m,2,8-m} \cup I_{m,2,10-m} \cup I_{m,2,12-m})\right).$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(9,3,3)^2$ gilt $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ mit

$$\tilde{F}_{\mathcal{K}} = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{8} \left((I_{m,1,4-m} \cup I_{m,1,6-m}) \cap (I_{m,2,3-m} \cup I_{m,2,5-m})\right).$$

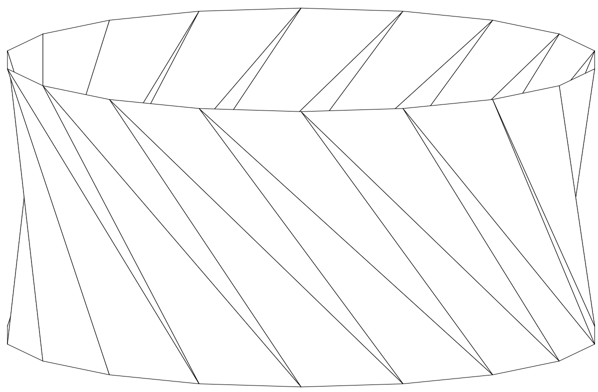


ABBILDUNG 7. Menge $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(9,3,3)^2$.

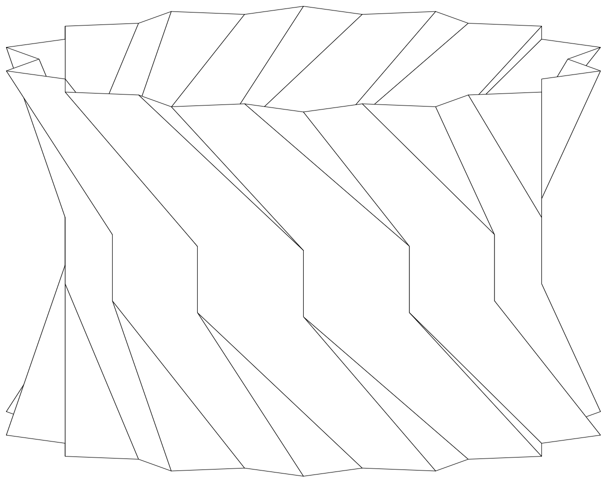


ABBILDUNG 8. Mengen $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,3)^2$.

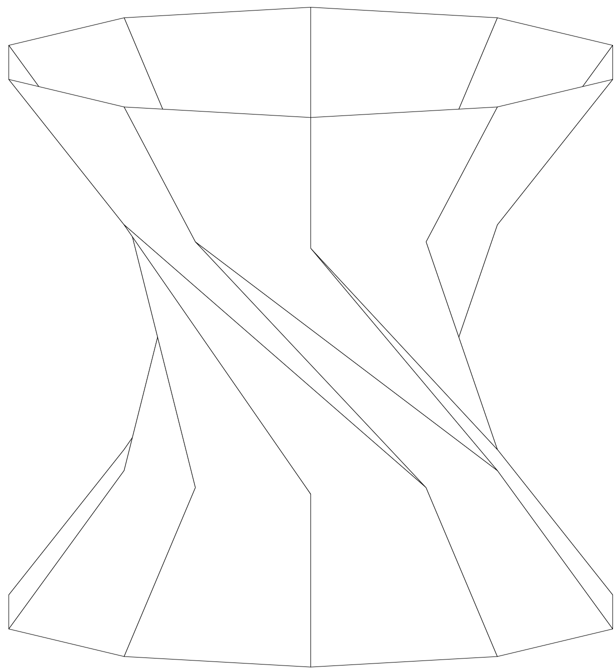


Abbildung 9. Mengen $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$.

BEWEIS.
(1) $(I_{1,0}\cap H_{1,2})\cap U_{\mathcal{K}} = (I_{1,1}\cap H_{1,p-1})\cap U_{\mathcal{K}} = \varnothing$: Nach Proposition III.31 gilt

$$z\in I_{1,0}(\omega) \Longleftrightarrow -z_2 \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin\frac{\pi}{2p}+\omega\cos\frac{\pi}{2p})+1),$$
$$z\in H_{1,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1\sin\frac{2\pi}{p}+z_2\cos\frac{2\pi}{p} \geqslant \frac{1}{B}(A(\sin\frac{3\pi}{2p}-\omega\cos\frac{3\pi}{2p})-1).$$

Die Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$z_1\sin\frac{2\pi}{p}+z_2(\cos\frac{2\pi}{p}-1)\geqslant \frac{A}{B}\cdot\left((\sin\frac{\pi}{2p}+\sin\frac{3\pi}{2p})+\omega(\cos\frac{\pi}{2p}-\cos\frac{3\pi}{2p})\right)$$

für $z\in(I_{1,0}\cap H_{1,2})(\omega)$. Wegen

$$z_1\sin\frac{2\pi}{p}+z_2(\cos\frac{2\pi}{p}-1) = 2\sin\frac{\pi}{p}(z_1\cos\frac{\pi}{p}-z_2\sin\frac{\pi}{p})\leqslant 2\sin\frac{\pi}{p}\cdot|z|$$

(unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung) und

$$(\sin\frac{\pi}{2p}+\sin\frac{3\pi}{2p})+\omega(\cos\frac{\pi}{2p}-\cos\frac{3\pi}{2p}) = 2\sin\frac{\pi}{p}\cdot(\cos\frac{\pi}{2p}+\omega\sin\frac{\pi}{2p})$$

folgt $|z|\geqslant\frac{A}{B}\cdot(\cos\frac{\pi}{2p}+\omega\sin\frac{\pi}{2p})$ für $z\in(I_{1,0}\cap H_{1,2})(\omega)$. Nach Proposition V.38 genügt es, die Ungleichung

$$\frac{A}{B}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2p}+\omega\sin\frac{\pi}{2p}\right)\geqslant \ell_{\mathcal{K}}^-(\omega)\cdot\sqrt{1+\omega^2}$$

für alle $\omega\in I_n$ zu zeigen. Mit Hilfe der Proposition V.44 und Lemma V.45 sieht man, daß es ausreicht, diese Ungleichung für $\omega=\pm\tan\frac{\pi}{n}$, also

$$\cos\frac{\pi}{2p}\pm\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2p}\geqslant\frac{B\cdot\ell_{\mathcal{K}}^-}{A\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2p}-\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n}-1}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

zu zeigen, was äquivalent ist zu der Ungleichung

$$\cos\frac{\pi}{2p}-\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n}-1}\leqslant\cos\frac{\pi}{n}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2p}\pm\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2p}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{n}\pm\frac{\pi}{2p}\right).$$

Dabei gilt $n=p$ und

$$\cos\left(\frac{\pi}{p}-\frac{\pi}{2p}\right)=\cos\frac{\pi}{2p}>\cos\frac{3\pi}{2p}=\cos\left(\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{2p}\right),$$

es genügt also,

$$\cos\frac{3\pi}{2p}\geqslant\cos\frac{\pi}{2p}-\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p}-1}$$

zu zeigen. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{3\pi}{2p}\geqslant\cos\frac{\pi}{2p}-\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p}-1}\\
\Longleftrightarrow{}&\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p}-1}\geqslant 2\sin\frac{\pi}{2p}\sin\frac{\pi}{p}\\
\Longleftrightarrow{}&\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p}-1}\geqslant 2\sin\frac{\pi}{p}\Longleftrightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{p}-1\geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{p}\\
\Longleftrightarrow{}&4\cos\frac{2\pi}{p}\geqslant 1\Longleftrightarrow\cos\frac{2\pi}{p}\geqslant\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Aus $p\geqslant 5$ folgt $2\pi/p\leqslant 2\pi/5$ und damit $\cos(2\pi/p)\geqslant\cos(2\pi/5)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}>\frac{1}{4}$. Daraus folgt weiterhin $(I_{1,1}\cap H_{1,p-1})\cap U_{\mathcal{K}} = (\rho')^{-1}\eta((I_{1,0}\cap H_{1,2})\cap U_{\mathcal{K}})=\varnothing$.

(2) $I_{1,p+3} \cap U_{\mathcal{K}} = \cdots = I_{1,2p-2} \cap U_{\mathcal{K}} = \varnothing$: Es sei $k \in \{p+3, p+5, \ldots, 2p-4, 2p-2\}$. Nach Proposition III.31 folgt unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|z| \geqslant -z_1 \sin\frac{\pi k}{p} - z_2 \cos\frac{\pi k}{p} \geqslant \frac{1}{B} \cdot (-A(\sin\delta - \omega\cos\delta) + 1)$$

für alle $z \in I_{1,k}(\omega)$, wobei $\delta = (2k-1)\pi/2p$ gilt. Nach Proposition V.38 genügt es, die Ungleichung

$$\frac{1}{B} \cdot (-A(\sin\delta - \omega\cos\delta) + 1) \geqslant \ell_{\mathcal{K}}^{-}(\omega) \cdot \sqrt{1+\omega^2}$$

für alle $\omega \in I_n$ zu zeigen. Mit Hilfe der Proposition V.44 und Lemma V.45 sieht man, daß es ausreicht, diese Ungleichung für $\omega = \pm\tan\frac{\pi}{n}$, also

$$-A(\sin\delta \pm \tan\frac{\pi}{n}\cos\delta) + 1 \geqslant \frac{B \cdot \ell_{\mathcal{K}}^{-}}{\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2p} - \sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n} - 1}}{2\sin\frac{\pi}{2p}\cos\frac{\pi}{n}}$$

zu zeigen, was äquivalent zu der Ungleichung

$$\sin\frac{\pi}{2p}\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{n} - 1} - \cos\frac{\pi}{2p} \geqslant \cos\frac{\pi}{n}(\sin\delta \pm \tan\frac{\pi}{n}\cos\delta) - 2\sin\frac{\pi}{2p}\cos\frac{\pi}{n}$$

und mit $\delta = (2k-1)\pi/2p$ und $n = p$ zu der Ungleichung

$$\sin\frac{(2k-1\pm 2)\pi}{2p} \leqslant \sin\frac{\pi}{2p}\left(2\cos\frac{\pi}{p} + \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p} - 1}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}$$

ist. Es genügt also zu zeigen, daß

$$\sin\frac{(2p+3)\pi}{2p}, \sin\frac{(2p+7)\pi}{2p}, \ldots, \sin\frac{(4p-7)\pi}{2p}, \sin\frac{(4p-3)\pi}{2p}$$

kleiner oder gleich

$$\sin\frac{\pi}{2p}\left(2\cos\frac{\pi}{p} + \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p} - 1}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}$$

sind. Dabei gilt

$$\sin\frac{(2p+3)\pi}{2p} = \sin\frac{(4p-3)\pi}{2p} = -\sin\frac{3\pi}{2p},$$

$$\sin\frac{(2p+7)\pi}{2p} = \sin\frac{(4p-7)\pi}{2p} = -\sin\frac{7\pi}{2p} < -\sin\frac{3\pi}{2p}$$

und so weiter, es genügt also

$$-\sin\frac{3\pi}{2p} \leqslant \sin\frac{\pi}{2p}\left(2\cos\frac{\pi}{p} + \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p} - 1}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}$$

zu zeigen, was äquivalent zu

$$f(p) := \sin\frac{\pi}{2p}\left(2\cos\frac{\pi}{p} + \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{p} - 1}\right) + \sin\frac{3\pi}{2p} - \cos\frac{\pi}{2p} \geqslant 0$$

ist. Man rechnet nach, daß $f(5) > 0{,}75$, $f(7) > 0{,}38$ und $f(9) > 0{,}11$ gilt.
(3) Die Mengen

$$I_{1,1} \cap H_{1,-1}, I_{1,3}, \ldots, I_{1,p-2}, I_{1,p} \cap H_{1,p+2}$$

schneiden also $U_{\mathcal{K}}$ und folglich auch $F_{\mathcal{K}} \subset U_{\mathcal{K}}$ nicht. Durch die Betrachtung ihrer Bilder unter ρ' sehen wir, daß auch die Mengen

$$I_{2,0} \cap H_{2,-2}, I_{2,2}, \ldots, I_{2,p-3}, I_{2,p-1} \cap H_{2,p+1}$$

die Menge $\rho'(U_{\mathcal{K}}) = U_{\mathcal{K}}$ und damit auch $F_{\mathcal{K}}$ nicht schneiden. Durch die Betrachtung der Bilder von ρ^m für $m \in \mathbb{Z}$ sehen wir, daß auch

$$I_{m,1,1-m} \cap H_{m,1,-1-m},\, I_{m,1,3-m}, \dots, I_{m,1,p-2-m},\, I_{m,1,p-m} \cap H_{m,1,p+2-m}$$

und

$$I_{m,2,-m} \cap H_{m,2,-2-m},\, I_{m,2,2-m}, \dots, I_{m,2,p-3-m},\, I_{m,2,p-1-m} \cap H_{m,2,p+1-m}$$

leeren Schnitt mit $\rho^m(U_{\mathcal{K}}) = U_{\mathcal{K}}$ und damit auch mit $F_{\mathcal{K}}$ haben. Damit können nur die Mengen

$$I_{m,1,2-m}, \dots, I_{m,1,p-1-m} \quad \text{und} \quad I_{m,2,1-m}, \dots, I_{m,2,p-2-m}$$

mit $m = 0, \dots, p-1$ zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ beitragen. Es gilt also $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ mit

$$\tilde{F}_{\mathcal{K}} = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{p-1} \left((I_{m,1,2-m} \cup \dots \cup I_{m,1,(p-1)-m}) \cap (I_{m,2,1-m} \cup \dots \cup I_{m,2,(p-2)-m}) \right).$$

In den Fällen $p = 5$ und $p = 7$ ist es bereits die gewünschte Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$. Im Falle $p = 9$ werden wir allerdings zeigen können, daß die Mengen $I_{m,1,2-m}$, $I_{m,1,8-m}$, $I_{m,2,1-m}$ und $I_{m,2,7-m}$ in dieser Darstellung von $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ überflüssig sind.

(4) $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap F_e \subset H_{2,10} \cap H_{2,12} \cap H_{2,14} \cap H_{2,16}$ für $p = 9$: Zuerst berechnen wir, wie in Proposition III.31 angegeben, die Ungleichungen aller im Beweis auftretender Halbräume.

$$z \in H_{1,6}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{\pi}{3} - z_2 \cos\frac{\pi}{3} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(\cos\frac{\pi}{9} + \omega \sin\frac{\pi}{9}) - 1\right) \tag{1}$$

$$z \in I_{1,8}(\omega) \iff -z_1 \sin\frac{\pi}{9} + z_2 \cos\frac{\pi}{9} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(-\sin\frac{\pi}{6} - \omega \cos\frac{\pi}{6}) + 1\right) \tag{2}$$

$$z \in H_{2,12}(\omega) \iff z_1 \cos\frac{\pi}{6} + z_2 \sin\frac{\pi}{6} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(\cos\frac{\pi}{9} - \omega \sin\frac{\pi}{9}) - 1\right) \tag{3}$$

$$z \in H_{2,14}(\omega) \iff z_1 \cos\frac{\pi}{18} - z_2 \sin\frac{\pi}{18} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(\cos\frac{\pi}{9} + \omega \sin\frac{\pi}{9}) - 1\right) \tag{4}$$

$$z \in H_{2,10}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{\pi}{9} + z_2 \cos\frac{\pi}{9} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(\sin\frac{\pi}{6} - \omega \cos\frac{\pi}{6}) - 1\right) \tag{5}$$

$$z \in I_{2,16}(\omega) \iff -z_1 \sin\frac{2\pi}{9} + z_2 \cos\frac{2\pi}{9} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(-\sin\frac{\pi}{6} - \omega \cos\frac{\pi}{6}) + 1\right) \tag{6}$$

$$z \in I_{1,12}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{\pi}{3} + z_2 \cos\frac{\pi}{3} \geqslant \frac{1}{B}\left(A(\cos\frac{2\pi}{9} - \omega \sin\frac{2\pi}{9}) + 1\right) \tag{7}$$

Nun zum eigentlichen Beweis:

(a) $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap S_e \subset H_{2,12}$: Die Addition der mit $\cos\frac{\pi}{18}$ multiplizierten Ungleichung (1) mit der mit $\cos\frac{\pi}{6}$ multiplizierten Ungleichung (2) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{2\pi}{9}$ liefert

$$\begin{aligned} z \in (H_{1,6} \cap I_{1,8})(\omega) \Longrightarrow{}& z_1 \cos\frac{\pi}{6} + z_2 \sin\frac{\pi}{6} \geqslant \\ \geqslant{}& \frac{1}{D}\left((\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{18}) + A(\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}) + A\omega(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} - \cos^2\frac{\pi}{6})\right) \end{aligned}$$

mit $D = B\sin\frac{2\pi}{9}$. Zur Berechnung der Multiplikatoren siehe Erklärungen im Anhang. Durch Vergleich der letzten Ungleichung mit der Ungleichung (3) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in I_9$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned} f(\omega) := &\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{18} + \sin\frac{2\pi}{9}\right) + A\left(\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \\ &+ A\omega\left(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} - \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Formeln (siehe Anhang) und unter Benutzung der Definition von A berechnen wir

$$\begin{aligned} f(\omega) = &\left(\cos\frac{\pi}{6} - (\cos\frac{\pi}{18} - \cos\frac{5\pi}{18})\right) + A\left(\cos\frac{\pi}{9}(\cos\frac{\pi}{18} - \cos\frac{5\pi}{18}) - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right) \\ &+ A\omega\left(\sin\frac{\pi}{9}(\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{5\pi}{18}) - \cos^2\frac{\pi}{6}\right) \\ = &\left(\cos\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{6}\right) + A\left(2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right) \\ &+ A\omega\left(2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{6}\right) \\ = &\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{9}\right) + A\left(\sin\frac{\pi}{6} + \omega\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\sin\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{6}\right) \\ =&2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} - 2A\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{2\pi}{9}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \omega\cos\frac{\pi}{6}\right) \\ =&2\sin\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}(\sin\frac{\pi}{6} + \omega\cos\frac{\pi}{6})\right) \\ =&2\sin\frac{\pi}{9}\left((\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{9}) - \omega\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist monoton fallend, es reicht also aus, $f(\tan\frac{\pi}{9}) \geqslant 0$ zu zeigen. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned} f(\tan\frac{\pi}{9}) &= 2\sin\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sin\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{18}\right) = 0. \end{aligned}$$

(b) $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap S_e \subset H_{2,14}$: Die Addition der mit $\cos\frac{\pi}{6}$ multiplizierten Ungleichung (1) mit der mit $\sin\frac{\pi}{9}$ multiplizierten Ungleichung (2) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{2\pi}{9}$ liefert

$$\begin{aligned} &z \in (H_{1,6} \cap I_{1,8})(\omega) \Longrightarrow z_1\cos\frac{\pi}{18} - z_2\sin\frac{\pi}{18} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{D}\left((\sin\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{6}) + A(\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{6}) + A\omega(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6})\right) \\ &= \frac{1}{D}\left(A\sin\frac{2\pi}{9} - 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{1}{B\cos\frac{\pi}{9}}\left(A\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{2\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

mit $D = B\sin\frac{2\pi}{9}$. Durch Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (4) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in I_9$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned} f(\omega) := &\left(\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{2\pi}{9}\right) + A\cos\frac{\pi}{9}\left(1 - \cos\frac{\pi}{9}\right) - A\omega\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} \\ = &\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \omega\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist monoton fallend, es reicht also aus, $f(\tan\frac{\pi}{9}) \geqslant 0$ zu zeigen. Dazu berechnet man

$$f(\tan\frac{\pi}{9}) = \sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} = \sin\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{18} = 0.$$

