Parkettierungen

0. Einführung

Parkettierungen finden sich zu allen Zeiten in allen Kulturen.

Figur 1: Parkettierungen mit Ziegeln

Figur 2: Pflasterungen = Parkettierungen

Figur 3: Portugal, 15. Jhdt.

Figur 4: Alhambra, 12. Jhdt.

Mathematische Definitionen und Begriffe sind <u>sehr</u> neuen Datums:

B. Grünbaum, G. C. Shephard: Tilings and Patterns, New York 1987

1. Definitionen und Erweiterungstheorem

<u>Definition</u>: Eine ebene Parkettierung ist eine abzählbare Familie $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ von abgeschlossenen Mengen T_i in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, so daß

(i) die Ebene ohne Lücken überdeckt wird, d.h. $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = \mathbb{R}^2$

(ii) keine Überschneidungen exitieren, d.h. $\mathring{T}_i \cap \mathring{T}_j = \emptyset$

Die T_i's heißen Parketts.

Bizarre Parkettierungen: Figur 5: Bizarre Parkettierungen I

Figur 6: Bizarre Parkettierung II

Können durch weitere Definitionen ausgeschlossen werden.

<u>Definition</u>: Eine endliche Menge $\{T^{(1)}, \dots, T^{(k)}\}$ von Mengen $T^{(j)} \subset \mathbb{R}^2$ heißt Menge der <u>Protoparketts</u> einer Parkettierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$, falls jedes T_i kongruent zu einem $T^{(j)}$ ist.

Figur 7: Monohedrale Parkettierungen I

Figur 8: Monohedrale Parkettierungen II

Definition: Ein Flicken einer Parkettierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ ist eine endliche Teilmenge $\mathcal{A} = \{T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}\} \subset \mathcal{T}$, so daß $\bigcup_{j=1}^{k} T_{i_j}$ homöomorph zu einer Kreisscheibe ist.

Erweiterungstheorem: Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von Protoparketts, so daß jedes Protoparkett homöomorph zu einer Kreisscheibe ist.
Wenn man mit den Protoparketts aus $\mathcal{S}$ jede Kreisscheibe mit einem Flicken überdecken kann, dann kann man aus den Protoparketts von $\mathcal{S}$ auch eine Parkettierung der ganzen Ebene legen.

Bemerkungen: (i) Die Bedingung, daß alle Protoparketts homöomorph zu einer Kreisscheibe sein sollen, schließt bizarre Parketts aus.

Figur 9: Bizarre Parketts

(ii) Die Schwierigkeit des Satzes liegt darin, daß die immer größer werdenden Flicken nicht ineinander enthalten sein müssen.

Figur 10: Das Erweiterungstheorem I

Figur 11: Das Erweiterungstheorem II

Beweis: s. Übung

2. Aperiodische Parkettierungen

Definition: Eine Isometrie σ der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ heißt Symmetrie der Parkettierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$, falls $\sigma(T_i) = T_j \ \forall i \in \mathbb{N}$.
$S(\mathcal{T})$ bezeichnet die Symmetriegruppe von $\mathcal{T}$.
Falls $S(\mathcal{T})$ zwei Translationen in verschiedene Richtungen enthält, heißt $\mathcal{T}$ *periodisch*.

Figur 12: Periodische Parkettierungen

Figur 13: Aperiodische Parkettierungen

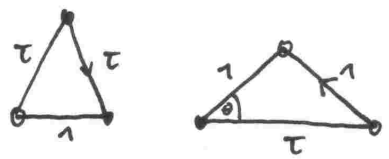
Definition: Eine endliche Menge $\{T^{(1)}, \dots, T^{(k)}\}$ von Mengen $T^{(j)} \subset \mathbb{R}^2$ heißt <u>aperiodische Menge von Protoparketts</u>, falls sich aus ihr Parkettierungen legen lassen, aber keine von ihnen periodisch ist.

Figur 13: Aperiodische Parkettierungen

3. Penrose-Parkettierungen

Figur 14: Penrose-Parkettierung

Man startet mit zwei Dreiecken L_A, S_A,



wobei $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ der "Goldene Schnitt" ist, $\theta = \frac{\pi}{5}$

Die Ecken sind weiß oder schwarz markiert, und Kanten, die zwei Ecken mit derselben Markierung verbinden, sind wie oben ~~markiert~~ orientiert.

Eine Parkettierung mit den Protoparketts L_A, S_A soll nur Ecken mit derselben Markierung und Kanten mit derselben Orientierung zusammenbringen

"Kite" "Dart"

Jede Parkettierung mit L_A, S_A kann auch als Parkettierung mit "Kites" und "Darts" gesehen werden: Figur 15: Penrose-Parkettierungen mit "Kites" und "Darts".

Man kann auch auf die Markierungen verzichten:

Figur 16: Neue Protoparketts für Penrose-Parkettierungen

Figur 17: Penrose-Parkettierung à la Escher

Nach Wahl von τ erhält man durch sukzessives Verkleben und Weglassen von Ecken und Kanten aus den Protoparketts L_A, S_A neue aber ähnliche Parketts $(L_B, S_B), (L_{\tau A'}, S_{\tau A'}), (L_{\tau B'}, S_{\tau B'})$ usw., die Kreisscheiben mit immer größerem Radius überdecken. ("Komposition")

Figur 18: Komposition I

Umgekehrt erhält man durch sukzessives Unterteilen z.B. des Protoparketts $L_{\tau^n A}$ wieder einen Flicken aus Protoparketts L_A, S_A. ("Zerlegung")

Aus dem Erweiterungstheorem folgt dann, daß man aus L_A, S_A eine Parkettierung legen kann: eine Penrose-Parkettierung.

<u>Theorem</u>: $\{L_A, S_A\}$ ist eine aperiodische Protoparkettmenge

Beweis: Figur 19: Komposition II

Durch Komposition erhält man aus einer Parkettierung $\mathcal{T}$ <u>auf eindeutige Weise</u> eine Parkettierung $\mathcal{T}^{(n)}$ mit Protoparketts $L_{\tau^n A}, S_{\tau^n A}$. Wegen der Eindeutigkeit muß dann jede Translationssymmetrie von $\mathcal{T}$ auch die ~~Protoparkette~~ Parkette von $\mathcal{T}^{(n)}$ auf andere in $\mathcal{T}^{(n)}$ (vom selben Typ) abbilden. Das ist aber unmöglich, sobald der Inkreis-Durchmesser von $L_{\tau^n A}$ größer wird als die Translationsdistanz.

Eine weitere faszinierende Eigenschaften von Penrose-Parkettierungen, die "lokale Isomorphie", wird in den Übungen bewiesen.