

**Pseudoeffektivität des kanonischen Bündels
auf Mannigfaltigkeiten, die nicht unigeregelt sind**

DIPLOMARBEIT

von

Florian Wittke



angefertigt im Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus

Köln, im Wintersemester 2006/2007

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen herzlich bedanken, die einen Beitrag bei der Entstehung dieser Arbeit geleistet haben.

Bei Prof. Dr. Kebekus für die Auswahl des interessanten Themas und für die gute Betreuung während der gesamten Arbeit und des Hauptstudiums.

Bei Dr. Eckl für unsere zahlreichen „Mittwochsbesprechungen“ und für seine Bereitschaft mir stets mit Rat und Tat zur Seite zu stehen, wenn ich in die Untiefen der technischen Details des induktiven Limes vordrang.

Bei Mattias Jonnson, der mir per Email Unterstützung beim Verstehen seiner Arbeit lieferte.

Bei meinen Kommilitonen, die mir während des gesamten Studiums eine große Hilfe waren und mit denen ich stets anregende Diskussionen über unsere Probleme führen konnte.

Bei Roland Oerder für seine Bereitschaft nach Tippfehlern zu suchen und interessante Diskussionen über die deutsche Grammatik.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Familie bedanken. Ihre Unterstützung hat es mir erst ermöglicht dieses Fach zu studieren und fünf wunderbare, interessante und vor allem lehrreiche Jahre zu verbringen.

Köln, den 30.04.2007

Florian Wittke

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1. Grundlagen	3
1.1. Schnitttheorie und numerische Äquivalenz	3
1.2. Ample- und Nef-Kegel im Néron-Severi-Raum	9
1.3. Asymptotisches Verhalten von Geradenbündeln und Divisoren	11
1.4. Volumen von Divisoren	13
Kapitel 2. Die Differenzierbarkeit der Volumenfunktion	17
2.1. Der Riemann-Zariski-Raum	17
2.2. Positive Klassen	26
2.3. Das positive Schnittprodukt	31
2.4. Die Volumenfunktion	44
Kapitel 3. Das Duale des pseudo-effektiven Kegels	51
3.1. Bewegliche Kurven	51
3.2. BDPP	52
Literaturverzeichnis	55
Notation	57

Einleitung

„Wir müssen wissen,
wir werden wissen!“

David Hilbert

Ein bekanntes Resultat aus der algebraischen Geometrie ist, dass der Kegel der numerisch-effektiven Divisoren im reellen Néron-Severi-Raum einer projektiven Varietät X und der Abschluss des Kegels der effektiven Kurven dual zueinander sind. Dabei ist der duale Kegel K^* eines abgeschlossenen, konvexen Kegels K in einem endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V durch

$$K^* := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in K\} \subset V^*$$

gegeben. In unserem Fall wird die Dualität durch das Schnittprodukt

$$N^1(X)_{\mathbb{R}} \times N^{n-1}(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

geliefert.

Schließen wir den konvexen Kegel der effektiven Divisoren auf X ab, so erhalten wir den pseudo-effektiven Kegel $\text{Psef}(X)$. Die Elemente im Inneren dieses Kegels nennen wir *big*. Die Charakterisierung des dualen Kegels zu $\text{Psef}(X)$ erwies sich deutlich schwieriger als im obigen Fall. Erst im Jahr 2004 zeigten Boucksom, Demailly, Paun und Peternell mit analytischen Methoden in **[BDPP04]**

Satz 0.1.

Sei X eine projektive Varietät der Dimension n . Dann sind die Kegel $\overline{\text{Mov}}(X)$ und $\text{Psef}(X)$ dual zueinander, d.h.

$$\overline{\text{Mov}}(X)^* = \text{Psef}(X).$$

$\overline{\text{Mov}}(X)$ ist dabei der Abschluss des Kegels der strikt beweglichen Kurven. Eine Kurve γ heißt strikt beweglich, wenn ein birationaler Morphismus $\mu : X' \rightarrow X$ und ample Divisoren a_1, \dots, a_{n-1} auf X' existieren, so dass $\gamma = \mu_*(a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1})$ gilt.