(c) $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap S_e \subset H_{2,10}$: Die Addition der Ungleichung (1) mit der mit $\cos\frac{\pi}{18}/\sin\frac{2\pi}{9}$ multiplizierten Ungleichung (2) liefert, daß für alle $z \in (H_{1,6} \cap I_{1,8})(\omega)$ gilt

$$z_1 \sin\frac{\pi}{9} + z_2 \cos\frac{\pi}{9} \geqslant \frac{1}{B\sin\frac{2\pi}{9}}\Big((\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{2\pi}{9}) + A(\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}) + A\omega(\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6})\Big).$$

Durch Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (5) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in I_9$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned}
f(\omega) :=& \left(\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9}\right) \\
&+ A\left(\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \\
&+ A\omega\left(\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6}\right) \\
=& \cos\frac{\pi}{18} + A\left(\sin\frac{2\pi}{9}(\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{3}) - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}\right) \\
&+ A\omega\left(\sin\frac{2\pi}{9}(\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{3}) - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6}\right) \\
=& \cos\frac{\pi}{18} + A\left(2\sin\frac{\pi}{9}\sin^2\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}\right) \\
&+ A\omega\left(2\cos\frac{\pi}{9}\sin^2\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Wegen $2\sin^2\frac{2\pi}{9} = 1 - \cos\frac{4\pi}{9}$ gilt

$$2\cos\frac{\pi}{9}\sin^2\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6}.$$

Wegen $2\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3}$ und $2\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}$ gilt

$$2\cos\frac{\pi}{9} - 2\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} - 2\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{6}.$$

Wegen $\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{2\pi}{9} = 2\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{6}$ und $\sin\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{6} = -2\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}$ folgt schließlich

$$2\cos\frac{\pi}{9}\sin^2\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{18}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{9}) < 0,$$

die Funktion f ist also monoton fallend, es reicht also aus, $f(\tan\frac{\pi}{9}) \geqslant 0$ zu überprüfen. Dazu berechnet man unter Benutzung der Formel $\sin x + \tan y \cos x = \frac{\sin(x+y)}{\cos y}$

$$\begin{aligned}
& f(\tan\frac{\pi}{9}) > f(\tan\frac{\pi}{3}) \\
&= \cos\frac{\pi}{18} + A\left(2\sin^2\frac{2\pi}{9}(\sin\frac{\pi}{9} + \tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}) - \cos\frac{\pi}{18}(\sin\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6})\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{18} + A\cdot\frac{2\sin^2\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{18}\left(1 + 2A(2\sin^2\frac{2\pi}{9} - 1)\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{18}\left(1 - 2A\cos\frac{4\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{18}\left(1 - 2A\sin\frac{\pi}{18}\right) = 0.
\end{aligned}$$

(d) $H_{1,6} \cap I_{2,16} \cap S_e \subset I_{1,12}$: Die Addition der mit $\cos\frac{\pi}{18}$ multiplizierten Ungleichung (1) mit der mit $\sin\frac{\pi}{3}$ multiplizierten Ungleichung (6) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{\pi}{9}$ liefert, daß für alle $z \in (H_{1,6} \cap I_{2,16})(\omega)$ gilt

$$z_1 \sin\frac{\pi}{3} + z_2 \cos\frac{\pi}{3} \geqslant \frac{1}{B\sin\frac{\pi}{9}}\Big((\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{18}) + A(\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}) + A\omega(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6})\Big)$$

Durch Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (7) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in I_9$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned} f(\omega) :=& \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9} + A\left(\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\right) \\ &+ A\omega\left(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Mit

$$\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} = \sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} = 2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9}(\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{3})$$

und

$$\sin\frac{\pi}{9}(\cos\frac{\pi}{18} + \sin\frac{2\pi}{9}) = 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{6}$$

folgt

$$f(\omega) = \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9} + A\sin\frac{\pi}{3}(\cos\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{3}) + A\omega\cos\frac{\pi}{6}(\sin\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}).$$

Mit

$$A(\cos\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{3}) = 2A\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9}$$

und

$$A(\sin\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}) = -2A\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{2\pi}{9} = -\sin\frac{2\pi}{9}$$

folgt

$$f(\omega) = \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{9} - \omega\sin\frac{2\pi}{9}\right).$$

Die Funktion f ist monoton fallend, es reicht also aus, $f(\tan\frac{\pi}{9}) \geqslant 0$ zu zeigen. Dazu berechnet man

$$\cos\frac{2\pi}{9} - \tan\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9} - 2\sin^2\frac{\pi}{9} = 2\cos\frac{2\pi}{9} - 1$$

und damit

$$\begin{aligned} f(\tan\frac{\pi}{9}) &= \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{6}\left(2\cos\frac{2\pi}{9} - 1\right) \\ &= -\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{18} = 0. \end{aligned}$$

(e) $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap F_e \subset H_{2,16}$: Aus **(d)** folgt

$$(H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap F_e) \cap I_{2,16} \subset I_{1,12} \cap F_e$$

Aus der Behauptung **(2)** dieses Beweises folgt $I_{1,12} \cap F_e = \varnothing$, also gilt $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap F_e \subset H_{2,16}$.
(5) Im vierten Teil dieses Beweises haben wir im Falle $p = 9$ gezeigt, daß $H_{1,6} \cap I_{1,8} \cap F_e \subset H_{2,10} \cap H_{2,12} \cap H_{2,14} \cap H_{2,16}$ gilt. Die dabei in Teilbehauptungen (a) und (b) bewiesenen nicht strikten Ungleichungen werden bei $\omega = \tan\frac{\pi}{9}$ zu Gleichungen. Es bedeutet, daß der Keil $H_{1,6} \cap I_{1,8}$ die Menge $F_{\mathcal{K}}$ in genau einem Punkt trifft, einer Ecke von $F_{\mathcal{K}}$. Damit trägt im Falle $p = 9$ der Halbraum $I_{1,8}$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ bei. Infolgedessen können auch die Halbräume $I_{m,1,2-m}$, $I_{m,1,8-m}$, $I_{m,2,1-m}$ und $I_{m,2,5-m}$ mit $m \in \{0, \ldots, 8\}$ als Bilder von $I_{1,8}$ unter $\rho^m\eta\rho'$, ρ^m, $\rho^m\eta$ und $\rho^m\rho'$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ beitragen. ∎

PROPOSITION 52. *Es gilt* $F_{\mathcal{K}} = \tilde{F}_{\mathcal{K}}$.

BEWEIS. Zum Beweis der Behauptung wenden wir die Proposition V.38 an. In allen drei Fällen sind die Mengen $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ zusammenhängend und nicht in $\mathbb{A}_-$ enthalten. In allen drei Fällen gilt ferner $\ell_{\mathcal{K}}^- < 1$. Im Falle $p \geqslant 7$ folgt aus dem Beweis des Satzes 49, daß $\ell_{\mathcal{K}}^- \leqslant \mathcal{M}_R$ für ein $R \in (0,1)$ und damit $\ell_{\mathcal{K}}^- < 1$ gilt. Im Falle $p = 5$ zeigt die Rechnung, daß $\ell_{\mathcal{K}}^- < 0{,}71$ gilt. Nach Proposition V.38 folgt also $\tilde{F}_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$ und damit $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}} = \tilde{F}_{\mathcal{K}}$. ∎

§18. Fundamentalbereiche F_e

Satz 53. *Im Falle* $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$ *gilt*

$$F_e = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{4} ((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m}) \cap (I_{m,2,1-m} \cup I_{m,2,3-m})).$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,3)^2$ *gilt*

$$F_e = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{6} ((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m} \cup I_{m,1,6-m}) \cap (I_{m,2,8-m} \cup I_{m,2,10-m} \cup I_{m,2,12-m})).$$

Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(9,3,3)^2$ *gilt*

$$F_e = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{8} ((I_{m,1,4-m} \cup I_{m,1,6-m}) \cap (I_{m,2,3-m} \cup I_{m,2,5-m})).$$

Beweis. In den Fällen $p = 7$ und $p = 9$ folgt die Behauptung aus den Sätzen 49 und III.27 und Propositionen 51 und 52.

Im Falle $p = 5$ wollen wir auf die Menge $\tilde{F} := \Psi(F_{\mathcal{K}})$ den Satz V.42 anwenden. Wir erinnern daran, daß die Gruppe $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$ durch Elemente $-r_u$, $-r_v$ und $-r_w$ erzeugt wird. Für die Elemente r_u, r_v und r_w gilt

$$r_u^5 = r_v^3 = r_w^3 = r_u r_v r_w = -1.$$

Es folgt $r_v r_u r_v r_u = r_u^{-1} r_v^{-1}$.

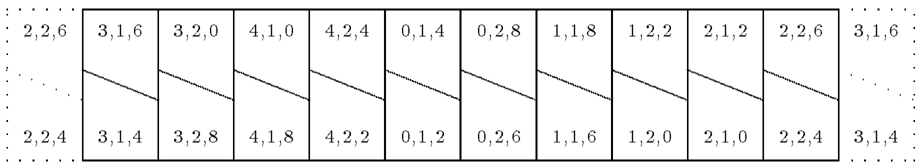


Abbildung 10. Seitenfläche von $F_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$.

Seitenidentifikationen: Bis auf die Symmetrien genügt es, den Deckel, der mit dem Boden identifiziert wird, und die in $E_{2,8}$ enthaltene Seitenfläche von $F_{\mathcal{K}}$ zu betrachten, denn es gilt $I_{m,1,2-m} = \rho^m \eta(I_{2,8})$, $I_{m,1,4-m} = (\rho')^{2m-1}(I_{2,8})$, $I_{m,2,1-m} = (\rho')^{2m+1}\eta(I_{2,8})$, $I_{m,2,3-m} = \rho^m(I_{2,8})$.
r_u^2 (Deckel): Multiplikation (von links) mit $\bar{r}_u^2 = -r_u^3$:

$$g_{m,1,4-m} \mapsto g_{m+3,1,4-m}, \quad g_{m,2,3-m} \mapsto g_{m+3,2,3-m}.$$

$g_{0,2,8}$: Multiplikation von links mit $\bar{g}_{0,2,8} = g_{2,1,0}$:

$$r_u^2 \mapsto g_{2,1,2}, \quad g_{1,1,8} \mapsto g_{1,2,2}, \quad g_{1,1,6} \mapsto g_{1,2,0}, \quad g_{0,2,6} \mapsto -r_u^3, \quad g_{0,1,4} \mapsto g_{2,2,4}.$$

Kantenzyklen: Bis auf Symmetrien kommen in den folgenden zwei Kantenzyklen alle Kanten von $F_{\mathcal{K}}$ vor.

$$(g_{0,2,8}, g_{1,1,8}) \mapsto (g_{1,2,2}, g_{2,1,0}) \mapsto (g_{2,2,4}, g_{3,1,4}).$$
$$(g_{0,2,8}, r_u^2) \mapsto (g_{2,1,2}, g_{2,1,0}) \mapsto (-r_u^3, g_{3,2,8}),$$

Der erste Zykel ist vom Typ ℵ, der zweite Zykel ist vom Typ ℶ. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes V.42 erfüllt, es gilt also $F_e = F_{\mathcal{K}}$. ∎

§19. Abbildungen der Fundamentalbereiche

Auf den nächsten Seiten findet man die Abbildungen und die Beschreibungen der Seitenidentifikationen der Fundamentalbereiche F_e für die Fälle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^2$ mit $p \in \{5,7,9\}$. Man siehe hierzu auch den Abschnitt mit Erklärung der Abbildungen von F_e.

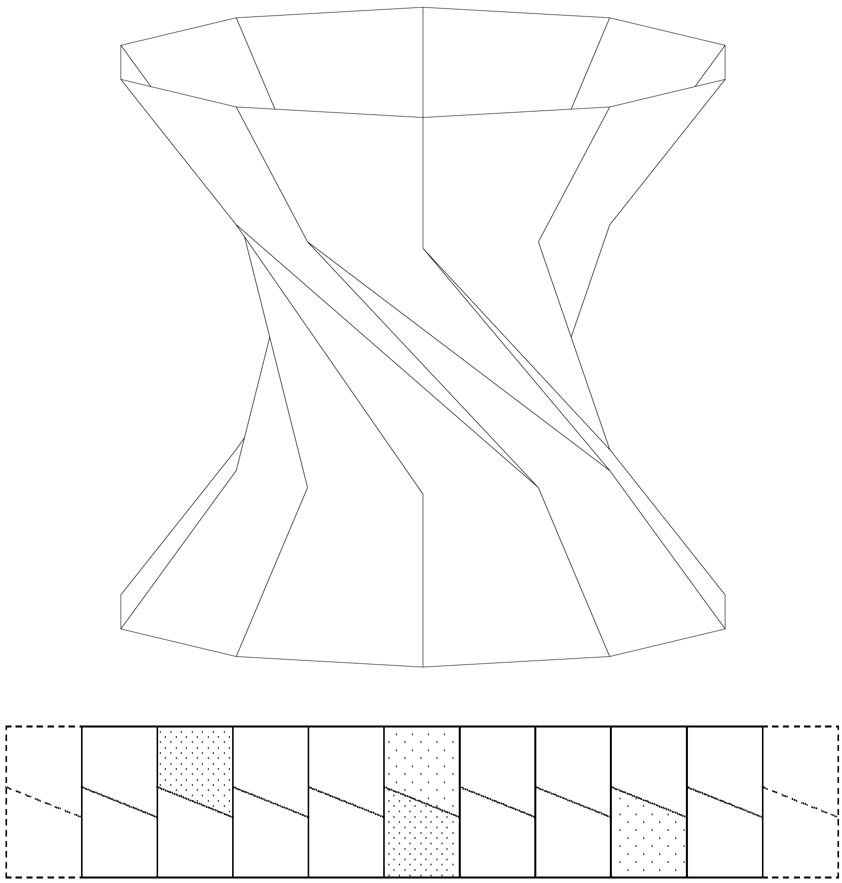


Abbildung 11. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,3,3)^2$.
Singularität E_{18}.

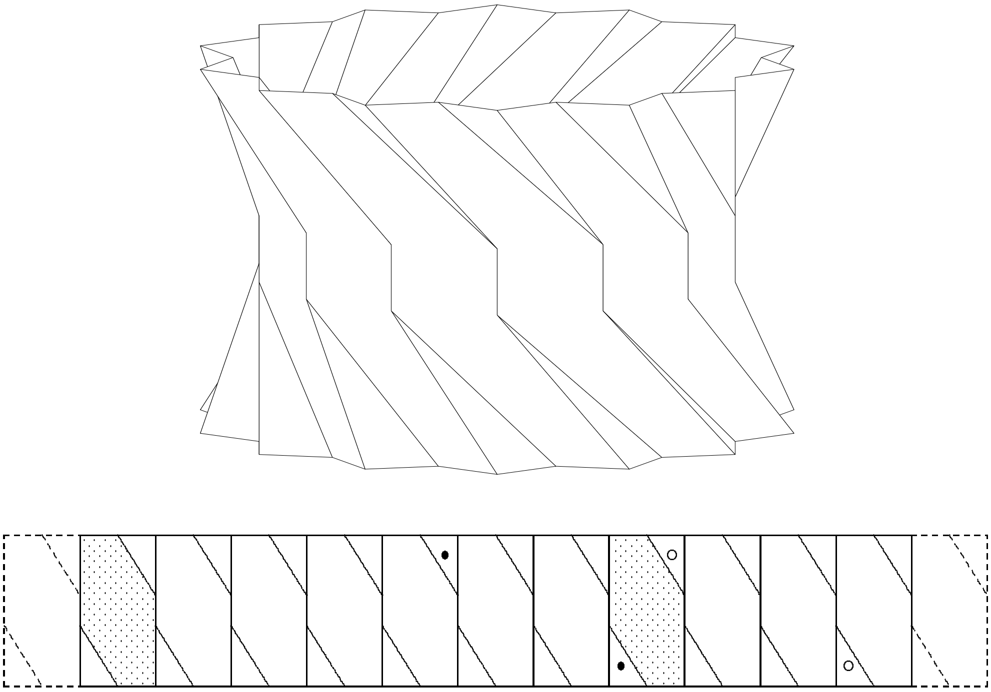


Abbildung 12. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,3,3)^2$.
Singularität Z_{17}.

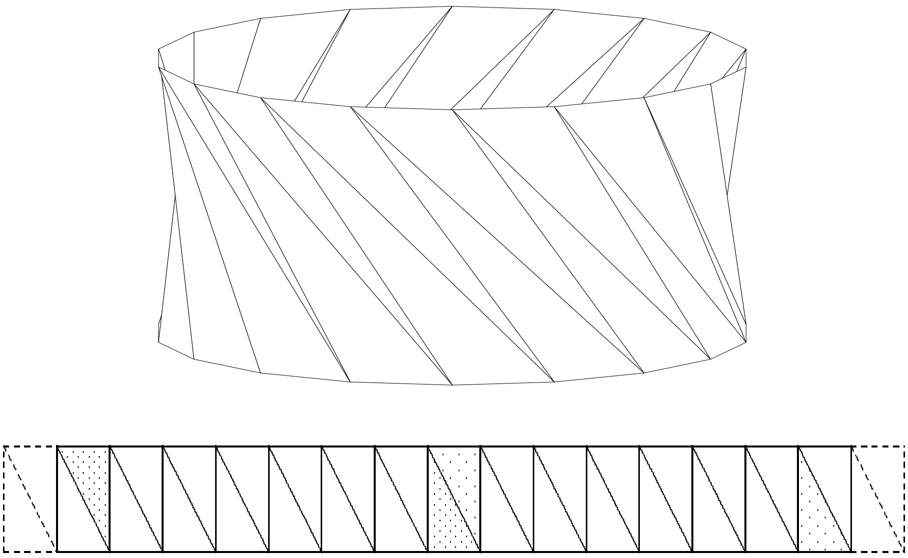


Abbildung 13. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(9,3,3)^2$. Singularität Q_{16}.

Kapitel VII

Die Fälle $\Gamma(5,5,r)^2$

Усердие всё превозмогает.

