Übungen zur Vorlesung "Parkettierungen"

1. Um das Erweiterungstheorem zu beweisen, benötigt man einige neue Ideen und Begriffe.

   Der Hausdorff-Abstand $\delta(T_1, T_2)$ zwischen zwei Mengen $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$ ist definiert als

   $$\delta(T_1, T_2) := \max\left\{ \sup_{x_2 \in T_2} \inf_{x_1 \in T_1} ||x_1 - x_2||, \sup_{x_1 \in T_1} \inf_{x_2 \in T_2} ||x_1 - x_2|| \right\}.$$

   (a) Berechnen Sie die Haussdorff-Abstände $\delta(T_1, T_2)$ und $\delta(T_3, T_4)$, wobei T_1, T_2, T_3, T_4 Kreise mit Radius 1 um die Mittelpunkte

   $$z_1 = (-1.5, 0), z_1 = (1.5, 0), z_1 = (-0.5, 0), z_1 = (0.5, 0)$$

   seien.

   (b) Beweisen Sie nun das Auswahltheorem:

   Theorem 1 *Sei $T_1, T_2, T_3, \ldots$ eine unendliche Folge von Parketts, die alle kongruent zu einem beschränkten Parkett T_0 sind. Wenn alle T_i einen Punkt P_0 enthalten, dann findet man eine (bzgl. des Hausdorff-Abstands) konvergente Teilfolge $T_{i_1}, \ldots, T_{i_k}, \ldots$, d.h. es gibt ein Grenzparkett T, so daß*

   $$\delta(T_{i_k}, T) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

   T ist kongruent zu T_0.

   Hinweis: Da T_i kongruent zu T_0 sein soll, gibt es eine Verschiebung, eine Drehung und (eventuell) eine Spiegelung, die T_0 in T_i überführt. Ordnen Sie jedem T_i einen Punkt (x, y, θ, ϵ) in $\mathbb{R}^4$ zu, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Verschiebungsvektor, $\theta \in [0, 2\pi]$ der Winkel der Drehung und $\epsilon = 1$ oder -1 ist, je nachdem, ob eine Spiegelung benötigt wird oder nicht.

2. Mit Hilfe des Auswahltheorems kann man jetzt das Erweiterungstheorem beweisen.

   Theorem 2 *Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von Protoparketts, so daß jedes Protoparkett homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Wenn man mit den Protoparketts aus $\mathcal{S}$ jede beliebige Kreisscheibe mit einem Flecken überdecken kann, dann kann man mit den Protoparketts aus $\mathcal{S}$ die ganze Ebene parkettieren.*

(a) Zeigen Sie zuerst, daß es zwei Parameter U, u gibt, so daß jedes Protoparkett aus $\mathcal{S}$ in einem Kreis mit Radius U liegt und einen Kreis mit Radius u enthält.

(b) Sei Λ das Gitter aus den Punkten $(nu, mu), n, m \in \mathbb{Z}$. Man zähle die Gitterpunkte ab: $\Lambda = \{L_0, L_1, L_2, \ldots\}$. Sei $D(r, L_0)$ die Kreisscheibe um L_0 mit Radius $r > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein Flecken $\mathcal{A}(r)$, der $D(r, L_0)$ überdeckt. Wenn $L_s \in D(r, L_0)$, dann sei T_{rs} eines der Parkette aus $\mathcal{A}(r)$, die L_s enthalten. Zeigen Sie: Die Folge $S = (T_{10}, T_{20}, T_{30}, \ldots)$ enthält eine im Sinne des Haussdorff-Abstands konvergente Teilfolge $S_0 \subset S$ aus kongruenten Parketts. Wenden Sie das Auswahltheorem an und folgern Sie die Existenz eines Grenzparketts T'_0, das L_0 enthält und kongruent zu einem Protoparkett aus $\mathcal{S}$ ist.

(c) Setzen Sie diese Prozedur iterativ fort: Wenn $r_{1i}, r_{2i}, \ldots$, die in der Folge S_i vorkommenenden Radien sind, konstruieren Sie eine konvergente Teilfolge $S_{i+1} \subset \{T_{r_{1i},i+1}, T_{r_{2i},i+1}, \ldots\}$ mit Grenzparkett T'_{i+1}, das L_{i+1} enthält und kongruent zu einem Protoparkett aus $\mathcal{S}$ ist.

(d) Nun zeigt man, daß $\mathcal{T} = \{T'_0, T'_1, T'_2, \ldots\}$ eine Parkettierung ist: Sei P irgendein Punkt der Ebene und sei L_m der Gitterpunkt aus Λ mit maximalem Index, der noch in der Kreisscheibe $D(P, U)$ liegt. Man betrachte nur noch Radien r, die in der Folge S_m vorkommen. Zeigen Sie: Die Parkettmenge $\mathcal{T}_r = \{T_{r0}, \ldots, T_{rm}\}$ konvergiert für $r \to \infty$ gegen $\mathcal{T}' = \{T'_0, \ldots, T'_m\}$.

(d) Zeigen Sie weiter: Die Parkette aus $\mathcal{T}_r$ haben disjunktes Inneres und ihre Vereinigung enthält P.