Lazarsfeld liefert in **[Laz04b]** einen algebraischen Beweis für den obigen Satz. Dabei werden für die entscheidende Abschätzung sogenannte Fujita-Approximationen in geeigneten Aufblasungen der Varietät verwendet. Der Übergang zu den geeigneten birationalen Modellen macht den Beweis an einigen Stellen recht technisch.

Boucksom, Favre und Jonsson entwickelten daher in ihrer Arbeit **[BFJ06]** einen algebraischen Kalkül, um diese Rechnungen in einem positiven Schnittprodukt zu kapseln. Ein solches Schnittprodukt wurde im analytischen Kontext bereits in **[BDPP04]** eingeführt. Unser Ziel ist es **[BFJ06]** detailliert auszuarbeiten, den dort eingeführten algebraischen Kalkül darzustellen und damit den Satz von Boucksom, Demailly, Paun und Peternell zu beweisen. Dadurch, dass viele der Abschätzungen

des ursprünglichen Beweises in dem Kalkül gekapselt sind, wird die Struktur des Beweises durchsichtiger.

Nachdem wir in Kapitel 1 die Schnitttheorie und die Grundlagen über die Positivität von Geradenbündeln wiederholt haben, folgen wir in Kapitel 2 der Arbeit [BFJ06] und entwickeln eine Theorie um die Divisoren auf allen glatten Aufblasungen in zwei topologischen Vektorräumen zusammenzufassen. Diese ergeben sich als projektive bzw. induktive Limes über die Néron-Severi-Räume der Aufblasungen. Diese Vektorräume hängen dann nur noch von der Varietät X selber ab. Wir werden die Ergebnisse aus Kapitel 1 auf diese Räume übertragen und definieren dann die Volumenfunktion auf dem induktiven Limes so, dass sie unter der natürlichen Einbettung

$$N^1(X_\pi)_\mathbb{R} \rightarrow \varinjlim_\pi N^p(X_\pi)_\mathbb{R}$$

mit dem gewöhnlichen Volumen für Divisoren auf allen glatten Aufblasungen X_π übereinstimmt. Das Entscheidende ist nun, dass wir ein positives Produkt $\langle \alpha_1 \cdots \alpha_p \rangle$ auf dem p -fachen Produkt des induktiven Limes definieren können. Dieses wird durch Schnittprodukte numerisch-effektiver Divisoren auf geeigneten Aufblasungen approximiert. In diesem Kontext kann Fujitas-Approximationstheorem wie folgt interpretiert werden:

$$\text{vol}(\alpha) = \langle \alpha^n \rangle.$$

Mit Hilfe dieses positiven Produktes können wir den entscheidenden Satz in Kapitel 2 beweisen.

Satz 0.2.

Die Volumenfunktion vol_X besitzt auf dem Big-Kegel des Raumes $N^1(X)_\mathbb{R}$ in jede Richtung eine Richtungsableitung, die durch eine stetige Linearform auf $N^1(X)_\mathbb{R}$ gegeben ist. Genauer gilt für jede Big-Klasse $\alpha \in N^1(X)_\mathbb{R}$ und jedes $\gamma \in N^1(X)_\mathbb{R}$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}_X(\alpha + t\gamma) = n \langle \bar{\alpha}^{n-1} \rangle \cdot \bar{\gamma}.$$

Dabei sind $\bar{\alpha}$ und $\bar{\gamma}$ die Bilder von α und γ unter der kanonischen Abbildung $N^1(X) \rightarrow \varinjlim_\pi N^p(X_\pi)$.

In Kapitel 3 werden wir mit den Ergebnissen aus Kapitel 2 den Beweis für das Resultat von Boucksom, Demailly, Paun und Peternell liefern.

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1. Schnitttheorie und numerische Äquivalenz

1.1.1. Rationale und numerische Äquivalenz von k-Zykeln.

Definition 1.1 (Zykel der Kodimension k auf algebraischen Varietäten).