Козьма Прутков

Es sei $r \in \{3,5\}$ und $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,r)^2$. Für die Konstruktion des Fundamentalbereichs von $\tilde{\Gamma}$ sei der Fixpunkt $u = 0$ von Γ der Ordnung 5 gewählt. Wir werden zeigen können, daß in beiden Fällen $F_e = F_{\mathcal{K}}$ gilt. Dafür werden wir $F_{\mathcal{K}}$ als $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ darstellen, wobei $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ ein kompaktes Polytop in $\mathbb{A}$ ist, das sogar in $\mathbb{A}_+$ enthalten ist, wie wir dann zum Teil mit Hilfe der Proposition V.38 und zum Teil durch ausdauerndes Rechnen zeigen werden. Damit gilt $F_{\mathcal{K}} = \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ und wir erhalten eine Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$ als kompaktes Polytop in $\mathbb{A}_+$. Schließlich wenden wir auf die Menge $\tilde{F} := \Psi(F_{\mathcal{K}})$ den Satz V.42 an, um $\mathcal{F}_e = \tilde{F}$ und $F_e = F_{\mathcal{K}}$ zu beweisen.

§20. Reduktion der Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$

Zur Erinnerung. Es gilt

$$C = \cosh \ell_v = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{r}}{\sin^2 \frac{\pi}{5}}, \quad S = \sinh \ell_v, \quad B = B(1) = B(4) = S \cdot \sin \frac{\pi}{5}.$$

Lemma 54. *Es gilt $C > 1$, $C > S > C - 1$ und $(C+1)\cos\frac{\pi}{5} > S$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(C+1)\cos\frac{\pi}{5} > S &\Longleftrightarrow (C+1)^2\cos^2\frac{\pi}{5} > S^2 \Longleftrightarrow (C+1)^2\cos^2\frac{\pi}{5} > C^2 - 1\\ &\Longleftrightarrow C^2\sin^2\frac{\pi}{5} - 2C\cos^2\frac{\pi}{5} - (1+\cos^2\frac{\pi}{5}) < 0\\ &\Longleftrightarrow C \in \left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{5} - 1}{\sin^2\frac{\pi}{5}}, \frac{\cos^2\frac{\pi}{5}+1}{\sin^2\frac{\pi}{5}}\right) \Longleftrightarrow \cos\frac{\pi}{r} \in (-1,1).\end{aligned}$$

Die restlichen Ungleichungen folgen wegen $\ell_v > 0$ leicht aus der Definition von sinh und cosh. ∎

Proposition 55. *Es gilt $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ mit*

$$\tilde{F}_{\mathcal{K}} = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{4} \Big((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m}) \cap (I_{m,4,6-m} \cup I_{m,4,8-m}) \Big).$$

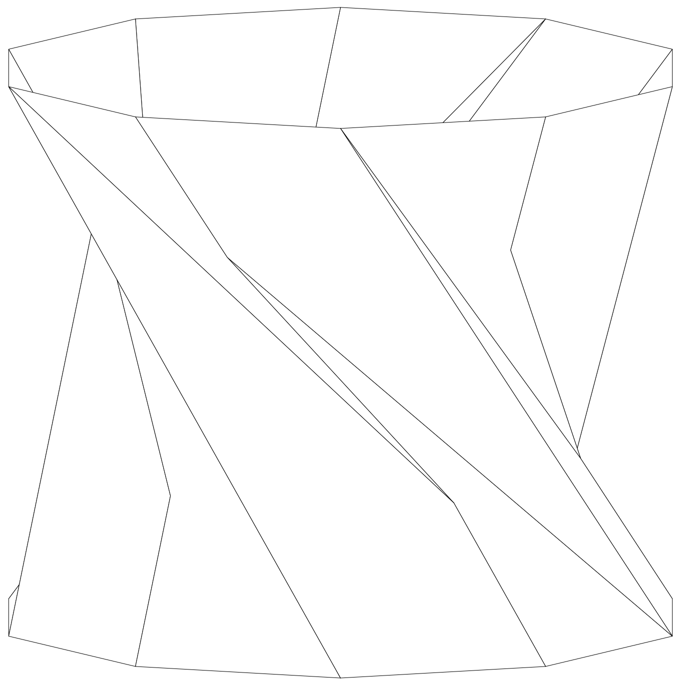


ABBILDUNG 14. Menge $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,3)^2$.

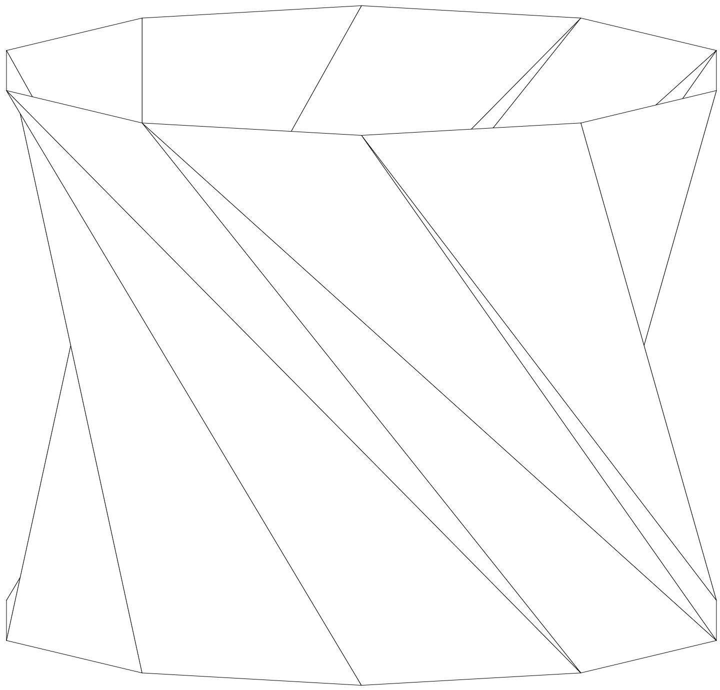


ABBILDUNG 15. Menge $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,5)^2$.

Beweis. Zuerst berechnen wir, wie in Proposition III.29 angegeben, die Ungleichungen aller im Beweis auftretenden Halbräume:

$$z \in I_{1,8}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{5} - z_2\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant \frac{1}{B}\cdot\beta_{1,8}(\omega) \tag{0}$$

$$z \in I_{1,6}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{5} + z_2\cos\frac{\pi}{5} \geqslant \frac{1}{B}\cdot\beta_{1,6}(\omega) = \frac{1}{S}\cdot(C+1)\cdot(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5}) \tag{1}$$

$$z \in H_{4,6}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{5} + z_2\cos\frac{\pi}{5} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,6}(\omega) = \frac{1}{S}\cdot(C-1)\cdot(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5}) \tag{2}$$

$$z \in H_{1,4}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{5} - z_2\cos\frac{\pi}{5} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{1,4}(\omega) = \frac{1}{S}\cdot(C-1)\cdot(\sin\frac{\pi}{5} + \omega\cos\frac{\pi}{5}) \tag{3}$$

$$z \in H_{4,8}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{5} - z_2\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,8}(\omega) \tag{4}$$

$$z \in I_{4,0}(\omega) \Longleftrightarrow z_2 \geqslant \frac{1}{B}\cdot\beta_{4,0}(\omega) \tag{5}$$

$$z \in I_{4,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{5} + z_2\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant \frac{1}{B}\cdot\beta_{4,2}(\omega) \tag{6}$$

$$z \in I_{1,0}(\omega) \Longleftrightarrow -z_2 \geqslant \frac{1}{B}\cdot\beta_{1,0}(\omega) \tag{7}$$

$$z \in H_{4,4,4}(\omega) \Longleftrightarrow -z_2 \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,4,4}(\omega) \tag{8}$$

$$z \in H_{1,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{5} + z_2\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{1,2}(\omega) \tag{9}$$

$$z \in H_{4,4,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{5} - z_2\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,4,2}(\omega) = \frac{1}{S}\cdot(C-1)\cdot(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5}) \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta_{1,8}(\omega) &= 1 + \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} - \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\\
\beta_{1,6}(\omega) &= \sin^2\frac{\pi}{5} + C\sin^2\frac{\pi}{5} - \omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\\
-\beta_{4,6}(\omega) &= -\sin^2\frac{\pi}{5} + C\sin^2\frac{\pi}{5} + \omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\\
-\beta_{1,4}(\omega) &= -\sin^2\frac{\pi}{5} + C\sin^2\frac{\pi}{5} - \omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\\
-\beta_{4,8}(\omega) &= -1 - \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\\
\beta_{4,0}(\omega) &= 1 + \cos\frac{\pi}{5} - C\omega\sin\frac{\pi}{5}\\
\beta_{4,2}(\omega) &= 1 + \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\\
\beta_{1,0}(\omega) &= 1 + \cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\\
-\beta_{4,4,4}(\omega) &= -1 - \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\\
-\beta_{1,2}(\omega) &= -1 - \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} - \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\\
-\beta_{4,4,2}(\omega) &= -\sin^2\frac{\pi}{5} + C\sin^2\frac{\pi}{5} + \omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}
\end{aligned}$$

Nun zum eigentlichen Beweis:
(1) $I_{1,8} \cap (S_e \cap \mathbb{A}_+) = \varnothing$: Aus Ungleichung (0) folgt unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}|z| &\geqslant z_1 \sin\frac{2\pi}{5} - z_2 \cos\frac{2\pi}{5}\\ &\geqslant \frac{1}{B}\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} - \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

für $z \in I_{1,8}(\omega)$. Es ist also $f(\omega) \geqslant g(\omega)$ für alle $\omega \in I_5$ zu zeigen, wobei

$$f(\omega) := \frac{1}{B}\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \omega(C\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5})\right)$$

und $g(\omega) := \sqrt{1+\omega^2}$. Die Funktion f ist linear und die Funktion g ist konvex, es reicht also aus, diese Ungleichung für $\omega = -\tan\frac{\pi}{5}$ und $\omega = \tan\frac{\pi}{5}$ zu überprüfen. Es gilt ferner $g(-\tan\frac{\pi}{5}) = g(\tan\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}$. Wegen

$$C \leqslant \frac{\cos^2\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}}{\sin^2\frac{\pi}{5}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}(\cos\frac{\pi}{5}+1)}{\sin\frac{\pi}{5}} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5}$$

gilt

$$C\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}\tan\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 0,$$

die Funktion f ist also nicht wachsend. Damit reicht es aus, $f(\tan\frac{\pi}{5}) \geqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}$ zu zeigen. Es gilt

$$f(\omega) = \frac{1}{B}\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5} - \omega\sin\frac{2\pi}{5}) + C\sin\frac{\pi}{5}(\sin\frac{2\pi}{5} + \omega\cos\frac{2\pi}{5})\right)$$

und damit

$$\begin{aligned}&f(\tan\frac{\pi}{5})\\ &= \frac{1}{B}\left(1 + (\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}) + C\tan\frac{\pi}{5}(\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5})\right)\\ &= \frac{1}{B}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5} + C\tan\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{5}(C+1)}{B}\\ &= \frac{2\sin\frac{\pi}{5}(C+1)}{S} > \frac{C+1}{S} > \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\end{aligned}$$

nach Lemma 54.
(2) $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,4} \cap H_{4,6} \cap H_{4,8} \cap H_{4,0}$:
(a) $I_{1,6} \cap S_e \subset H_{4,6}$: Durch Vergleich der Ungleichungen (1) und (2) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{\pi}{5}]$ zu zeigen, wobei $f(\omega) := 2(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5})$.
(b) $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^- \cap \mathbb{A}_+ = \varnothing$: Die Addition der Ungleichungen (1) und (3) ergibt für $z \in (H_{1,4} \cap I_{1,6})(\omega)$

$$|z| \geqslant z_1 \geqslant \frac{C - \omega\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}}{S}.$$

Es ist also $f(\omega) \geqslant g(\omega)$ für alle $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{5}, 0]$ zu zeigen, wobei $f(\omega) := \frac{C-\omega\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}}{S}$ und $g(\omega) := \sqrt{1+\omega^2}$. Die Funktion f ist linear und die Funktion g ist konvex, es reicht also aus, diese Ungleichung für $\omega = -\tan\frac{\pi}{5}$ und $\omega = 0$ zu überprüfen. Dazu berechnet man $f(0) \geqslant g(0) \iff C \geqslant S$ und $f(-\tan\frac{\pi}{5}) \geqslant g(-\tan\frac{\pi}{5}) \iff (C+1)\cos\frac{\pi}{5} \geqslant S$. Diese Ungleichungen sind in Lemma 54 bewiesen.
(c) Aus **(b)** folgt $H_{4,6} \cap I_{4,4} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+ = \eta(H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^- \cap \mathbb{A}_+) = \varnothing$.
(d) $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,4}$: Aus **(b)** folgt

$$\begin{aligned}H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ &= H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap (S_e^- \cup S_e^+) \cap \mathbb{A}_+\\ &= (H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^- \cap \mathbb{A}_+) \cup (H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+)\\ &= H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+.\end{aligned}$$

Aus **(a)** folgt

$$H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,6} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+.$$

Aus **(c)** folgt nun

$$\begin{aligned}(H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+) \cap I_{4,4} &= (H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+) \cap I_{4,4} \\ &\subset H_{4,6} \cap I_{4,4} \cap S_e^+ \cap \mathbb{A}_+ = \varnothing,\end{aligned}$$

also gilt $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,4}$.
(e) $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \subset H_{4,8}$: Durch Addition der Ungleichung (3) mit der mit $(2\cos\frac{\pi}{5} - 1)$ multiplizierten Ungleichung (1) ergibt sich für $z \in (H_{1,4} \cap I_{1,6})(\omega)$

$$\begin{aligned}z_1 \sin\frac{2\pi}{5} - z_2 \cos\frac{2\pi}{5} \geqslant \frac{1}{B}\Big((\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} - 1) + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} \\ - \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega(\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5})\Big).\end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (4) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{\pi}{5}]$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned}f(\omega) &:= (\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}) - 2\omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega(\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}) \\ &= 2\sin\frac{2\pi}{5}(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5}).\end{aligned}$$

(f) $H_{1,4} \cap I_{4,0} \cap S_e \subset I_{4,2}$: Die Addition der Ungleichungen (3) und (5) und Multiplikation des Ergebnisses mit $2\cos\frac{\pi}{5}$ ergibt für $z \in (H_{1,4} \cap I_{4,0})(\omega)$

$$\begin{aligned}z_1 \sin\frac{2\pi}{5} + z_2 \cos\frac{2\pi}{5} \geqslant \frac{1}{B}\Big((1 + \cos\frac{\pi}{5})(1 + \cos\frac{2\pi}{5}) + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} \\ - \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega(\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5})\Big).\end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (6) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{\pi}{5}]$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned}f(\omega) &:= (\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}) - 2\omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - C\omega(\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}) \\ &= 2\sin\frac{2\pi}{5}(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5}).\end{aligned}$$

(g) $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,0}$: Wegen **(f)** gilt $(H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+) \cap I_{4,0} \subset I_{4,2} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+$. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt $I_{4,2} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ = \eta(I_{1,8} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+) = \varnothing$. Damit gilt $(H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+) \cap I_{4,0} = \varnothing$ und folglich $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,0}$.
(3) $H_{1,2} \cap I_{1,0} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,4,2} \cap H_{4,4,4} \cap H_{4,4,6}$:
(Im Falle $r = 5$ folgt diese Inklusion aus dem zweiten Teil dieses Beweises wegen der zusätzlichen Symmetrien.)
(a) $I_{1,0} \cap S_e \subset H_{4,4,4}$: Durch Vergleich der Ungleichungen (7) und (8) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{\pi}{5}]$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned}f(\omega) &:= 2 \cdot \Big(1 + \cos^3\frac{\pi}{5} - C\sin^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - \omega\sin\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5} + C\omega\sin^3\frac{\pi}{5}\Big) \\ &= 2 \cdot \Big(1 - (C\sin^2\frac{\pi}{5} - \cos^2\frac{\pi}{5}) \cdot (\cos\frac{\pi}{5} - \omega\sin\frac{\pi}{5})\Big) \\ &= 2 \cdot \Big(1 - \cos\frac{\pi}{r}(\cos\frac{\pi}{5} - \omega\sin\frac{\pi}{5})\Big) = 2 \cdot \Big(1 - \cos\frac{\pi}{r}\cos\frac{\pi}{5} + \omega\cos\frac{\pi}{r}\sin\frac{\pi}{5}\Big).\end{aligned}$$

Die Funktion f ist monoton wachsend, es reicht also aus, $f(-\tan\frac{\pi}{5}) \geqslant 0$ zu überprüfen. Dazu berechnet man

$$f(-\tan\frac{\pi}{5}) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\cos\frac{\pi}{r}}{\cos\frac{\pi}{5}}\right) \geqslant 0$$

wegen $r \leqslant 5$ mit strikter Ungleichung für $r = 3$.

(b) $H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^+\cap \mathbb{A}_+ = \varnothing$: Die Addition der Ungleichungen (7) und (9) und Multiplikation des Ergebnisses mit $\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ ergibt für $z \in (H_{1,2}\cap I_{1,0})(\omega)$

$$\begin{aligned}|z| \geqslant z_1\cos\frac{\pi}{5} - z_2\sin\frac{\pi}{5} &\geqslant \frac{1}{B}\Big(\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - \omega\cos^2\frac{\pi}{5} + C\omega\sin^2\frac{\pi}{5}\Big)\\ &= \frac{1}{B}\Big((C+1)\sin\frac{\pi}{5}\cdot(\cos\frac{\pi}{5}+\omega\sin\frac{\pi}{5}) - \omega\Big).\end{aligned}$$

Es ist also $f(\omega) \geqslant g(\omega)$ für alle $\omega \in [0, \tan\frac{\pi}{5}]$ zu zeigen, wobei

$$f(\omega) := \frac{1}{B}\Big((C+1)\sin\frac{\pi}{5}\cdot(\cos\frac{\pi}{5}+\omega\sin\frac{\pi}{5}) - \omega\Big)$$

und $g(\omega) := \sqrt{1+\omega^2}$. Die Funktion f ist linear und die Funktion g ist konvex, es reicht also aus, diese Ungleichung für $\omega = 0$ und $\omega = \tan\frac{\pi}{5}$ zu überprüfen. Es gilt $f(0) \geqslant g(0) \iff (C+1)\cos\frac{\pi}{5} \geqslant S$ und $f(\tan\frac{\pi}{5}) \geqslant g(\tan\frac{\pi}{5}) \iff C \geqslant S$. Damit folgt die Behauptung nach Lemma 54.

(c) Aus **(b)** folgt $H_{4,4,4}\cap I_{4,4,6}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+ = \rho^4\eta(H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^+\cap\mathbb{A}_+) = \varnothing$.

(d) $H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e\cap\mathbb{A}_+ \subset H_{4,4,6}$: Aus **(b)** folgt

$$\begin{aligned}H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e\cap\mathbb{A}_+ &= H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap(S_e^-\cup S_e^+)\cap\mathbb{A}_+\\ &= (H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+)\cup(H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^+\cap\mathbb{A}_+)\\ &= H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+.\end{aligned}$$

Aus **(a)** folgt

$$H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+ \subset H_{4,4,4}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+.$$

Aus **(c)** folgt nun

$$\begin{aligned}(H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e\cap\mathbb{A}_+)\cap I_{4,4,6} &= (H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+)\cap I_{4,4,6}\\ &\subset H_{4,4,4}\cap I_{4,4,6}\cap S_e^-\cap\mathbb{A}_+ = \varnothing,\end{aligned}$$

also gilt $H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e\cap\mathbb{A}_+ \subset H_{4,4,6}$.