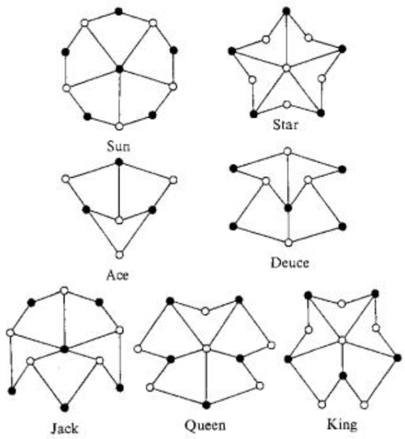
Da sich beide Eigenschaften auf $\mathcal{T}'$ übertragen, ist damit das Erweiterungstheorem bewiesen.

3. Im folgenden soll in mehreren Schritten folgendes faszinierende Theorem über Penrose-Parkettierungen bewiesen werden:

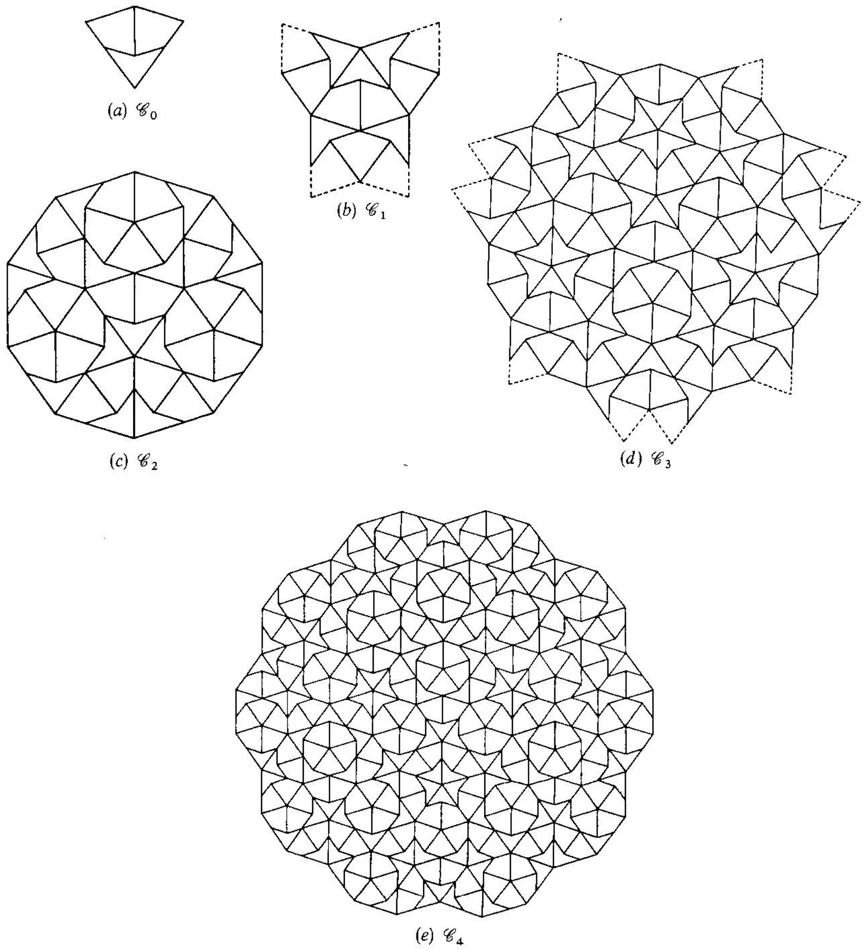
Theorem 3 *Jeder Flecken $\mathcal{A}$ in einer Penrose-Parkettierung $\mathcal{T}$ mit Kites und Darts kommt unendlich oft vor in jeder beliebigen Penrose-Parkettierung $\mathcal{T}_1$.*

(a) Sei V eine Ecke in einer Parkettierung $\mathcal{T}$. Die **Eckenumgebung** $\mathcal{N}(V)$ von V ist der minimale Flecken, in dessen Innerem V liegt. Zeigen Sie, daß es in einer Penrose-Parkettierung mit Kites und

Darts nur die folgenden sieben verschiedenen Arten von Eckenumgebungen geben kann:



(b) Durch sukzessives Zerlegen einer Eckenumgebung vom Typ “Ace” erhält man folgende **Wagenräder** vom Typ $\mathcal{C}_n$:



Zeigen Sie:

Theorem 4 *In jeder Penrose-Parkettierung $\mathcal{T}$ mit Kites und Darts liegt jedes Parkett T in einem Wagenrad vom Typ $\mathcal{C}_{2n}$.*

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß jedes Parkett in einer Eckenumgebung vom Typ "Ace" liegt. Dann wenden Sie diese Erkenntnis auf die Komposition $\mathcal{T}^{(2n)}$ an und berücksichtigen die Konstruktion eines Wagenrades.

(c) Zeigen Sie:

Korollar 5 *In jeder Penrose-Parkettierung mit Kites and Darts kommt jeder der sieben Typen von Eckenumgebungen unendlich oft vor.*

Hinweis: Betrachten Sie $\mathcal{C}_4$!

(d) Jetzt zeigen Sie das Theorem, indem Sie das Korollar auf die Kompositionen $\mathcal{T}^{(n)}$ bzw. $\mathcal{T}_1^{(n)}$ anwenden.