Sei X eine algebraische Varietät über einem Körper k . Ein Zykel der Kodimension k (k -Zykel) auf X ist ein Element der freien abelschen Gruppe, die durch die irreduziblen Untervarietäten der Kodimension k erzeugt wird. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $Z^k(X)$. Wenn $f : X \rightarrow X'$ ein Morphismus zwischen algebraischen Varietäten und Y eine Untervarietät von X ist, dann definieren wir den Pushforward $f_*(Y)$ wie folgt:

$$f_*(Y) := \begin{cases} [K(Y) : K(f(Y))] \cdot \overline{f(Y)} & \text{falls } \dim f(Y) = \dim Y \\ 0 & \text{falls } \dim f(Y) < \dim Y \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Pushforward eines k -Zykels durch lineare Erweiterung. Ein k -Zykel Y heißt effektiv, wenn eine endliche Darstellung der Form

$$Y = \sum n_i Y_i$$

existiert. Dabei sind die Y_i irreduzible Untervarietäten der Kodimension k und die $n_i > 0$.

Wir definieren nun rationale Äquivalenz von k -Zykeln. Dies geschieht, indem man die k -Zykel als Weil-Divisoren von normalen Untervarietäten von X unter Pushforward auffasst.

Definition 1.2 (Rationale Äquivalenz von k -Zykeln).

Zwei k -Zykel Y, Y' heißen rational äquivalent ($Y \equiv_{\text{Rat}} Y'$), wenn eine Untervarietät V zusammen mit einer Normalisierung $f : \bar{V} \rightarrow V$ existiert, und linear äquivalente Divisoren D, D' auf \bar{V} existieren, so dass $f_*(D) = Y$ und $f_*(D') = Y'$. Wir erhalten die Quotientengruppe $A^k(X)$ von k -Zykeln modulo rationaler Äquivalenz. Die zum Nullzykel rational äquivalenten k -Zykel bezeichnen wir mit $\text{Rat}^k(X)$.

Man kann die direkte Summe $A(X) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k(X)$ als graduierte Gruppe auffassen, wobei man $A^k(X) = 0$, für $\dim X < k$ setzt. Ferner gilt $A^0(X) = \mathbb{Z}$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{deg} : A^{\dim X}(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i P_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Satz und Definition 1.3 (Schnittprodukt für rationale Divisorenklassen).

Sei X eine nicht-singuläre projektive Varietät über einem festen algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann existiert für alle $r, s \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Paarung

$$\begin{aligned} A^r(X) \times A^s(X) &\rightarrow A^{r+s}(X) \\ (Y, Z) &\mapsto Y \cdot Z \end{aligned}$$

welche die Axiome A1 bis A7 erfüllt.

- A1 Das Schnittprodukt macht $A(X)$ zu einem kommutativen, assoziativen, graduierten Ring mit Eins, dem sogenannten Chow-Ring.
- A2 Für jeden Morphismus $f : X \rightarrow X'$ zwischen nicht-singulären projektiven Varietäten existiert ein Ringhomomorphismus $f^* : A(X') \rightarrow A(X)$. Wenn $g : X' \rightarrow X''$ ein weiterer Morphismus ist, gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- A3 Für jeden Morphismus $f : X \rightarrow X'$ zwischen nicht-singulären projektiven Varietäten existiert ein Homomorphismus $f_* : A(X) \rightarrow A(X')$ von graduierten Gruppen (der den Grad verschiebt). Wenn $g : X' \rightarrow X''$ ein weiterer Morphismus ist, so gilt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.
- A4 (Projektionsformel.) Sei $f : X \rightarrow X'$ ein Morphismus zwischen nicht-singulären projektiven Varietäten und $x \in A(X), y \in A(X')$. Dann gilt

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y.$$

- A5 Seien Y und Z Zykel auf X und sei $\Delta : X \rightarrow X \times X$ der Diagonalmorphismus. Dann gilt

$$Y \cdot Z = \Delta^*(Y \times Z).$$

- A6 Seien Y und Z Untervarietäten von X , die sich transversal schneiden (d.h. jede irreduzible Untervarietät von $Y \cap Z$ hat Kodimension $\text{codim}(Y) + \text{codim}(Z)$). Dann existiert eine Darstellung

$$Y \cdot Z = \sum i(Y, Z; W_j) W_j.$$

Dabei läuft die Summe über alle irreduziblen Komponenten W_j von $Y \cap Z$ und die „Schnittmultiplizität“ $i(Y, Z; W_j) \in \mathbb{Z}$ hängt nur von einer Umgebung des generischen Punktes von W_j auf X ab.