(e) $H_{1,2}\cap I_{1,0}\cap S_e \subset H_{4,4,2}$: Die Addition der Ungleichung (9) mit der mit $2\cos\frac{2\pi}{5}$ multiplizierten Ungleichung (7) ergibt für $z \in (H_{1,2}\cap I_{1,0})(\omega)$

$$\begin{aligned}z_1\sin\frac{2\pi}{5} - z_2\cos\frac{2\pi}{5} \geqslant \frac{1}{B}\Big(&(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1) + C\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\\ &- \omega\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + C\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\Big).\end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (10) sieht man, daß es ausreicht, $f(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in [-\tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{\pi}{5}]$ zu zeigen, wobei

$$\begin{aligned}f(\omega) :=& \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + \sin^2\frac{\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}(\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5})\\ &- \omega\cos\frac{\pi}{5}(\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}) + C\omega\sin\frac{\pi}{5}(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5})\\ =&2\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5}) + 2C\sin^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\\ &- 4\omega\sin\frac{\pi}{5}\cos^3\frac{\pi}{5} + 4C\omega\sin^3\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

Mit

$$2\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5}) = 2\cos\frac{2\pi}{5} - 2\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{5}$$

folgt

$$\begin{aligned}f(\omega) &= 2\sin\frac{\pi}{5}\left(\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + C\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - 2\omega\cos^3\frac{\pi}{5} + 2C\omega\sin^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right)\\ &= 2\sin\frac{\pi}{5}\left((C+1)\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 2\omega\cos\frac{\pi}{5}(C\sin^2\frac{\pi}{5} - \cos^2\frac{\pi}{5})\right)\\ &= 2\sin\frac{\pi}{5}\left((1+\cos\frac{\pi}{r})\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} + 2\omega\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{r}\right).\end{aligned}$$

Die Funktion f ist monoton wachsend, es reicht also aus, $f(-\tan\frac{\pi}{5}) \geqslant 0$ zu überprüfen. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned} f(-\tan\frac{\pi}{5}) &= 2\sin\frac{\pi}{5}\left((1+\cos\frac{\pi}{r})\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} - 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{r}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{r}\cos\frac{2\pi}{5} - 2\sin^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{r}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{r}(2\cos\frac{2\pi}{5} - 1)\right). \end{aligned}$$

Wegen $2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 < 0$ folgt

$$f(\omega) \geqslant 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}(2\cos\frac{2\pi}{5} - 1)\right) = 2\left(2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

wegen $r \leqslant 5$ mit strikter Ungleichung für $r = 3$.

(4) Im ersten Teil dieses Beweises haben wir gezeigt, daß $I_{1,8} \cap (S_e \cap \mathbb{A}_+) = \varnothing$ gilt. Damit trägt der Halbraum $I_{1,8}$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}} \subset S_e \cap \mathbb{A}_+$ bei. Aus Symmetriegründen tragen auch die Halbräume $I_{m,1,8-m} = \rho^m(I_{1,8})$ und $I_{m,4,2-m} = \rho^m\eta(I_{1,8})$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ bei. Es gilt also

$$F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap S_e \cap \bigcap_{m=0}^{4} \tilde{R}_{m,1} \cap \bigcap_{m=0}^{4} \tilde{R}_{m,4}$$

mit $\tilde{R}_{m,1} := I_{m,1,-m} \cup I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m} \cup I_{m,1,6-m}$ und $\tilde{R}_{m,4} := I_{m,4,-m} \cup I_{m,4,4-m} \cup I_{m,4,6-m} \cup I_{m,4,8-m}$. Im zweiten Teil dieses Beweises haben wir gezeigt, daß $H_{1,4} \cap I_{1,6} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,4} \cap H_{4,6} \cap H_{4,8} \cap H_{4,0}$ gilt. Zwei der dabei bewiesenen nicht strikten Ungleichungen (Teilbehauptungen (a) und (e)) werden bei $\omega = \tan\frac{\pi}{5}$ zu Gleichungen. Es bedeutet, daß der Keil $H_{1,4} \cap I_{1,6}$ die Menge $F_{\mathcal{K}}$ in genau einem Punkt trifft, einer Ecke von $F_{\mathcal{K}}$. Damit trägt der Halbraum $I_{1,6}$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ bei. Infolgedessen tragen auch die Halbräume $I_{m,1,6-m} = \rho^m(I_{1,6})$ und $I_{m,4,4-m} = \rho^m\eta(I_{1,6})$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ bei. In der obigen Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$ können wir also $\tilde{R}_{m,1} = I_{m,1,-m} \cup I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m}$ und $\tilde{R}_{m,4} = I_{m,4,-m} \cup I_{m,4,6-m} \cup I_{m,4,8-m}$ nehmen. Im dritten Teil dieses Beweises haben wir gezeigt, daß $H_{1,2} \cap I_{1,0} \cap S_e \cap \mathbb{A}_+ \subset H_{4,4,2} \cap H_{4,4,4} \cap H_{4,4,6}$ gilt. Zwei der dabei bewiesenen nicht strikten Ungleichungen (Teilbehauptungen (a) und (e)) werden im Falle $r = 5$ bei $\omega = -\tan\frac{\pi}{5}$ zu Gleichungen. Es bedeutet, daß der Keil $H_{1,2} \cap I_{1,0}$ die Menge $F_{\mathcal{K}}$ im Falle $r = 5$ in genau einem Punkt, einer Ecke von $F_{\mathcal{K}}$, und im Falle $r = 3$ gar nicht trifft. Damit trägt der Halbraum $I_{1,0}$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ bei. Infolgedessen tragen auch die Halbräume $I_{m,1,-m} = \rho^m(I_{1,0})$ und $I_{m,4,-m} = \rho^m\eta(I_{1,0})$ nicht zur Bildung von $F_{\mathcal{K}}$ bei. Damit ergibt sich die gewünschte Darstellung von $F_{\mathcal{K}}$. ∎

Lemma 56. *Die Gerade $E_{1,4} \cap E_{4,6}$ liegt in $\mathbb{A}_+$.*

Beweis. Aus den Gleichungen der Ebenen $E_{1,4}$ und $E_{4,6}$ (vergleiche auch mit den Ungleichungen (2) und (3) der Halbräume $H_{4,6}$ und $H_{1,4}$ in der letzten Proposition)

$$z \in E_{4,6}(\omega) \iff z_1\sin\frac{\pi}{5} + z_2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{C-1}{S}\cdot(\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5})$$

$$z \in E_{1,4}(\omega) \iff z_1\sin\frac{\pi}{5} - z_2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{C-1}{S}\cdot(\sin\frac{\pi}{5} + \omega\cos\frac{\pi}{5})$$

berechnen sich die Koordinaten des Punktes $(E_{1,4} \cap E_{4,6})(\omega)$ als

$$z_1 = \frac{C-1}{S}, \quad z_2 = -\frac{C-1}{S}\cdot\omega.$$

Damit gilt

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \frac{C-1}{S}\cdot\sqrt{1+\omega^2} < \sqrt{1+\omega^2}$$

nach Lemma 54. ∎

Proposition 57. *Es gilt $F_{\mathcal{K}} = \tilde{F}_{\mathcal{K}}$.*

Beweis. Es gilt $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$. Aus $\tilde{F}_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$ würde $F_{\mathcal{K}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}} = \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ folgen, es genügt also, $\tilde{F}_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$ zu zeigen. Die Punkte von $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$ mit dem größten Abstand von der ω-Achse befinden sich auf den konvexen Kanten von $\tilde{F}_{\mathcal{K}}$. Unter Berücksichtigung der Symmetrien haben wir im Falle $r = 5$ nur die in der Geraden $E_{1,4} \cap E_{4,6}$ enthaltene Kante und im Falle $r = 3$ nur die in den Geraden $E_{1,4} \cap E_{4,6}$, $E_{1,4} \cap E_{4,4,4}$ und $E_{1,2} \cap E_{4,4,4}$ enthaltene Kanten zu betrachten. Nach dem Lemma 56 liegt die ganze Gerade $E_{1,4} \cap E_{4,6}$ in $\mathbb{A}_+$. Im Falle $r = 5$ ist damit $\tilde{F}_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$ bereits gezeigt. Wir widmen uns nun dem Fall $r = 3$. Die in der Geraden $E_{1,2} \cap E_{4,4,4}$ enthaltene Kante liegt in $S_e(\tan\frac{\pi}{10})$. Man rechnet nach, daß $\ell^-_{\mathcal{K}}(\tan\frac{\pi}{10}) < 0{,}79 < 1$ gilt. [Es gilt sogar $\ell^-_{\mathcal{K}}(\tan(0{,}98 \cdot \frac{\pi}{5})) < 1$.] Die Menge $S_e(\tan\frac{\pi}{10}) \cap \tilde{F}_{\mathcal{K}}$ ist zusammenhängend und nicht in $\mathbb{A}_-$ enthalten, damit ist sie nach Proposition V.38 in $\mathbb{A}_+$ enthalten. Damit liegt die in der Geraden $E_{1,2} \cap E_{4,4,4}$ enthaltene Kante in $\mathbb{A}_+$. Es ist nun zu zeigen, daß auch die in der Geraden $E_{1,4} \cap E_{4,4,4}$ enthaltene Kante in $\mathbb{A}_+$ liegt. Die Gleichungen der Ebenen $E_{1,4}$ und $E_{4,4,4}$ (wie in Proposition III.29 angegeben, vergleiche auch mit den Ungleichungen (3) und (8) der Halbräume $H_{1,4}$ und $H_{4,4,4}$ in Proposition 55) sind

$$\begin{aligned} z_1 \sin\frac{\pi}{5} - z_2 \cos\frac{\pi}{5} &= \frac{1}{B}\Big((C-1)\sin^2\frac{\pi}{5} + \omega \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}(C-1)\Big) \\ &= \frac{1}{B}(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3}) + \frac{\omega \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}}{B}(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

für $z \in E_{1,4}(\omega)$ und

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{B}\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - 2C\sin^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} - \omega\sin\frac{\pi}{5}(C\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos^2\frac{\pi}{5})\right) \\ &= \frac{1}{B}(1 - 2\cos\frac{\pi}{5}) - \frac{\omega}{B\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos^2\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{5}\right) \\ &= \frac{1}{B}(1 - 2\cos\frac{\pi}{5}) - \frac{\omega}{B\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

für $z \in E_{4,4,4}(\omega)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} z_1 \sin\frac{\pi}{5} &= \frac{1}{B}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{5} - 2\cos^2\frac{\pi}{5}\right) \\ &= \frac{1}{B}(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3} - 1) = \frac{1}{B}(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{3}). \end{aligned}$$

Damit berechnen sich die Koordinaten des Punktes $(E_{1,4} \cap E_{4,4,4})(\omega)$ als

$$z_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{3}}{B\sin\frac{\pi}{5}}, \quad z_2 = \frac{1 - 2\cos\frac{\pi}{5}}{B} - \omega \cdot \frac{\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3}}{B\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Rechnung zeigt schließlich, daß

$$|z_1| < 0{,}3, \quad |z_2| < 0{,}4 + 0{,}8 \cdot |\omega|$$

und folglich

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &< (0{,}3)^2 + (0{,}4 + |\omega| \cdot 0{,}8)^2 = 0{,}25 + 0{,}64 \cdot |\omega| + 0{,}64 \cdot \omega^2 \\ &< 0{,}25 + 0{,}64 \cdot \tan\frac{\pi}{5} + \omega^2 < 1 + \omega^2 \end{aligned}$$

gilt. Damit ist auch im Falle $r = 3$ die Inklusion $\tilde{F}_{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}_+$ gezeigt. ∎

Proposition 58. *Die gegenseitige Lage der Hyperebenen um die Kante $E_{1,4} \cap E_{4,6} \cap E_e$ ist in der Abbildung dargestellt. Es gilt insbesondere*

$$I_{1,4} \cap I_{4,6} \cap E_{2,8} \cap E_e = I_{1,4} \cap I_{4,6} \cap E_{3,2} \cap E_e = E_{1,4} \cap E_{4,6} \cap E_e,$$

$$I_{1,4} \cap I_{4,6} \cap E_{2,8} \cap E_e \subset I_{2,8} \cap E_e \quad \textit{und} \quad I_{1,4} \cap I_{4,6} \cap E_{2,8} \cap E_e \subset I_{3,2} \cap E_e.$$

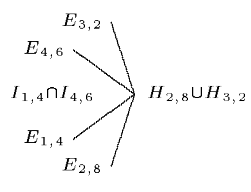


Abbildung 16. Hyperebenen durch die Kante $E_{1,4} \cap E_{4,6} \cap E_e$ (Schnittbild).

Beweis. Die Geraden $E_{4,6}(\omega)$, $E_{1,4}(\omega)$ und $E_{1,4} \cap E_{4,6} \cap E_e$ haben, wie bereits in Lemma 56 ausgeführt, die folgenden Gleichungen:

$$z \in E_{4,6}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{\pi}{5} + z_2 \cos\frac{\pi}{5} = \frac{C-1}{S} \cdot (\sin\frac{\pi}{5} - \omega\cos\frac{\pi}{5}),$$

$$z \in E_{1,4}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{\pi}{5} - z_2 \cos\frac{\pi}{5} = \frac{C-1}{S} \cdot (\sin\frac{\pi}{5} + \omega\cos\frac{\pi}{5})$$

und

$$(1+i\omega, z) \in E_{1,4} \cap E_{4,6} \cap E_e \iff z = \frac{C-1}{S} \cdot (1 - i\omega).$$

Nach Proposition III.29 gilt

$$z \in E_{3,2}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{2\pi}{5} + z_2 \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{C-1}{S} \cdot (\sin\frac{2\pi}{5} - \omega\cos\frac{2\pi}{5})$$

und

$$z \in E_{2,8}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{2\pi}{5} - z_2 \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{C-1}{S} \cdot (\sin\frac{2\pi}{5} + \omega\cos\frac{2\pi}{5}).$$

Damit enthalten die Ebenen $E_{3,2} \cap E_e$ und $E_{2,8} \cap E_e$ die Gerade $E_{1,4} \cap E_{4,6} \cap E_e$. ∎

§21. Fundamentalbereiche F_e

Satz 59. *In den Fällen $\tilde\Gamma = \Gamma(5,5,3)^2$ und $\tilde\Gamma = \Gamma(5,5,5)^2$ gilt*

$$F_e = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{4} \Big((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m}) \cap (I_{m,4,1-m} \cup I_{m,4,3-m}) \Big).$$

Beweis. Wir wollen auf die Menge $\tilde F := \Psi(F_{\mathcal K})$ den Satz V.42 anwenden.

Fall $r=3$: Wir erinnern daran, daß die Gruppe $\tilde\Gamma = \Gamma(5,5,3)^2$ durch Elemente $-r_u$, $-r_v$ und $-r_w$ erzeugt wird. Für die Elemente r_u, r_v und r_w gilt

$$r_u^5 = r_v^5 = r_w^3 = r_u r_v r_w = -1.$$

Es folgt $r_u r_v r_u r_v = r_v^{-1} r_u^{-1}$ und $r_v r_u r_v r_u = r_u^{-1} r_v^{-1}$.

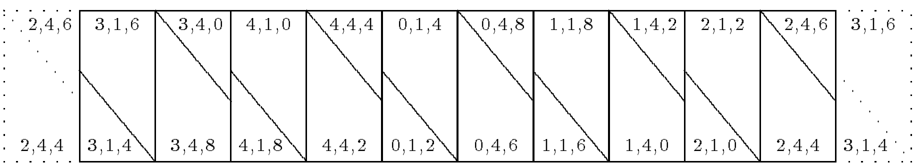


Abbildung 17. Seitenfläche von $F_{\mathcal K}$ für $\tilde\Gamma = \Gamma(5,5,3)^2$.

Seitenidentifikationen: Bis auf die Symmetrien genügt es, den Deckel, der mit dem Boden identifiziert wird, und die in $E_{4,6}$ bzw. $E_{4,8}$ enthaltenen Seitenflächen von $F_{\mathcal K}$ zu betrachten, denn es gilt $I_{m,1,2-m} = \rho^m\eta(I_{4,8})$, $I_{m,1,4-m} = \rho^m\eta(I_{4,6})$, $I_{m,4,1-m} = \rho^m(I_{4,6})$, $I_{m,4,3-m} = \rho^m(I_{4,8})$.
r_u^2 (Deckel): Multiplikation (von links) mit $\bar r_u^2 = -r_u^3$:

$$g_{m,1,4-m} \mapsto g_{m+3,1,4-m}, \quad g_{m,4,3-m} \mapsto g_{m+3,4,3-m}$$

$g_{0,4,8}$: Multiplikation (von links) mit $\bar g_{0,4,8} = g_{2,1,0}$:

$$r_u^2 \mapsto g_{2,1,2}, \quad g_{1,1,8} \mapsto g_{1,4,2}, \quad g_{1,1,6} \mapsto g_{1,4,0}, \quad g_{0,4,6} \mapsto -r_u^3.$$

$g_{0,4,6}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,4,6} = g_{4,1,0}$:

$$-r_u^3 \mapsto g_{4,1,8}, \quad g_{0,4,4} \mapsto -r_u^3, \quad r_u^2 \mapsto g_{4,1,2}, \quad g_{0,4,8} \mapsto r_u^2, \quad g_{1,1,6} \mapsto g_{3,4,0}.$$

Um aus diesen Daten das Bild der linken unteren Ecke (siehe Abbildung) dieser Seitenfläche zu bestimmen, stellen wir diese Ecke nicht als $E_{0,1,2} \cap E_{-r_u^3} \cap E_{0,4,6} \cap E_e$ oder $E_{0,1,4} \cap E_{-r_u^3} \cap E_{0,4,6} \cap E_e$, sondern als $E_{0,4,4} \cap E_{-r_u^3} \cap E_{0,4,6} \cap E_e$ dar (vergleiche den Beweis der Proposition 55). Dadurch erhalten wir eine Darstellung des Bildes dieser Ecke unter $\bar{g}_{0,4,6} = g_{4,1,0}$ als $E_{4,1,8} \cap E_{-r_u^3} \cap E_{4,1,0} \cap E_e$, es ist also die rechte untere Ecke der zu $g_{4,1,0}$ gehörigen Seitenfläche. Die linke obere Ecke (siehe Abbildung) der zu $g_{0,4,6}$ gehörigen Seitenfläche stellen wir als $E_{0,4,8} \cap E_{r_u^2} \cap E_{0,4,6} \cap E_e$ dar und erhalten eine Darstellung des Bildes dieser Ecke unter $\bar{g}_{0,4,6} = g_{4,1,0}$ als $E_{4,1,2} \cap E_{r_u^2} \cap E_{4,1,0} \cap E_e$, es ist also die rechte obere Ecke der zu $g_{4,1,0}$ gehörigen Seitenfläche.

Kantenzyklen: Bis auf Symmetrien kommen in den folgenden drei Kantenzyklen alle Kanten von $F_{\mathcal{K}}$ vor.

$$(g_{0,4,8}, g_{1,1,8}) \mapsto (g_{1,4,2}, g_{2,1,0}) \mapsto (g_{2,4,4}, g_{3,1,4}).$$

$$(g_{0,4,8}, r_u^2) \mapsto (g_{2,1,2}, g_{2,1,0}) \mapsto (-r_u^3, g_{3,4,8}).$$

$$(g_{0,4,6}, g_{0,1,4}) \mapsto (g_{4,4,2}, g_{4,1,0}) \mapsto (g_{3,4,8}, g_{3,1,6}) \mapsto (g_{2,4,4}, g_{2,1,2}) \mapsto (g_{1,4,0}, g_{1,1,8}).$$

Der erste Zykel ist vom Typ $\aleph$, der zweite Zykel ist vom Typ $\beth$. Der dritte Zykel ist vom Typ $\gimel$ mit $a = g_{0,4,6}$, $b = g_{0,1,4}$, $c = g_{0,3,2}$ und $d = g_{0,2,8}$. Zu dem dritten Zykel siehe auch Proposition 58. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes V.42 erfüllt.

Fall $r = 5$: Wir erinnern daran, daß die Gruppe $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,5)^2$ durch Elemente $-r_u$, $-r_v$ und $-r_w$ erzeugt wird. Für die Elemente r_u, r_v und r_w gilt

$$r_u^5 = r_v^5 = r_w^5 = r_u r_v r_w = -1.$$

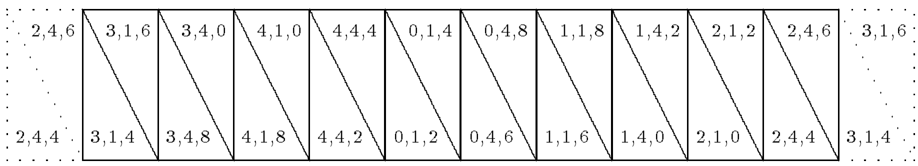


ABBILDUNG 18. Seitenfläche von $F_{\mathcal{K}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,5)^2$.

Seitenidentifikationen: Bis auf die Symmetrien genügt es, den Deckel, der mit dem Boden identifiziert wird, und die in $E_{4,8}$ enthaltene Seitenfläche von $F_{\mathcal{K}}$ zu betrachten, denn es gilt $I_{m,1,2-m} = \rho^m \eta(I_{4,8})$, $I_{m,1,4-m} = (\rho')^{2m-1}(I_{4,8})$, $I_{m,4,1-m} = (\rho')^{2m+1}\eta(I_{4,8})$, $I_{m,4,3-m} = \rho^m(I_{4,8})$.
r_u^2 (Deckel): Multiplikation (von links) mit $\bar{r}_u^2 = -r_u^3$:

$$g_{m,1,4-m} \mapsto g_{m+3,1,4-m}, \quad g_{m,4,3-m} \mapsto g_{m+3,4,3-m}$$

$g_{0,4,8}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,4,8} = g_{2,1,0}$:

$$r_u^2 \mapsto g_{2,1,2}, \quad g_{0,4,6} \mapsto -r_u^3, \quad -r_u^3 \mapsto g_{2,1,8}, \quad g_{0,4,0} \mapsto r_u^2,$$

Um aus diesen Daten das Bild der rechten oberen Ecke (auf dem Bild) dieser Seitenfläche zu bestimmen, stellen wir diese Ecke als $E_{0,4,0} \cap E_{r_u^2} \cap E_{0,4,8} \cap E_e$ dar. Dadurch erhalten wir eine Darstellung des Bildes dieser Ecke unter $\bar{g}_{0,4,8} = g_{2,1,0}$ als $E_{2,1,2} \cap E_{r_u^2} \cap E_{2,1,0} \cap E_e$, es ist also die rechte obere Ecke der zu $g_{2,1,0}$ gehörigen Seitenfläche. Die rechte untere Ecke (auf dem Bild) der zu $g_{0,4,8}$ gehörigen Seitenfläche stellen wir als $E_{0,4,6} \cap E_{-r_u^3} \cap E_{0,4,8} \cap E_e$ dar und erhalten eine Darstellung des Bildes dieser Ecke unter $\bar{g}_{0,4,8} = g_{2,1,0}$ als $E_{2,1,8} \cap E_{-r_u^3} \cap E_{2,1,0} \cap E_e$, es ist also die linke untere Ecke der zu $g_{2,1,0}$ gehörigen Seitenfläche.

Kantenzyklen: Bis auf Symmetrien kommen in den folgenden zwei Kantenzyklen alle Kanten von $F_{\mathcal{K}}$ vor.

$$(g_{0,4,8}, r_u^2) \mapsto (g_{2,1,2}, g_{2,1,0}) \mapsto (-r_u^3, g_{3,4,8}).$$

$$(g_{0,4,6}, g_{0,1,4}) \mapsto (g_{4,4,2}, g_{4,1,0}) \mapsto (g_{3,4,8}, g_{3,1,6}) \mapsto (g_{2,4,4}, g_{2,1,2}) \mapsto (g_{1,4,0}, g_{1,1,8}).$$

Der erste Zykel ist vom Typ ב. Der zweite Zykel ist vom Typ ג mit $a = g_{0,4,6}$, $b = g_{0,1,4}$, $c = g_{0,3,2}$ und $d = g_{0,2,8}$. Zu dem zweiten Zykel siehe auch Proposition 58. Damit sind auch in diesem Fall alle Voraussetzungen des Satzes V.42 erfüllt. ■

§22. Abbildungen der Fundamentalbereiche

Auf den nächsten Seiten findet man die Abbildungen und die Beschreibungen der Seitenidentifikationen der Fundamentalbereiche F_e für die Fälle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,r)^2$ mit $r \in \{3,5\}$. Man siehe hierzu auch den Abschnitt mit Erklärung der Abbildungen von F_e.

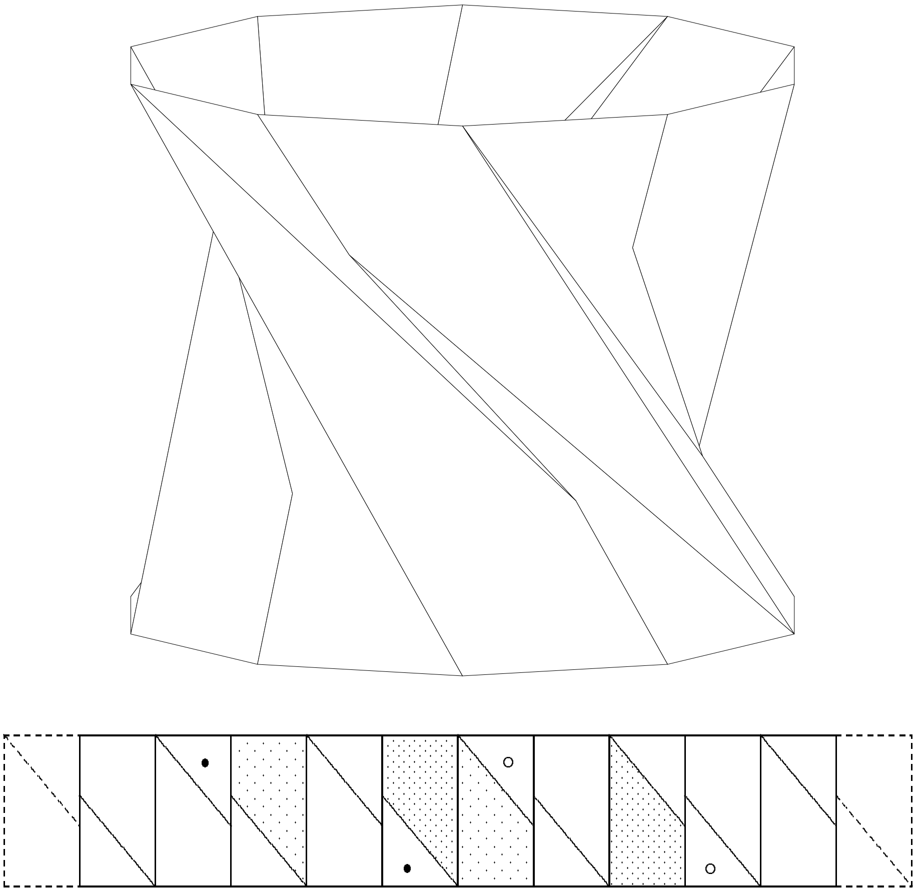


Abbildung 19. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,3)^2$. Singularität W_{17}.

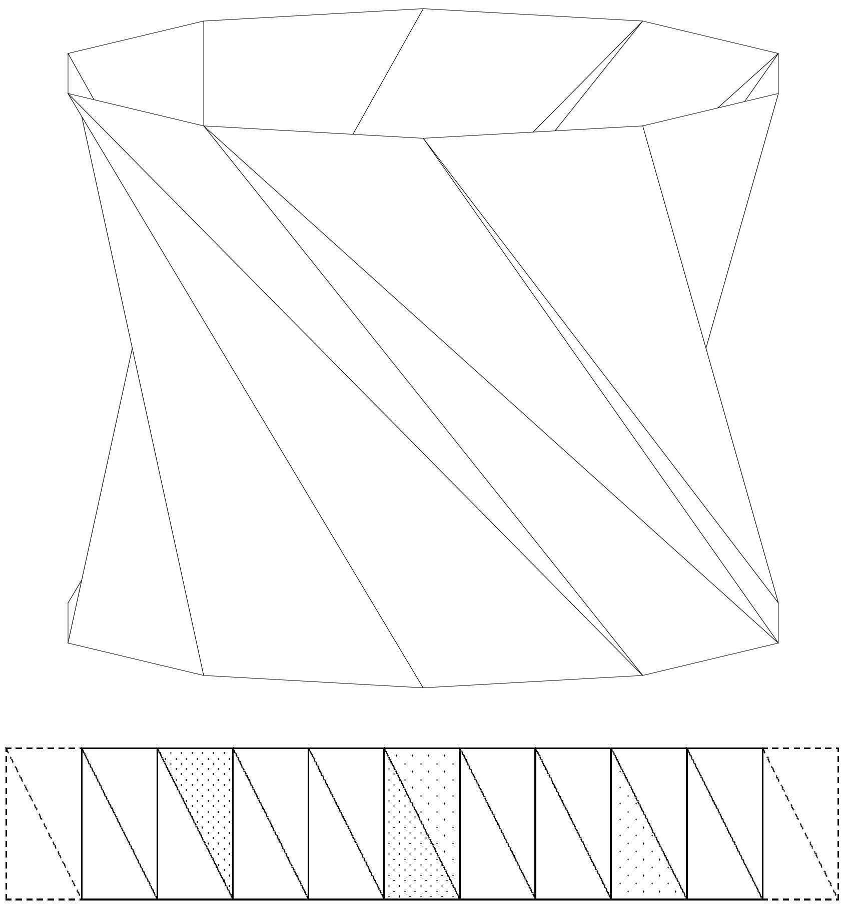


Abbildung 20. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(5,5,5)^2$. Singularität U_{16}.

Kapitel VIII

Der Fall $\Gamma(7,5,3)^2$

Бывает, что усердие
превозмогает и рассудок.

Козьма Прутков

Für die Konstruktion des Fundamentalbereichs von $\tilde{\Gamma} := \Gamma(7,5,3)^2$ sei der Fixpunkt $u = 0$ der Ordnung 7 gewählt. Wir werden zeigen können, daß $F_e = F_{\mathcal{E}}$ gilt. Dafür werden wir $F_{\mathcal{E}}$ als $F_{\mathcal{E}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{E}}$ darstellen, wobei $\tilde{F}_{\mathcal{E}}$ ein kompaktes Polytop in $\mathbb{A}$ ist, das sogar in $\mathbb{A}_+$ enthalten ist, wie wir dann mit Hilfe der Proposition V.38 zeigen werden. Damit gilt $F_{\mathcal{E}} = \tilde{F}_{\mathcal{E}}$ und wir erhalten eine Darstellung von $F_{\mathcal{E}}$ als kompaktes Polytop in $\mathbb{A}_+$. Schließlich wenden wir auf die Menge $\tilde{F} := \Psi(F_{\mathcal{E}})$ den Satz V.42 an, um $\mathcal{F}_e = \tilde{F}$ und $F_e = F_{\mathcal{E}}$ zu beweisen.

Zur Erinnerung. Es gilt $I_7 = [-\tan\frac{\pi}{7}, \tan\frac{\pi}{7}]$, $I_7^+ = [0, \tan\frac{\pi}{7}]$ und $I_7^- = [-\tan\frac{\pi}{7}, 0]$. Für $\omega \in I_7$ gilt

$$\ell_{\mathcal{K}}^-(\omega) = \frac{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{7}\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2} - \cos^2\frac{\pi}{5}}}{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{3} - 1}}.$$

Notation. Für $\omega \in I_7$ sei $r_1(\omega) := \sqrt{1+\omega^2}$ und $r_2(\omega) := \sqrt{1+\omega^2} \cdot \ell_{\mathcal{K}}^-(\omega)$.

Proposition 60. *Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Für $z \in \mathbb{A}_+(\omega)$ gilt $|z| < r_1(\omega)$. Für $z \in F_{\mathcal{K}}(\omega)$ und damit auch für $z \in F_{\mathcal{E}}(\omega) \subset F_{\mathcal{K}}(\omega)$ gilt $|z| < r_2(\omega)$. Die Funktionen r_1 und r_2 sind konvex, für $\omega \in \partial I_7$ und damit für alle $\omega \in I_7$ gilt*

$$r_1(\omega) < 1{,}109917 \quad \text{und} \quad r_2(\omega) < 0{,}9758.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Propositionen III.12, V.38, Lemma V.45 und Rechnung. ■

Wir erinnern an Proposition V.44, die auch in diesem Abschnitt oft benutzt wird:

Proposition 61. *Ist die Funktion f linear und die Funktion g konvex, so gilt für $a, b \in \mathbb{R}$*

$$f(\omega) \geqslant g(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in [a,b] \iff f(\omega) \geqslant g(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \partial[a,b] = \{a,b\}.$$

Diese Aussage gilt insbesondere auch dann, wenn auch die Funktion g linear ist.

Proposition 62. *Es gilt $F_{\mathcal{E}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{E}}$ mit*

$$\tilde{F}_{\mathcal{E}} = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{6} \Big((I_{m,1,2-m} \cup I_{m,1,4-m} \cup I_{m,1,6-m}) \cap (I_{m,2,10-m} \cup I_{m,2,12-m}) \cap \\ \cap (I_{m,3,2-m} \cup I_{m,3,4-m}) \cap (I_{m,4,8-m} \cup I_{m,4,10-m} \cup I_{m,4,12-m}) \Big).$$

Beweis. Zuerst berechnen wir, wie in Proposition III.29 angegeben, die Ungleichungen aller im Beweis auftretender Halbräume. Die Werte der linearen Funktionen $\alpha_{m,l,k}$, $\alpha_{l,k}$ und $\beta_{l,k}$, die später im Beweis benötigt werden, werden auch mit Hilfe dieser Proposition numerisch ausgerechnet.

(1) $$z \in I_{1,10}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant \alpha_{1,10}(\omega)$$

(2) $$z \in I_{1,12}(\omega) \iff z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant \alpha_{1,12}(\omega)$$

(3) $$z \in I_{1,0}(\omega) \iff -z_2 \geqslant \alpha_{1,0}(\omega)$$

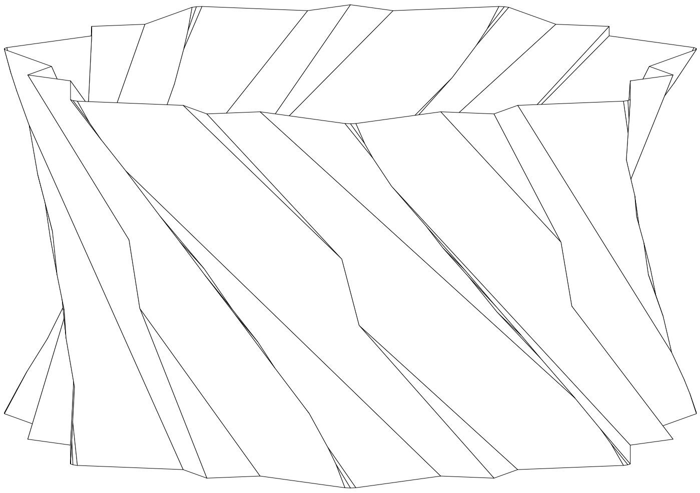


ABBILDUNG 21. Menge $\tilde{F}_{\mathcal{E}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$.

$$z \in H_{1,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{7} + z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant -\alpha_{1,2}(\omega) \tag{4}$$

$$z \in H_{1,6}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} - z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{1,6}(\omega) \tag{5}$$

$$z \in I_{1,8}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} + z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant \frac{1}{B}\cdot\beta_{1,8}(\omega) \tag{6}$$

$$z \in H_{4,8}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} + z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,8}(\omega) \tag{7}$$

$$z \in H_{4,10}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,10}(\omega) \tag{8}$$

$$z \in H_{4,12}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant -\frac{1}{B}\cdot\beta_{4,12}(\omega) \tag{9}$$

$$z \in I_{2,4}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{3\pi}{7} - z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant \alpha_{2,4}(\omega) \tag{10}$$

$$z \in I_{2,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{7} + z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant \alpha_{2,2}(\omega) \tag{11}$$

$$z \in H_{2,0}(\omega) \Longleftrightarrow -z_2 \geqslant -\alpha_{2,0}(\omega) \tag{12}$$

$$z \in I_{2,6}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} - z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant \alpha_{2,6}(\omega) \tag{13}$$

$$z \in H_{2,8}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} + z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant -\alpha_{2,8}(\omega) \tag{14}$$

$$z \in I_{2,0}(\omega) \Longleftrightarrow z_2 \geqslant \alpha_{2,0}(\omega) \tag{15}$$

$$z \in H_{2,12}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant -\alpha_{2,12}(\omega) \tag{16}$$

$$z \in H_{4,8}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} + z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant -\alpha_{4,8}(\omega) \tag{17}$$

$$z \in H_{4,10}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant -\alpha_{4,10}(\omega) \tag{18}$$

$$z \in H_{4,12}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant -\alpha_{4,12}(\omega) \tag{19}$$

$$z \in I_{2,8}(\omega) \Longleftrightarrow -z_1 \sin\frac{\pi}{7} - z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant \alpha_{2,8}(\omega) \tag{20}$$

$$z \in H_{2,10}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant -\alpha_{2,10}(\omega) \tag{21}$$

$$z \in H_{1,4}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{3\pi}{7} - z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant -\alpha_{1,4}(\omega) \tag{22}$$

$$z \in H_{1,6}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{\pi}{7} - z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant -\alpha_{1,6}(\omega) \tag{23}$$

$$z \in I_{1,2}(\omega) \Longleftrightarrow -z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant \alpha_{1,2}(\omega) \tag{24}$$

$$z \in H_{6,4,2}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant -\alpha_{6,4,2}(\omega) \tag{25}$$

$$z \in H_{6,4,4}(\omega) \Longleftrightarrow z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant -\alpha_{6,4,4}(\omega) \tag{26}$$

$$z \in H_{6,4,6}(\omega) \Longleftrightarrow -z_2 \geqslant -\alpha_{6,4,6}(\omega) \tag{27}$$