- A7 Sei Y eine Untervarietät von X und sei Z ein effektiver Cartier-Divisor, der Y transversal schneidet. Dann ist $Y \cdot Z$ genau der zum Cartier-Divisor $Y \cap Z$ gehörige Zykel, der durch Einschränken der lokalen Gleichungen von Z auf Y entsteht.

Beweis: Eine Beweisskizze für die Existenz und Eindeutigkeit wird in [Har77] Appendix A Theorem 1.1 gegeben. Für weitere Details über das Schnittprodukt verweisen wir auf das Werk von Fulton [Ful84]. ■

Bemerkung 1.4. Der Existenzbeweis liefert auch eine konkrete Darstellung für Pullback und Pushforward. Es stellt sich heraus, dass der Pushforward einer rationalen Äquivalenzklasse durch die Äquivalenzklasse des Pushforwards eines Repräsentanten auf Zykelniveau im Sinne von Definition 1.1 gegeben ist. Dass dies wohldefiniert ist, wird zum Beispiel in [Ful84] Theorem 1.4 gezeigt.

Wenn X, X' projektiv und nicht-singulär sind, dann auch $X \times X'$. Wir haben die Projektionen $p_1 : X \times X' \rightarrow X$ und $p_2 : X \times X' \rightarrow X'$. Der Pullback $f^* : A(X') \rightarrow A(X)$ für einen Morphismus $f : X \rightarrow X'$ kann dann definiert werden, indem man für eine Untervarietät $Y' \subset X'$

$$(1.1) \quad f^*(Y') := p_{1*}(\Gamma_f \cdot p_2^{-1}(Y'))$$

setzt (vgl. [Har77] Appendix A 1). Dabei versteht man unter dem Schnittprodukt zweier Zykeln, das der entsprechenden Äquivalenzklassen.

Bemerkung 1.5. In dieser Arbeit werden wir meistens in der Situation sein, dass die Abbildungen zwischen den projektiven Varietäten birationale Morphismen sind. Daher wird in unserem Fall der Pushforward aus **A3** den Grad nicht verschieben.

Bemerkung 1.6. Ergibt das (iterierte) Schnittprodukt ein Element aus $A^{\dim X}(X)$, so fasst man es oft direkt als natürliche Zahl auf, indem man die Gradabbildung dahinter schaltet. Für den Fall, dass X eine glatte projektive Fläche ist, ergibt sich dann das bekannte Schnittprodukt von Divisoren auf Flächen.

Für unsere Zwecke ist die rationale Äquivalenzklasse zu fein. Wir wollen im weiteren Zykel nicht voneinander unterscheiden, wenn sie die selben Schnitteigenschaften haben. Deshalb führen wir eine gröbere Äquivalenz auf der Menge der k -Zykeln ein und beschränken uns auf glatte projektive Varietäten.

Definition 1.7 (Numerische Äquivalenz von k -Zykeln).

Sei X eine glatte projektive Varietät der Dimension n und sei α die rationale Klasse eines k -Zykels auf X . Wir sagen: α ist numerisch äquivalent zum Nullzykel, wenn

$$\alpha \equiv_{\text{num}} 0 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta) = 0$$

für alle $\beta \in A^{n-k}(X)$ gilt. Die Untergruppe der zu Null numerisch äquivalenten k -Zykeln bildet eine Untergruppe von $A^k(X)$, die wir $\text{Num}^k(X)$ nennen. Den Quotienten bezeichnen wir mit $N^k(X)$.

Bemerkung 1.8. $N^k(X)$ ist eine endlich-erzeugte abelsche Gruppe. Dies wird zum Beispiel in [Ful84] 19.3.2 (i) gezeigt.

1.1.2. Exkurs: Die Segre-Klassen als Erzeuger von $N^k(X)$.

Ziel dieses Unterabschnittes ist es zu zeigen, dass die Segre-Klassen die Gruppe $N^k(X)$ erzeugen. Dafür benötigen wir einen umfangreichen technischen Apparat, der Chern-Klassen von kohärenten Garben und eine Anwendung des Satzes von Grothendieck-Riemann-Roch beinhaltet. Für Details der Konstruktionen, insbesondere über die Definition der Chern-Klassen, verweisen wir auf [Ful84] Kapitel 3 und Kapitel 15. Für einen Überblick geben wir [Har77] Appendix A3 bis A5. an.