Aus Symmetriegründen genügt es, die folgenden Behauptungen **(a)**–**(i)** zu zeigen.
(a) $I_{1,10} \cap F_{\mathcal{E}} = \varnothing$:
Aus der Ungleichung (1) folgt $|z| \geqslant \alpha_{1,10}(\omega)$ für $z \in I_{1,10}(\omega)$. Es genügt also,

$$\alpha_{1,10}(\omega) \geqslant r_2(\omega)$$

für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{1,10}(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}04, \quad \alpha_{1,10}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}53.$$

(b) $I_{1,12} \cap (\mathbb{A}_+ \cap S_e) = \varnothing$:
Aus der Ungleichung (2) folgt $|z| \geqslant \alpha_{1,12}(\omega)$ für $z \in I_{1,12}(\omega)$. Es genügt also,

$$\alpha_{1,12}(\omega) \geqslant r_1(\omega)$$

für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{1,12}(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}53, \quad \alpha_{1,12}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}14.$$

(c) $I_{1,0} \cap H_{1,2} \cap F_{\mathcal{E}} = \varnothing$:
(c.1) $I_{1,0} \cap H_{1,2} \cap F_{\mathcal{E}} \cap S_e^+ = \varnothing$: Durch Addition der Ungleichungen (3) und (4) ergibt sich für $z \in (I_{1,0} \cap H_{1,2})(\omega)$

$$\alpha_{1,0}(\omega) - \alpha_{1,2}(\omega) \leqslant z_1 \sin\frac{2\pi}{7} + z_2(\cos\frac{2\pi}{7} - 1) = 2\sin\frac{\pi}{7}(z_1\cos\frac{\pi}{7} - z_2\sin\frac{\pi}{7})$$

und damit

$$|z| \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\alpha_{1,0}(\omega) - \alpha_{1,2}(\omega)}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Es genügt also, $f(\omega) \geqslant r_2(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7^+$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{1,0}(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}14, \quad \alpha_{1,0}(0) > 0{,}65,$$
$$-\alpha_{1,2}(\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}17, \quad -\alpha_{1,2}(0) > 0{,}25$$

und damit

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}11, \quad f(0) > 1{,}03.$$

(c.2) $I_{1,0} \cap H_{1,2} \cap F_{\mathcal{E}} \cap S_e^- = \varnothing$: Durch Addition der mit 9 multiplizierten Ungleichung (3) mit der mit 11 multiplizierten Ungleichung (4) ergibt sich für $z \in (I_{1,0} \cap H_{1,2})(\omega)$

$$9\alpha_{1,0}(\omega) - 11\alpha_{1,2}(\omega) \leqslant z_1 \cdot 11\sin\frac{2\pi}{7} + z_2(11\cos\frac{2\pi}{7} - 9) \leqslant |z| \cdot \sqrt{202 - 198\cos\frac{2\pi}{7}}$$

und damit

$$|z| \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{9\alpha_{1,0}(\omega) - 11\alpha_{1,2}(\omega)}{\sqrt{202 - 198\cos\frac{2\pi}{7}}}.$$

Es genügt also, $f(\omega) \geqslant r_2(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7^-$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{1,0}(0) > 0{,}65, \quad \alpha_{1,0}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}16,$$
$$-\alpha_{1,2}(0) > 0{,}256, \quad -\alpha_{1,2}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}67$$

und damit

$$f(0) > 0{,}977, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}99.$$

(d) $I_{1,8} \cap H_{1,6} \cap S_e \subset H_{4,8} \cap H_{4,10} \cap H_{4,12}$:
Es gilt

$$-\beta_{1,6}(\tan\frac{\pi}{7}) > 2, \quad -\beta_{1,6}(-\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}2,$$
$$\beta_{1,8}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}1, \quad \beta_{1,8}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 2{,}8.$$

(d.1) $I_{1,8} \cap S_e \subset H_{4,8}$: Durch Vergleich der Ungleichungen (6) und (7) sieht man, daß es genügt,

$$\beta_{1,8}(\omega) \geqslant -\beta_{4,8}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen. Die Rechnungen zeigen, daß gilt

$$\beta_{1,8}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}1, \quad \beta_{1,8}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 2{,}8,$$
$$-\beta_{4,8}(\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}1, \quad -\beta_{4,8}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 2{,}1.$$

(d.2) $I_{1,8} \cap H_{1,6} \cap S_e \subset H_{4,10}$: Die Addition der Ungleichung (5) mit der mit $2\cos\frac{2\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (6) ergibt für $z \in (I_{1,8} \cap H_{1,6})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant \frac{1}{B} \cdot \left(-\beta_{1,6}(\omega) + 2\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \beta_{1,8}(\omega)\right).$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (8) ergibt, daß $f(\omega) \geqslant -\beta_{4,10}(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen ist, wobei $f(\omega) := -\beta_{1,6}(\omega) + 2\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \beta_{1,8}(\omega)$. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 2{,}1, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 3{,}2$$

einerseits und

$$-\beta_{4,10}(\tan\frac{\pi}{7}) < 2{,}02, \quad -\beta_{4,10}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 1{,}9$$

andererseits.

(d.3) $I_{1,8} \cap H_{1,6} \cap S_e \subset H_{4,12}$: Die Addition der mit $(\cos\frac{2\pi}{7} + 0{,}5)$ multiplizierten Ungleichung (5) mit der mit 0,5 multiplizierten Ungleichung (6) und Division des Ergebnisses durch $\cos\frac{\pi}{7}$ ergibt für $z \in (I_{1,8} \cap H_{1,6})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2 \cos\frac{2\pi}{7} \geqslant \frac{1}{B} \cdot \frac{-(2\cos\frac{2\pi}{7} + 1) \cdot \beta_{1,6}(\omega) + \beta_{1,8}(\omega)}{2\cos\frac{\pi}{7}}$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (9) ergibt, daß $f(\omega) \geqslant -\beta_{4,12}(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen ist, wobei $f(\omega) := \frac{-(2\cos\frac{2\pi}{7}+1)\cdot\beta_{1,6}(\omega)+\beta_{1,8}(\omega)}{2\cos\frac{\pi}{7}}$. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 2{,}5, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}3$$

einerseits und

$$-\beta_{4,12}(\tan\frac{\pi}{7}) < 1{,}9, \quad -\beta_{4,12}(-\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}4$$

andererseits.

(e) $I_{2,4} \cap (\mathbb{A}_+ \cap S_e) = \varnothing$:

Aus Ungleichung (10) folgt $|z| \geqslant \alpha_{2,4}(\omega)$ für $z \in I_{2,4}(\omega)$. Es genügt also, $\alpha_{2,4}(\omega) \geqslant r_1(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{2,4}(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}3, \quad \alpha_{2,4}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}15.$$

(f) $I_{2,2} \cap H_{2,0} \cap F_{\mathcal{E}} = \varnothing$:

Durch Addition der Ungleichung (12) mit der mit $\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (11) ergibt sich für $z \in (I_{2,2} \cap H_{2,0})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{3\pi}{7} - z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} \cdot \alpha_{2,2}(\omega) - \alpha_{2,0}(\omega)$$

und damit

$$|z| \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} \cdot \alpha_{2,2}(\omega) - \alpha_{2,0}(\omega).$$

Es genügt also, $f(\omega) \geqslant r_2(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{2,2}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}64, \quad \alpha_{2,2}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}31,$$
$$-\alpha_{2,0}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}33, \quad -\alpha_{2,0}(-\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}65$$

und damit

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}12 \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}98.$$

(g) $I_{2,6} \cap H_{2,8} \cap F_{\mathcal{E}} = \varnothing$:

Durch Addition der Ungleichungen (13) und (14) ergibt sich für $z \in (I_{2,6} \cap H_{2,8})(\omega)$

$$2z_1 \sin\frac{\pi}{7} \geqslant \alpha_{2,6}(\omega) - \alpha_{2,8}(\omega)$$

und damit

$$|z| \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\alpha_{2,6}(\omega) - \alpha_{2,8}(\omega)}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Es genügt also, $f(\omega) \geqslant r_2(\omega)$ für $\omega \in \partial I_7$ zu zeigen. Die Rechnung zeigt

$$\alpha_{2,6}(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}15, \quad \alpha_{2,6}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}29,$$
$$-\alpha_{2,8}(\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}3, \quad -\alpha_{2,8}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}61$$

und damit

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}979, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}03.$$

(h) $I_{2,0} \cap H_{2,12} \cap S_e \subset H_{4,8} \cap H_{4,10} \cap H_{4,12}$:
Es gilt

$$\alpha_{2,0}(\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}34, \quad \alpha_{2,0}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}64,$$
$$-\alpha_{2,12}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}9, \quad -\alpha_{2,12}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}33.$$

(h.1) $H_{2,12} \cap S_e \subset H_{4,12}$: Durch Vergleich der Ungleichungen (16) und (19) sieht man, daß es genügt,

$$-\alpha_{2,12}(\omega) \geqslant -\alpha_{4,12}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen. Die Rechnungen zeigen, daß gilt

$$-\alpha_{2,12}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}9, \quad -\alpha_{2,12}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}33,$$
$$-\alpha_{4,12}(\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}68, \quad -\alpha_{4,12}(-\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}16.$$

(h.2) $I_{2,0} \cap H_{2,12} \cap S_e \subset H_{4,8}$: Die Addition der mit $\sin\frac{3\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (15) mit der mit $\sin\frac{\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (16) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{2\pi}{7}$ ergibt für $z \in (I_{2,0} \cap H_{2,12})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{\pi}{7} + z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\sin\frac{3\pi}{7} \cdot \alpha_{2,0}(\omega) - \sin\frac{\pi}{7} \cdot \alpha_{2,12}(\omega)}{\sin\frac{2\pi}{7}}.$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (17) ergibt, daß

$$f(\omega) \geqslant -\alpha_{4,8}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen bleibt. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}07, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}98$$

einerseits und

$$-\alpha_{4,8}(\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}03, \quad -\alpha_{4,8}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}73$$

andererseits.

(h.3) $I_{2,0} \cap H_{2,12} \cap S_e \subset H_{4,10}$: Die Addition der Ungleichung (15) mit der mit $\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$ multiplizierten Ungleichung (16) ergibt für $z \in (I_{2,0} \cap H_{2,12})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{3\pi}{7} + z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \alpha_{2,0}(\omega) - \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} \cdot \alpha_{2,12}(\omega).$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (18) ergibt, daß

$$f(\omega) \geqslant -\alpha_{4,10}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen bleibt. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}78, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}05$$

einerseits und

$$-\alpha_{4,10}(\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}73, \quad -\alpha_{4,10}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}68$$

andererseits.

(i) $I_{2,8} \cap H_{2,10} \cap S_e \subset (H_{1,2} \cap H_{1,4} \cap H_{1,6}) \cup (H_{6,4,2} \cap H_{6,4,4} \cap H_{6,4,6})$:
Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{2,8}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}29, &\quad \alpha_{2,8}(-\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}62, \\ -\alpha_{2,10}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}61, &\quad -\alpha_{2,10}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}9, \\ \alpha_{1,2}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}16, &\quad \alpha_{1,2}(-\tan\frac{\pi}{7}) > -0{,}68. \end{aligned}$$

(i.1) $I_{2,8} \cap H_{2,10} \cap S_e \subset H_{1,4}$: Die Addition der mit $\sin\frac{\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (20) mit der mit $\sin\frac{3\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (21) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{2\pi}{7}$ ergibt für $z \in (I_{2,8} \cap H_{2,10})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{3\pi}{7} - z_2 \cos\frac{3\pi}{7} \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\sin\frac{\pi}{7} \cdot \alpha_{2,8}(\omega) - \sin\frac{3\pi}{7} \cdot \alpha_{2,10}(\omega)}{\sin\frac{2\pi}{7}}.$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (22) ergibt, daß

$$f(\omega) \geqslant -\alpha_{1,4}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen bleibt. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}92, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}77$$

einerseits und

$$-\alpha_{1,4}(\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}68, \quad -\alpha_{1,4}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}73$$

andererseits.

(i.2) $I_{2,8} \cap H_{2,10} \cap S_e \subset H_{1,6}$: Die Addition der mit $2\cos\frac{2\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (20) mit der Ungleichung (21) ergibt für $z \in (I_{2,8} \cap H_{2,10})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{\pi}{7} - z_2 \cos\frac{\pi}{7} \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := 2\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \alpha_{2,8}(\omega) - \alpha_{2,10}(\omega).$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (23) ergibt, daß

$$f(\omega) \geqslant -\alpha_{1,6}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen bleibt. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}97, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}12$$

einerseits und

$$-\alpha_{1,6}(\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}73, \quad -\alpha_{1,6}(-\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}03$$

andererseits.

(i.3) $H_{2,10} \cap S_e \subset H_{6,4,2}$: Durch Vergleich der Ungleichungen (21) und (25) sieht man, daß es ausreicht,

$$-\alpha_{2,10}(\omega) \geqslant -\alpha_{6,4,2}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen. Die Rechnungen zeigen, daß gilt

$$-\alpha_{2,10}(\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}61, \quad -\alpha_{2,10}(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}9,$$
$$-\alpha_{6,4,2}(\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}03, \quad -\alpha_{6,4,2}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}73.$$

(i.4) $I_{1,2}\cap H_{2,10}\cap S_e \subset H_{6,4,4}$: Die Addition der mit $\sin\frac{2\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (24) mit der mit $\sin\frac{3\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (21) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{\pi}{7}$ ergibt für $z \in (I_{1,2}\cap H_{2,10})(\omega)$

$$z_1 \sin\frac{2\pi}{7} - z_2\cos\frac{2\pi}{7} \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\alpha_{1,2}(\omega) - \sin\frac{3\pi}{7}\cdot\alpha_{2,10}(\omega)}{\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (26) ergibt, daß

$$f(\omega) \geqslant -\alpha_{6,4,4}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen bleibt. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}65, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}79$$

einerseits und

$$-\alpha_{6,4,4}(\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}73, \quad -\alpha_{6,4,4}(-\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}68$$

andererseits.

(i.5) $I_{1,2}\cap H_{2,10}\cap S_e \subset H_{6,4,6}$: Die Addition der mit $\sin\frac{3\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (24) mit der mit $\sin\frac{2\pi}{7}$ multiplizierten Ungleichung (21) und Division des Ergebnisses durch $\sin\frac{\pi}{7}$ ergibt für $z \in (I_{1,2}\cap H_{2,10})(\omega)$

$$-z_2 \geqslant f(\omega) \quad \text{mit } f(\omega) := \frac{\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\alpha_{1,2}(\omega) - \sin\frac{2\pi}{7}\cdot\alpha_{2,10}(\omega)}{\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Der Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (27) ergibt, daß

$$f(\omega) \geqslant -\alpha_{6,4,6}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \partial I_7$$

zu zeigen bleibt. Die Rechnungen zeigen

$$f(\tan\frac{\pi}{7}) > 1{,}45, \quad f(-\tan\frac{\pi}{7}) > 0{,}09$$

einerseits und

$$-\alpha_{6,4,6}(\tan\frac{\pi}{7}) < 0{,}68, \quad -\alpha_{6,4,6}(-\tan\frac{\pi}{7}) < -0{,}16$$

andererseits.

(i.6) Aus (i.1–2) folgt $I_{2,8}\cap H_{2,10}\cap S_e \subset H_{1,4}\cap H_{1,6}$. Aus (i.3–5) folgt $I_{1,2}\cap H_{2,10}\cap S_e \subset H_{6,4,2}\cap H_{6,4,4}\cap H_{6,4,6}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} I_{2,8}\cap H_{2,10}\cap S_e &= ((I_{2,8}\cap H_{2,10}\cap S_e)\cap H_{1,2}) \cup ((I_{2,8}\cap H_{2,10}\cap S_e)\cap I_{1,2}) \\ &\subset (H_{1,2}\cap H_{1,4}\cap H_{1,6}) \cup (H_{6,4,2}\cap H_{6,4,4}\cap H_{6,4,6}). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ∎

Proposition 63. *Es gilt $F_{\mathcal{E}} = \tilde{F}_{\mathcal{E}}$.*

Beweis. Nach Proposition 62 gilt $F_{\mathcal{E}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{E}}$. Man rechnet nach, daß $\ell_{\mathcal{K}}^- < 0{,}88 < 1$ gilt. Die Menge $\tilde{F}_{\mathcal{E}}$ ist zusammenhängend und nicht in $\mathbb{A}_-$ enthalten, damit ist sie nach Proposition V.38 in $\mathbb{A}_+$ enthalten. Damit gilt $F_{\mathcal{E}} = \mathbb{A}_+ \cap \tilde{F}_{\mathcal{E}} = \tilde{F}_{\mathcal{E}}$. ∎

Satz 64. *Im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$ gilt*

$$\begin{aligned} F_e = S_e \cap \bigcap_{m=0}^{6} \Big(&(I_{m,1,2-m}\cup I_{m,1,4-m}\cup I_{m,1,6-m}) \\ &\cap (I_{m,2,10-m}\cup I_{m,2,12-m}) \\ &\cap (I_{m,3,2-m}\cup I_{m,3,4-m}) \\ &\cap (I_{m,4,8-m}\cup I_{m,4,10-m}\cup I_{m,4,12-m})\Big). \end{aligned}$$

Beweis. Auf die Menge $\tilde{F} := \Psi(F_{\mathcal{E}})$ wollen wir nun das kombinatorische Kriterium V.42 anwenden. Wir erinnern daran, daß die Gruppe $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$ durch Elemente $-r_u$, $-r_v$ und $-r_w$ erzeugt wird. Für die Elemente r_u, r_v und r_w gilt

$$r_u^7 = r_v^5 = r_w^3 = r_u r_v r_w = -1.$$

Es folgt $r_u r_v r_u r_v = r_v^{-1} r_u^{-1}$ und $r_v r_u r_v r_u = r_u^{-1} r_v^{-1}$.