Definition 1.9.

Sei E ein Vektorbündel vom Rang $e + 1$ über X und $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ der kanonische Morphismus.

$$f_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{k+e})$$

heißt dann die k -te Segre-Klasse von X bezüglich dem Vektorbündel E .

Satz 1.10.

Sei X eine glatte projektive Varietät. Dann erzeugen die Segre-Klassen von Vektorbündeln auf X die Chern-Klassen von Vektorbündeln auf X .

Beweis: Wir verweisen auf [Ful84] Kapitel 3.2. ■

Definition 1.11 (Die Grothendieck-Gruppe $K(X)$).

Sei X eine projektive Varietät. Wir bezeichnen mit $K(X)$ den Quotienten, der von den kohärenten Garben erzeugten freien abelschen Gruppe modulo der Untergruppe, die von Ausdrücken der Form

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}' - \mathcal{F}''$$

für jede exakte Sequenz kohärenter Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

erzeugt wird.

Wir erweitern nun den gewöhnlichen Chern-Charakter für Vektorbündel auf X (vgl. [Har77] Appendix 4.4) auf die Grothendieckgruppe $K(X)$.

Satz 1.12.

Der Chern-Charakter für lokal freie Garben lässt sich zu einem Ringhomomorphismus

$$\text{ch} : K(X) \rightarrow A(X) \otimes \mathbb{Q}$$

fortsetzen. Die Chern-Charaktere von beliebigen kohärenten Garben lassen sich als Summe von Chern-Charakteren von lokal freien Garben darstellen.

Beweis: Wir geben hier nur die Idee an. Für einen formalen Beweis verweisen wir auf [Ful84] Kapitel 15.1 und [Har77] Appendix 5. Jede kohärente Garbe \mathcal{F} besitzt nach [Har77] Aufgabe III 6.9 (b) eine endliche, lokal freie Auflösung

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Die Klasse von \mathcal{F} in $K(X)$ ist dann

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{E}_i.$$

Dann muss man lediglich überprüfen, dass die Abbildung

$$\mathcal{F} \mapsto \text{ch}(\mathcal{F}) := \bigoplus_{i=0}^n (-1)^i \text{ch}(\mathcal{E}_i)$$

die gewünschten Eigenschaften hat. ■

Satz 1.13 (Erzeuger von $A(X)$).

Sei X eine glatte projektive Varietät der Dimension n . Dann erzeugen die Segre-Klassen von Vektorbündeln über X den Chow-Ring $A(X)$.

Beweis: Sei V eine Untervarietät der Dimension k und sei $f : V \hookrightarrow X$ die Inklusion. Seien $[V]$ bzw. $f_*([V])$ die entsprechenden Zykeln. Eine Anwendung des Satzes von Grothendieck-Riemann-Roch ([Ful84] Beispiel 15.2.16) liefert uns die Gleichung

$$\text{ch}(\mathcal{O}_V) = f_*([V] + \alpha) = [V] + f_*(\alpha) \quad (*)$$

wobei $\alpha \in A(V)$ die rationale Klasse eines Zyklus ist, so dass jede irreduzible Komponente von $f_*(\alpha) \in A(X)$ Dimension kleiner k hat.

Wir zeigen nun die Behauptung durch Induktion über die Dimension der Zykeln auf X .

Sei $V = P$ ein Punkt. Dann ist $\text{ch}(\mathcal{O}_P) = [P]$, denn in Gleichung (*) gibt es keine Terme mit kleinerer Dimension. Wegen Satz 1.10 und weil der Chern-Charakter ein Polynom in Chern-Klassen ist (vgl. [Har77] Appendix A4.) wird $[P]$ von Segre-Klassen erzeugt.

Sei die Behauptung nun für Dimension k gezeigt und sei V eine Untervarietät der Dimension $k + 1 \leq n$ von X . Wir folgern mit Gleichung (*)

$$\text{ch}(\mathcal{O}_V) = [V] + f_*(\alpha)$$

und jede irreduzible Komponente von $f_*(\alpha)$ hat Dimension höchstens k . Nach Induktionsvoraussetzung wird $f_*(\alpha)$ von Segre-Klassen erzeugt. Wie oben gesehen, wird aber auch $\text{ch}(\mathcal{O}_V)$ von Segre-Klassen erzeugt, also folgt die Behauptung. ■

Unmittelbar hieraus folgt nun

Korollar 1.14 (Erzeuger von $A^k(X)$),

Die k -ten Segre-Klassen erzeugen $A^k(X)$.

Wir haben eine Projektion $\pi : A^k(X) \rightarrow N^k(X)$. Für einen k -Zykel $\alpha \in Z^k(X)$ bezeichne α_R die rationale und α_N die numerische Äquivalenzklasse von α .

Satz 1.15 (Erzeuger von $N^k(X)$),

Die k -ten Segre-Klassen erzeugen $N^k(X)$.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 1.14, denn die rationalen Zykeln erzeugen die numerischen Zykeln. ■

1.1.3. Schnittprodukt für numerische Divisorenklassen.

Satz und Definition 1.16.

Es existiert eine eindeutige Paarung

$$\begin{aligned} N^r(X) \times N^s(X) &\rightarrow N^{r+s}(X) \\ (Y, Z) &\mapsto Y \cdot Z \end{aligned}$$

welche die Axiome des Schnittproduktes erfüllt.

Beweis: Seien α_R und β_R Repräsentanten für die numerischen Klassen α_N und β_N . Die Zuordnung

$$\begin{aligned} N^r(X) \times N^s(X) &\rightarrow N^{r+s}(X) \\ (\alpha_N, \beta_N) &\mapsto \pi(\alpha_R \cdot \beta_R) \end{aligned}$$

ist wegen der universellen Eigenschaft der Restklassenabbildung wohldefiniert, denn man sieht leicht, dass das Schnittprodukt numerisch triviale Klassen auf numerisch triviale Klassen abbildet. Pullback und Pushforward werden von den korrespondierenden Abbildungen in der rationalen Äquivalenzklasse induziert und sind wegen der Projektionsformel wohldefiniert. Damit ist die Erfüllung der Schnittaxiome klar. ■

Wir wollen nun den abelschen Gruppen eine Vektorraumstruktur zuordnen und erhalten damit die Räume auf denen wir im Folgenden arbeiten wollen. Wir bezeichnen mit \otimes stets das Tensorprodukt über \mathbb{Z} .

Definition 1.17 (\mathbb{Q} -Divisoren und \mathbb{R} -Divisoren).

Sei X eine algebraische Varietät. Ein \mathbb{Q} -Divisor auf X ist ein Element des \mathbb{Q} -Vektorraumes

$$\text{Div}_{\mathbb{Q}}(X) := \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

Analog ist ein \mathbb{R} -Divisor auf X ein Element des \mathbb{R} -Vektorraumes

$$\text{Div}_{\mathbb{R}}(X) := \text{Div}(X) \otimes \mathbb{R}$$

Ein \mathbb{Q} - oder \mathbb{R} -Divisor D hat die Form

$$D = \sum c_i \cdot A_i$$

wobei $A_i \in \text{Div}(X)$ und die c_i aus \mathbb{Q} bzw. \mathbb{R} sind. Die Bilder der natürlichen Inklusionen

$$\text{Div}(X) \hookrightarrow \text{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$$

$$\text{Div}(X) \hookrightarrow \text{Div}_{\mathbb{R}}(X)$$

nennt man ganze Divisoren. Ein Divisor ist effektiv, wenn er der Form

$$D = \sum c_i \cdot A_i$$

mit $c_i \geq 0$ und A_i effektiv ist.

Bemerkung 1.18. Wenn man einen Divisor als 1-Zykel auffasst, stimmt diese Definition mit der aus Definition 1.1 überein.

Analog zu den Divisoren können wir auch die Räume numerischer Äquivalenzklassen in einen \mathbb{R} -Vektorraum (oder \mathbb{Q} -Vektorraum) einbetten. Diese werden die wichtigsten Räume in dieser Arbeit sein.