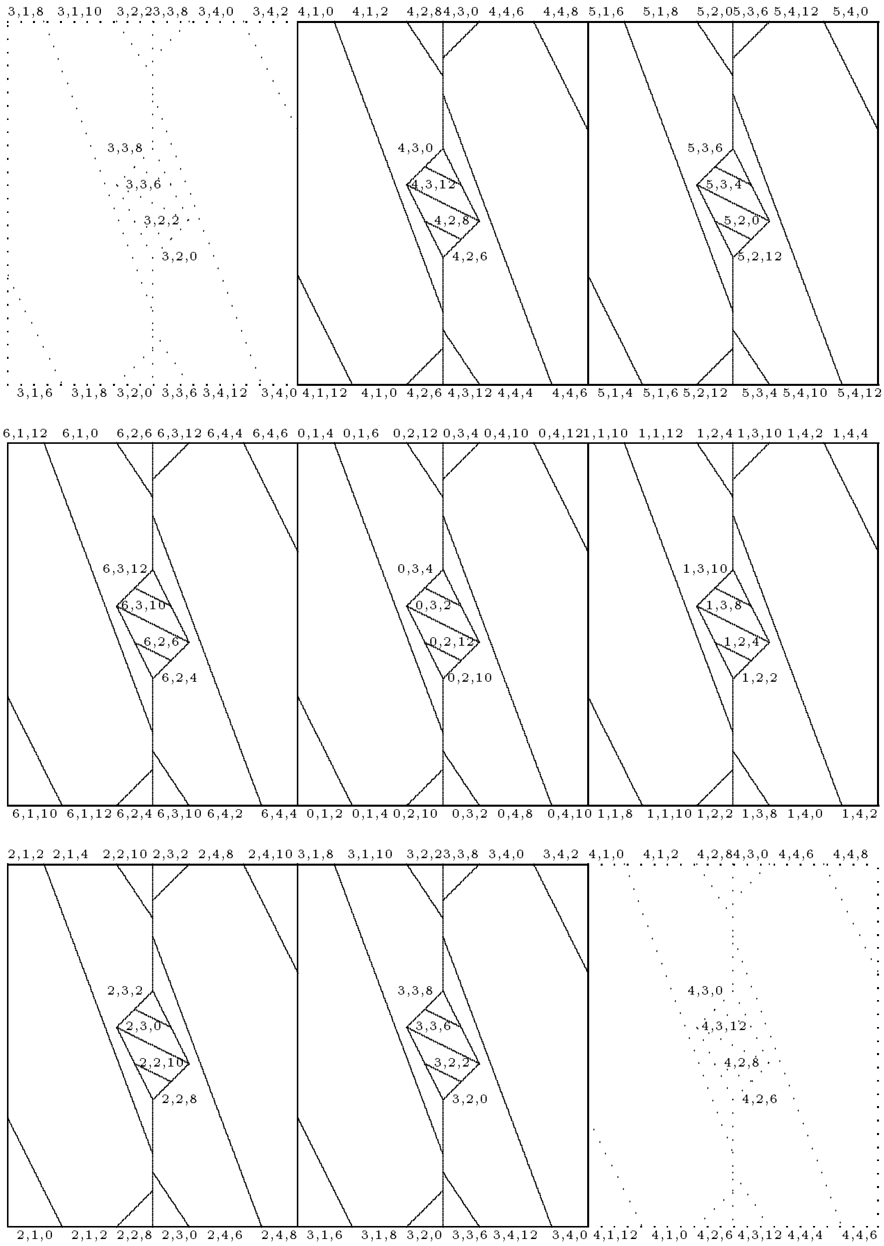


ABBILDUNG 22. Seitenfläche von $F_{\mathcal{E}}$ für $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$.

Seitenidentifikationen: Wir führen die Rechnungen bis auf die Symmetrien von $F_{\mathcal{K}}$ durch.

r_u^2 (Deckel): Multiplikation (von links) mit $\bar{r}_u^2 = -r_u^5$:

$$\begin{aligned} g_{m,1,4-m} &\mapsto g_{m+5,1,4-m} = g_{m+5,1,2-(m+5)}, \\ g_{m,1,6-m} &\mapsto g_{m+5,1,6-m} = g_{m+5,1,4-(m+5)}, \\ g_{m,2,12-m} &\mapsto g_{m+5,2,12-m} = g_{m+5,2,10-(m+5)}, \\ g_{m,3,4-m} &\mapsto g_{m+5,3,4-m} = g_{m+5,3,2-(m+5)}, \\ g_{m,4,10-m} &\mapsto g_{m+5,4,10-m} = g_{m+5,4,8-(m+5)}, \\ g_{m,4,12-m} &\mapsto g_{m+5,4,12-m} = g_{m+5,4,10-(m+5)}. \end{aligned}$$

$g_{0,4,8}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,4,8} = g_{6,1,0}$:

$$\begin{gathered} -r_u^5 \mapsto g_{6,1,12}, \quad g_{0,3,2} \mapsto g_{6,4,2}, \quad g_{0,1,4} \mapsto g_{6,2,4}, \quad g_{0,1,6} \mapsto g_{6,2,6}, \quad g_{0,2,10} \mapsto g_{6,3,10}, \\ g_{0,2,12} \mapsto g_{6,3,12}, \quad g_{0,3,2} \mapsto g_{6,4,2}, \quad g_{0,3,4} \mapsto g_{6,4,4}, \quad g_{0,4,10} \mapsto r_u^2. \end{gathered}$$

$g_{0,4,10}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,4,10} = g_{4,1,0}$:

$$\begin{gathered} r_u^2 \mapsto g_{4,1,2}, \quad g_{0,4,12} \mapsto r_u^2, \quad g_{1,1,10} \mapsto g_{3,4,2}, \quad g_{1,1,8} \mapsto g_{3,4,0}, \quad -r_u^5 \mapsto g_{4,1,12}, \\ g_{0,4,8} \mapsto -r_u^5, \quad g_{0,1,6} \mapsto g_{4,2,6}, \quad g_{0,2,12} \mapsto g_{4,3,12}, \quad g_{0,3,4} \mapsto g_{4,4,4}. \end{gathered}$$

$g_{0,4,12}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,4,12} = g_{2,1,0}$:

$$r_u^2 \mapsto g_{2,1,2}, \quad g_{1,1,10} \mapsto g_{1,4,2}, \quad g_{0,4,10} \mapsto -r_u^5.$$

$g_{0,3,2}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,3,2} = g_{5,2,0}$:

$$-r_u^5 \mapsto g_{5,2,12}, \quad g_{0,2,10} \mapsto g_{5,4,10}, \quad g_{0,1,4} \mapsto g_{5,3,4}, \quad g_{0,4,8} \mapsto g_{5,1,8}$$

und

$$g_{0,2,12} \mapsto g_{5,4,12}, \quad g_{0,1,6} \mapsto g_{5,3,6}, \quad g_{0,3,4} \mapsto r_u^2, \quad g_{0,4,8} \mapsto g_{5,1,8}.$$

$g_{0,3,4}$: Multiplikation (von links) mit $\bar{g}_{0,3,4} = g_{3,2,0}$:

$$\begin{gathered} r_u^2 \mapsto g_{3,2,2}, \quad g_{0,4,10} \mapsto g_{3,1,10}, \quad g_{0,2,12} \mapsto g_{3,4,12}, \quad g_{0,3,2} \mapsto -r_u^5, \\ g_{0,1,6} \mapsto g_{3,3,6}, \quad g_{0,4,8} \mapsto g_{3,1,8}. \end{gathered}$$

Kantenzyklen:

1. $(g_{0,4,10}, r_u^2) \mapsto (g_{4,1,2}, g_{4,1,0}) \mapsto (-r_u^5, g_{5,4,10})$,
2. $(g_{0,4,10}, g_{0,4,12}) \mapsto (r_u^2, g_{4,1,0}) \mapsto (g_{2,1,0}, -r_u^5)$,
3. $(g_{0,4,10}, g_{1,1,10}) \mapsto (g_{3,4,2}, g_{4,1,0}) \mapsto (g_{4,4,6}, g_{5,1,4})$,
4. $(g_{0,4,10}, g_{0,1,6}) \mapsto (g_{4,2,6}, g_{4,1,0}) \mapsto (g_{1,4,0}, g_{1,3,10})$,
5. $(g_{0,4,10}, g_{0,2,12}) \mapsto (g_{4,3,12}, g_{4,1,0}) \mapsto (g_{2,3,0}, g_{2,2,10})$,
6. $(g_{0,2,12}, r_u^2) \mapsto (g_{2,3,2}, g_{2,3,0}) \mapsto (-r_u^5, g_{5,2,12})$,
7. $(g_{0,2,12}, g_{0,1,6}) \mapsto (g_{2,4,6}, g_{2,3,0}) \mapsto (g_{1,4,0}, g_{1,1,12})$,
8. $(g_{0,2,12}, g_{0,3,4}) \mapsto (g_{2,1,4}, g_{2,3,0}) \mapsto (g_{3,2,0}, g_{3,4,12})$.

Die Zyklen 1, 2 und 6 sind vom Typ ב, die restlichen Zyklen sind vom Typ א. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes V.42 erfüllt. ∎

Auf der nächsten Seite findet man die Abbildungen und die Beschreibung der Seitenidentifikationen des Fundamentalbereichs F_e für den Fall $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$. Man siehe hierzu auch den Abschnitt mit Erklärung der Abbildungen von F_e. Die Abbildung auf der übernächsten Seite stellt einen vergrößerten Ausschnitt aus der Abbildung des Fundamentalbereichs dar. Dieser Ausschnitt enthält die Seitenflächen, die in dem Seitenschema auf der nächsten Seite mit 1, 3, 5 und 7 bezeichnet sind.

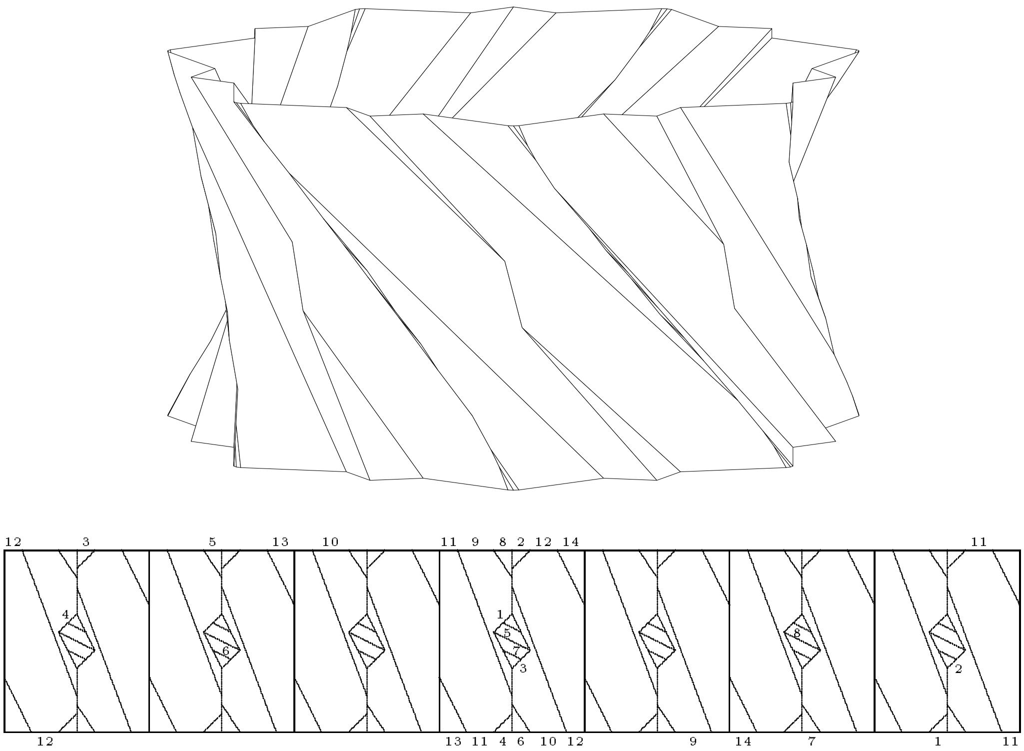


ABBILDUNG 23. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$.
Singularität S_{16}.

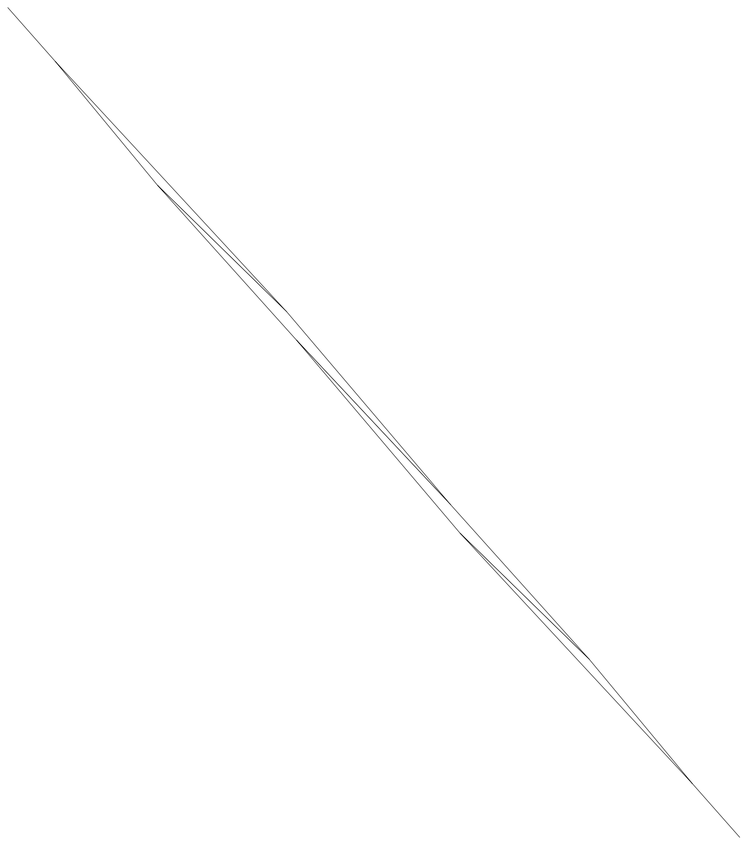


Abbildung 24. Fundamentalbereich F_e im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(7,5,3)^2$. Detailansicht.

Kapitel IX

Die Fundamentalbereiche in Serien

Надо сочинить закон или таблицу, по которой числа росли бы необъяснимыми непериодическими интервалами.

Даниил Хармс

Auf den folgenden Seiten werden die Abbildungen aller berechneten Fundamentalbereiche entsprechend den Arnoldschen Serien zusammengestellt, einschließlich der von Thomas Fischer, Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler und Stefan Scheidt bestimmten Fundamentalbereiche. Diese Zusammenstellung soll helfen, die Entsprechungen zwischen der kombinatorischen Struktur der Fundamentalbereiche und den Serien von Singularitäten festzustellen.

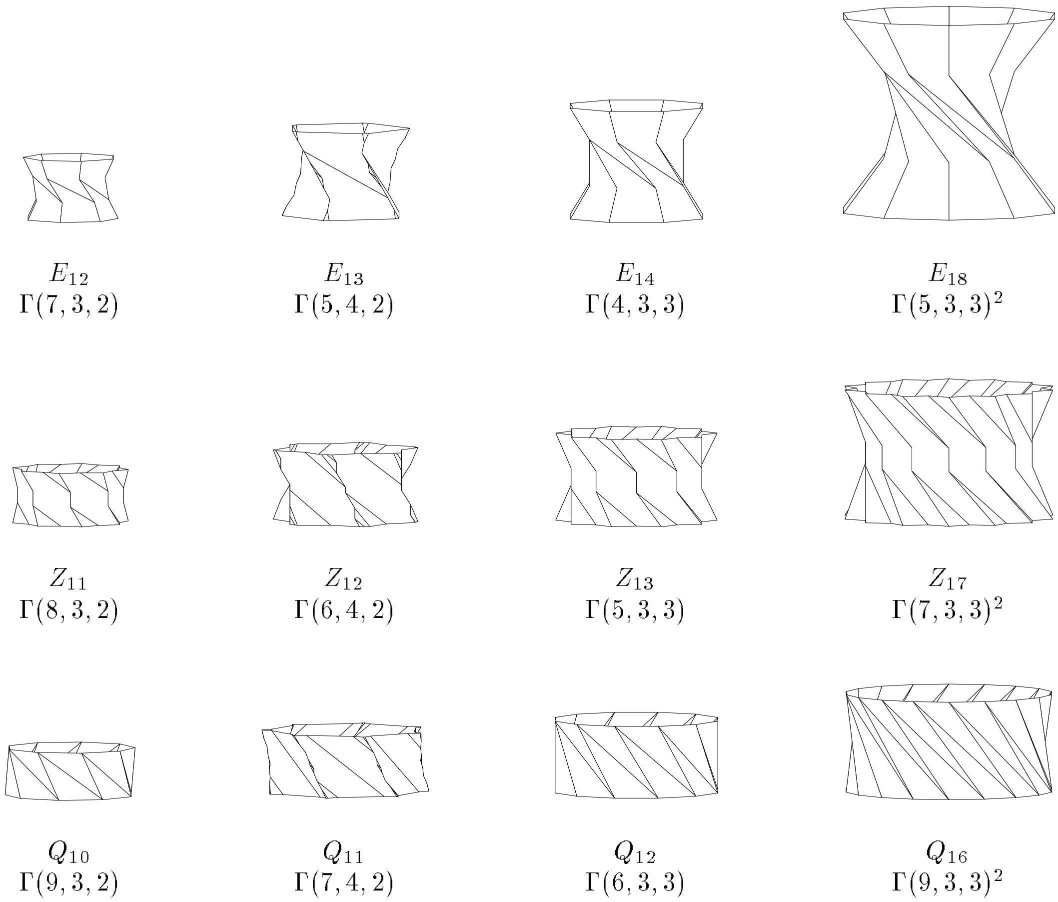
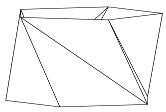
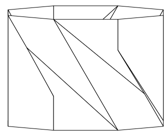


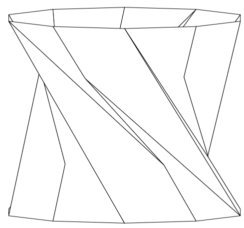
Abbildung 25. Serien E, Z, Q.



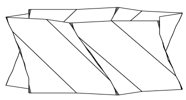
W_{12}
$\Gamma(5,5,2)$



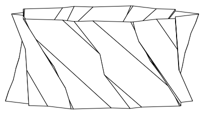
W_{13}
$\Gamma(4,4,3)$



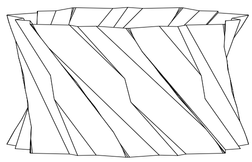
W_{17}
$\Gamma(5,5,3)^2$



S_{11}
$\Gamma(6,5,2)$

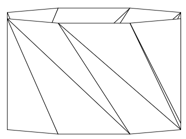


S_{12}
$\Gamma(5,4,3)$

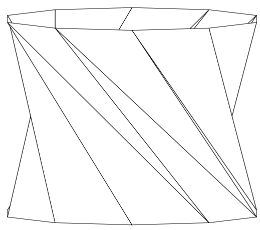


S_{16}
$\Gamma(7,5,3)^2$

Abbildung 26. Serien W und S.



U_{12}
$\Gamma(4,4,4)$



U_{16}
$\Gamma(5,5,5)^2$

ABBILDUNG 27. Serie U.

Ausblick

Пора: перо покоя просит;
Я девять песен написал;
На берег радостный выносит
Мою ладью девятый вал —
Хвала вам, девяти Каменам, и прочь.

Александр Пушкин

Die bisherigen Ergebnisse lassen vermuten, daß die kombinatorische Struktur der Fundamentalbereiche die Struktur der Arnoldschen Serien widerspiegelt. Da aber bis jetzt von jeder der sechs Serien nur jeweils zwei oder drei Singularitäten betrachtet wurden, ist es wichtig, für weitere Singularitäten aus diesen Serien die zugehörigen Fundamentalbereiche explizit auszurechnen. Die Überlegungen, die es ermöglichen, allgemein die Stufen und die Signaturen der zu den Singularitäten dieser Serien gehörenden Hochhebungen zu bestimmen, werden in der (noch zu erscheinenden) Diplomarbeit von Konrad Möhring zu lesen sein. In der folgenden Tabelle sind die Signaturen der Gruppen und die Stufen für die ersten Singularitäten der Serien aufgeführt.

1	E_{12} $7,3,2$	Z_{11} $8,3,2$	Q_{10} $9,3,2$			
1	E_{13} $5,4,2$	Z_{12} $6,4,2$	Q_{11} $7,4,2$	W_{12} $5,5,2$	S_{11} $6,5,2$	
1	E_{14} $4,3,3$	Z_{13} $5,3,3$	Q_{12} $6,3,3$	W_{13} $4,4,3$	S_{12} $5,4,3$	U_{12} $4,4,4$
1	$E_{3,0}$ $3,2,2,2$	$Z_{1,0}$ $4,2,2,2$	$Q_{2,0}$ $5,2,2,2$	$W_{1,0}$ $3,3,2,2$	$S_{1,0}$ $4,3,2,2$	$U_{1,0}$ $3,3,3,2$
2	E_{18} $5,3,3$	Z_{17} $7,3,3$	Q_{16} $9,3,3$	W_{17} $5,5,3$	S_{16} $7,5,3$	U_{16} $5,5,5$
3	E_{19} $7,4,2$	Z_{18} $10,4,2$	Q_{17} $13,4,2$	W_{18} $7,7,2$	S_{17} $10,7,2$	
5	E_{20} $11,3,2$	Z_{19} $16,3,2$	Q_{18} $21,3,2$			
1	$E_{4,0}$ $1;2$	$Z_{2,0}$ $1;3$	$Q_{3,0}$ $1;4$			
7	E_{24} $13,3,2$	Z_{23} $20,3,2$	Q_{22} $27,3,2$			
5	E_{25} $9,4,2$	Z_{24} $14,4,2$	Q_{23} $19,4,2$	W_{24} $9,9,2$	S_{23} $14,9,2$	
4	E_{26} $7,3,3$	Z_{25} $11,3,3$	Q_{24} $15,3,3$	W_{25} $7,7,3$	S_{24} $11,7,3$	U_{24} $7,7,7$
3	$E_{5,0}$ $5,2,2,2$	$Z_{3,0}$ $8,2,2,2$	$Q_{4,0}$ $11,2,2,2$	$W_{2,0}$ $5,5,2,2$	$S_{2,0}$ $8,5,2,2$	$U_{2,0}$ $5,5,5,2$
5	E_{30} $8,3,3$	Z_{29} $13,3,3$	Q_{28} $18,3,3$	W_{29} $8,8,3$	S_{28} $13,8,3$	U_{28} $8,8,8$
7	E_{31} $11,4,2$	Z_{30} $18,4,2$	Q_{29} $25,4,2$	W_{30} $11,11,2$	S_{29} $18,11,2$	
11	E_{32} $17,3,2$	Z_{31} $28,3,2$	Q_{30} $39,3,2$			
2	$E_{6,0}$ $1;3$	$Z_{4,0}$ $1;5$	$Q_{5,0}$ $1;7$			

Abbildung 28. Tabelle der Stufen und Signaturen.

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Konstruktion gibt uns (jedenfalls theoretisch) die Möglichkeit, außer den bereits betrachteten noch für zwölf weitere Singularitäten die Fundamentalbereiche auszurechnen, nämlich für die Singularitäten $E_{3,0}$, $Z_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $W_{1,0}$, $S_{1,0}$, $U_{1,0}$ und $E_{4,0}$, $Z_{2,0}$, $Q_{3,0}$, $E_{6,0}$, $Z_{4,0}$, $Q_{5,0}$. In den ersten sechs Fällen hat man es mit Vierecksgruppen zu tun, das heißt mit Gruppen von der Signatur $(0; p_1, p_2, p_3, p_4)$, in den anderen sechs Fällen geht es um Gruppen mit Signatur $(1; p)$. In allen diesen Fällen hat man nicht, wie bei Dreiecksgruppen, bis auf Konjugation nur eine Gruppe zu einer gegebenen Signatur, sondern eine kontinuierliche Familie von solchen Gruppen, so daß der kombinatorische Typ des Fundamentalbereichs sich nicht nur in Abhängigkeit von der Signatur, sondern auch in Abhängigkeit von dem Parameter der Familie von Gruppen ändern kann und im allgemeinen auch wird. Die Fälle der Viereckssingularitäten sind Gegenstand der Dissertation von Frank Rothenhäusler (in Arbeit).

Will man die zu den Serien gehörenden Fundamentalbereiche weiter verfolgen, so braucht man eine Verallgemeinerung der bisherigen Konstruktion auf die höheren Stufen. Die Konstruktion macht Gebrauch davon, daß die Pseudosphäre $\mathbb{S} = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ in $\mathbb{A}$ mit der durch $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 + b_1 \bar{b}_2, a_1 b_2 + b_1 \bar{a}_2)$ definierten Multiplikation isomorph zur Gruppe $\mathrm{SU}(1,1)$ ist. Man könnte nun eine

Multiplikation auf $\mathbb{S}$ betrachten, so daß die Pseudosphäre damit zur Gruppe G_k isomorph ist. Diese Multiplikation könnte nun linear auf ganz $\mathbb{R}^4$ fortgesetzt werden. Die Bilinearform $(\cdot\,,\,\cdot)$ ist dann äquivariant bezüglich der Multiplikation. Damit wären die Voraussetzungen dafür geschaffen, die in dieser Arbeit beschriebene Konstruktion auch für höhere Stufen nachzumachen. Ein Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, daß die durch die Identifikation mit der Pseudosphäre auf der Liegruppe G_k induzierte Lorentz-Metrik nicht mit der Metrik auf G_k übereinstimmt, die durch Hochhebung der natürlichen (von der Killingform kommenden) Lorentz-Metrik auf $\mathrm{SU}(1,1)$ entsteht, das heißt, die Überlagerungsabbildung $G_k \to \mathrm{SU}(1,1)$ ist keine Isometrie.

Eine andere Möglichkeit der Verallgemeinerung der Konstruktion auf die höheren Stufen wäre durch eine intrinsische Beschreibung der bisherigen Konstruktion gegeben, eine Beschreibung also, die von der Einbettung von $\mathrm{SU}(1,1)$ in $\mathbb{R}^4$ keinen Gebrauch mehr macht, sondern nur mit der Begriffen der pseudo-Riemannschen Geometrie von $\mathrm{SU}(1,1)$ auskommt. Als Vorbild könnte dabei die in der Einleitung bereits angesprochene Konstruktion des sphärischen Dodekaederraumes dienen, bei der sich das Hantieren mit den Tangentialräumen der dreidimensionalen Sphäre in die Sprache der Mittelsenkrechten zwischen jeweils zwei Punkten der Sphäre übersetzen läßt. Allerdings ist die Konstruktion in unserem Fall komplizierter, es ist also zu erwarten, daß auch ihre intrinsische Beschreibung komplizierter sein wird.

Es gibt noch ein für das Verständnis der Konstruktion der Fundamentalbereiche durchaus wichtiges Problem. Bis jetzt sind nur für endlich viele Signaturen die Fundamentalbereiche explizit ausgerechnet worden. Es ist interessant, für eine unendliche Familie von Signaturen die kombinatorische Struktur der Fundamentalbereiche zu bestimmen. Die im Kapitel über die Berechnung der Fundamentalbereiche im Falle $\tilde{\Gamma} = \Gamma(p,3,3)^2$ geleisteten Vorarbeiten, insbesondere der Satz VI.49, laden dazu ein, für alle Gruppen mit der Signatur $(0;p,3,3)$ die Fundamentalbereiche in der Stufe 1 und in der Stufe 2 (falls p ungerade) explizit zu berechnen.

Anhang
Formelsammlung

Trigonometrie

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x(3 - 4\sin^2 x),$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3).$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)),$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x + \tan y \cos x = \frac{\sin(x+y)}{\cos y}.$$

Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x - y \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$. Die Lösung des linearen Gleichungssystems $Av = b$ mit $A = \begin{pmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}$ läßt sich leicht mit Hilfe der Cramerschen Regel und der trigonometrischen Additionstheoreme ausrechnen: Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{pmatrix} = \sin x \cos y - \sin y \cos x = \sin(x-y) \neq 0$$

und analog

$$\det\begin{pmatrix} \sin z & \sin y \\ \cos z & \cos y \end{pmatrix} = \sin(z-y) \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} \sin x & \sin z \\ \cos x & \cos z \end{pmatrix} = \sin(x-z).$$

Damit ist

$$\left(\frac{\sin(z-y)}{\sin(x-y)}, \frac{\sin(x-z)}{\sin(x-y)}\right)$$

die Lösung des Gleichungssystems $Av = b$. Auch für die linearen Gleichungssysteme, in denen die trigonometrischen Funktionen und die Vorzeichen in der Matrix A und im Vektor b anders verteilt sind, kann man in ähnlicher Weise Lösungen erhalten.

Hyperbolische Trigonometrie

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Damit gilt $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$ und $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$ für $x > 0$.

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1,$$

$$\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}, \quad \cosh x = \sinh^2\frac{x}{2} + \cosh^2\frac{x}{2} = 2\cosh^2\frac{x}{2} - 1 = 2\sinh^2\frac{x}{2} + 1,$$

$$\sinh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}\ (x \geqslant 0), \quad \cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}, \quad \tanh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}},$$

$$\sinh^2 x = \frac{\tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2 x},$$

$$\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \operatorname{ctgh}^2 x = \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x - 1},$$

$$\begin{aligned}\cosh(x+y+z) = {} & \cosh x \cosh y \cosh z + \cosh x \sinh y \sinh z \\ & + \sinh x \cosh y \sinh z + \sinh x \sinh y \cosh z,\end{aligned}$$

$$\cosh(x + 2y) = \cosh x(\cosh^2 y + \sinh^2 y) + 2\sinh x \sinh y \cosh y.$$

Hyperbolische Dreiecksformeln

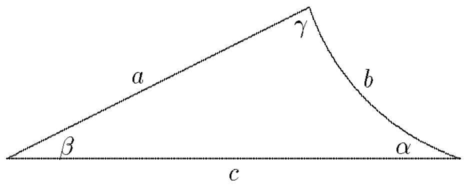


ABBILDUNG 29. Hyperbolisches Dreieck.

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma},$$

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma,$$

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Daten des Dreiecks $\Delta(p, q, r)$

$\Delta(p, q, r)$ ist ein hyperbolisches Dreieck mit Ecken $u, v, w \in \mathbb{D}$ und Winkeln

$$\alpha_u = \frac{\pi}{p}, \quad \alpha_v = \frac{\pi}{q} \quad \text{und} \quad \alpha_w = \frac{\pi}{r}.$$

Aus den Winkeln lassen sich die Seitenlängen (bezüglich der hyperbolischen Metrik ρ auf $\mathbb{D}$) berechnen

$$\cosh\ell_v = \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{q}}, \quad \cosh\ell_w = \frac{\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{r} + \cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}},$$

$$\cosh\ell_{vw} = \frac{\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} + \cos\frac{\pi}{p}}{\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{r}}$$

für

$$\ell_v := \rho(u, v), \quad \ell_w := \rho(u, w), \quad \ell_{vw} := \rho(v, w).$$

Mit $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ berechnet man ferner

$$\sinh\ell_v = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{q}}, \quad \sinh\ell_w = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}}, \quad \sinh\ell_{vw} = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{r}}.$$

mit

$$W := \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{p} + \cos^2\frac{\pi}{q} + \cos^2\frac{\pi}{r} + 2\cos\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r} - 1}.$$

Insbesondere gilt im Falle $q = r$

$$\cosh \ell_v = \cosh \ell_w = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{q}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p} \quad \text{und} \quad \sinh \ell_v = \sinh \ell_w = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{q}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2p} - 1}$$

und im Falle $q = r = 3$

$$\begin{aligned}
\cosh \ell_v &= \cosh \ell_w = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p},\\
\sinh \ell_v &= \sinh \ell_w = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2p} - 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}{\sin\frac{\pi}{2p}},\\
\tanh \ell_v &= \frac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}{\cos\frac{\pi}{2p}},\\
\operatorname{ctgh} \ell_v &= \frac{\cos\frac{\pi}{2p}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} - 1}}.
\end{aligned}$$

Hyperbolische Geometrie

Es sei ρ die hyperbolische und d die Euklidische Metrik auf $\mathbb{D}$.
Für $a, b \in \mathbb{D}$ gilt

$$\begin{aligned}
d^2(a,b) = &\frac{\cosh\rho(0,a) - 1}{\cosh\rho(0,a) + 1} + \frac{\cosh\rho(0,b) - 1}{\cosh\rho(0,b) + 1}\\
&- 2\cdot\frac{\cosh\rho(0,a)\cosh\rho(0,b) - \cosh\rho(a,b)}{\sinh\rho(0,a)\sinh\rho(0,b)}\cdot\sqrt{\frac{(\cosh\rho(0,a) - 1)(\cosh\rho(0,b) - 1)}{(\cosh\rho(0,a) + 1)(\cosh\rho(0,b) + 1)}}.
\end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathbb{D}$ mit $\rho(0,a) = \rho(0,b)$ gilt

$$d(a,b) = \frac{\sqrt{2(\cosh\rho(a,b) - 1)}}{\cosh\rho(0,a) + 1}.$$

Für $a \in \mathbb{D}$ gilt

$$\cosh\rho(0,a) = \frac{1 + |a|^2}{1 - |a|^2}, \quad |\sinh\rho(0,a)| = \frac{2|a|}{1 - |a|^2} \quad \text{und} \quad |a|^2 = \frac{\cosh\rho(0,a) - 1}{\cosh\rho(0,a) + 1}.$$

Einige Werte der trigonometrischen Funktionen

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}{1 + \sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}.$$

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}, \quad \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}, \quad \tan^2\frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}.$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},$$

$$\tan\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}},\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{5}-1}.$$

$$\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{3-\sqrt{5}}{8},\quad \cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{5+\sqrt{5}}{8},\quad \tan^2\frac{\pi}{10}=\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}},\quad \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{10}=\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{10},\quad \cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}.$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10},\quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{10}.$$

$$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}.$$

$$\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}.$$

Literaturverzeichnis

Осень. Скучно. Ветер воет.
Мелкий дождь по окнам льет.
Ум тоскует; сердце ноет;
И душа чего-то ждёт.

И в бездейственном покое
Нечем скуку мне отвесть . . .
Я не знаю: что такое?
Хоть бы книжку мне прочесть!

Козьма Прутков. "Осень"

[AGV] Vladimir I. Arnold, Sabir M. Gusein-Zade, Aleksandr N. Varchenko *Singularities of Differentiable Maps,* Vol. I, Birkhäuser 1985

[Ba] Ludwig Balke, Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler, Stefan Scheidt, *Polyhedral fundamental domains for discrete subgroups of* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, Topology **37** (1998), 1247–1264.

[Be] Lipman Bers, *Spaces of Riemann Surfaces,* Proc. Int. Congr. Math. Edinburgh 1958, Cambridge 1960, 349–361.

[Do] Igor V. Dolgachev, *On the Link Space of a Gorenstein Quasihomogeneous Surface Singularity,* Math. Annalen **203** (1983), 529–540.

[D1] Igor V. Dolgachev, *Quotient-conical singularities on complex surfaces,* Functional Anal. and Appl. **8** (1974), 160–161.

[D2] Igor V. Dolgachev, *Automorphic forms and quasihomogeneous singularities,* Functional Anal. and Appl. **9** (1975), 149–151.

[Fi] Thomas Fischer, *Totalgeodätische Polytope als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen der dreidimensionalen minkowskischen Pseudosphäre,* Dissertation, Bonn 1992.

[KNRS] Alexandra Käss, Ute Neuschäfer, Frank Rothenhäusler, Stefan Scheidt, *Fundamentalbereiche diskreter cokompakter Untergruppen von* $\mathrm{PSU}(1,1)$, Diplomarbeit, Bonn 1996.

[Ka] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups,* Chicago Lectures in Math., The University of Chicago Press, Chicago and London 1992.

[Kr] Irwin Kra, On Lifting of Kleinian Groups to $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, In: Isaac Chavel and Hershel M. Farkas, editors, Differential Geometry and Complex Analysis, Springer Verlag 1985, 181–193.

[Mi] John Milnor, *On the* 3*-dimensional Brieskorn manifolds* $M(p,q,r)$, In: Knots, groups and 3-manifolds, edited by L. P. Neuwirth. Annals of Math. Studies **84**, Princeton 1975, 175–225.

[NR] Walter D. Neumann, Frank Raymond, *Seifert manifolds, plumbing,* μ*-invariant and orientation reversing maps,* In: Algebraic and Geometric Topology, edited by Kenneth C. Millett, Lecture Notes in Mathematics **664**, Springer, Berlin 1978, 162–195.

[ON] Barret O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry,* Academic Press, New York-London 1983.

[Or] Peter Orlik, *Seifert manifolds,* Lecture Notes in Mathematics **291**, Springer, Berlin 1972.

[Pa] S. J. Patterson, *On the Cohomology of Fuchsian Groups,* Glasgow Math. Journal **16** (1975), 123–140.

[Pe] Hans Petersson, *Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, III,* Math. Annalen **115** (1938), 23–67, 518–572.

[RV] Frank Raymond, A. T. Vasquez, 3-*manifolds whose universal coverings are Lie groups,* Topology Appl. **12** (1981), 161–179.

[Sc] Peter Scott, *The Geometries of* 3-*manifolds,* Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401–487.

[Se] Herbert Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume,* Acta mathematica **60** (1933), 147–238.

[Si] Carl Ludwig Siegel, *Über einige Ungleichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene,* Math. Annalen **133** (1957), 127–138.

[Wa] Philip Wagreich, *Algebras of automorphic forms with few generators,* Transactions of the AMS **262** (1980), 367–389.

[Wo] Joseph A. Wolf, *Spaces of constant Curvature,* McGraw-Hill New York 1967.

[Б] Иосиф Бродский, *Набережная неисцелимых,* Слово 1992

[Пе] Виктор Пелевин, *Жёлтая стрела,* Вагриус, Москва 1998.

[Пр] Козьма Прутков, *Сочинения Козьмы Пруткова, Мысли и афоризмы,* Художественная литература, Москва 1976.

[Пу] Александр Пушкин, *Собрание сочинений,* Имидж, Москва 1993.

[Х] Даниил Хармс, *Собрание сочинений,* Виктори, Москва 1994.

[Ч] Антон Чехов, *Собрание сочинений,* том 3, Художественная литература 1955.

Bilderverzeichnis

Inhaltsverzeichnis