Definition 1.19.

Für eine glatte projektive Varietät der Dimension n definieren wir die Vektorräume

$$N^k(X)_{\mathbb{R}} := N^k(X) \otimes \mathbb{R}$$

Für den Fall $k = 1$ nennen wir $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ den Néron-Severi-Raum von X . Wegen der endlichen Erzeugtheit der Gruppen $N^k(X)$ sind die korrespondierenden Vektorräume endlich-dimensional. Durch lineare Erweiterung des Schnittproduktes erhalten wir eine stetige, bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} N^k(X)_{\mathbb{R}} \times N^r(X)_{\mathbb{R}} &\rightarrow N^{k+r}(X)_{\mathbb{R}} \\ (\alpha \otimes x, \beta \otimes y) &\mapsto (\alpha \cdot \beta) \otimes (xy) \end{aligned}$$

und für den Fall $r = n - k$ eine Dualität

$$N^k(X)_{\mathbb{R}} \times N^{n-k}(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Bemerkung 1.20. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir die reellen Vektorräume $N^k(X)_{\mathbb{R}}$ oftmals auch einfach mit $N^k(X)$ bezeichnen.

Bemerkung 1.21. Wir werden im Wesentlichen Schnittprodukte, Pullbacks und Pushforwards für Divisorenklassen (d.h. 1-Zykel) ausrechnen müssen. Hier ergibt sich eine Vereinfachung, da für Divisoren auf glatten projektiven Varietäten per Definition rationale und lineare Äquivalenz gleich sind. Außerdem stimmen die obigen Definitionen für Pushforward und Pullback mit den bereits bekannten für Divisoren(-klassen) überein. Für den Pullback über die Abbildung $f : X \rightarrow X'$ sieht man das, indem man den Rückzug für einen gegebenen Cartier-Divisor $D := (U_i, g_i)$ im Setup von Bemerkung 1.4 ausrechnet. Dabei bilden die U_i eine offene Überdeckung von X' und die g_i sind die D definierenden lokalen Gleichungen. Wir müssen zeigen, dass die Divisorenklasse des Divisors $(f^{-1}(U_i), g_i \circ f)$ mit der aus Gleichung (1.1) übereinstimmt. Offenbar ist $p_2^{-1}(D) = X \times D$ ein Divisor in $X \times X'$ mit lokalen Gleichungen $(X \times U_i, (0, g_i))$. Das Schnittprodukt $\Gamma_f \cdot p_2^{-1}$ ist nach Axiom **A7** die Einschränkung dieser Gleichungen auf Γ_f . Insbesondere gilt $(0, g_i)(x, f(x)) = 0$, also $g_i \circ f(x) = 0$. Die Projektion dieser Menge auf X liefert nun genau den Cartier-Divisor $(f^{-1}(U_i), g_i \circ f)$.

Bemerkung 1.22. Oftmals werden wir lediglich das Schnittprodukt von n Divisoren auf einer n -dimensionalen Varietät betrachten. Da das Ergebnis in diesem Fall lediglich eine ganze, rationale oder reelle Zahl ist, und weil das Schnittprodukt von den Repräsentanten der Klasse unabhängig ist, können wir das Schnittprodukt in diesem Fall auch direkt auf den Divisoren definieren.

1.2. Ample- und Nef-Kegel im Néron-Severi-Raum

In diesem Abschnitt werden wir kurz die wichtigsten Eigenschaften von ample und numerisch-effektiven Divisoren wiederholen und zeigen, dass diese Eigenschaften numerisch sind. Damit werden wir die entsprechenden Kegel in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ definieren und uns einen ersten Überblick über die Situation in diesem Raum schaffen.

Definition 1.23 (Ample und sehr ample Geradenbündel und Divisoren auf einer projektiven Varietät).

Sei X eine projektive Varietät und L ein Geradenbündel auf X .

- (i) L heißt *sehr ample*, wenn eine abgeschlossene Einbettung $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ existiert, so dass

$$L = \mathcal{O}_X(1) := \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$$

gilt.

- (ii) L heißt *ample*, wenn ein $m \in \mathbb{N}^+$ existiert, so dass $L^{\otimes m}$ sehr ample ist.
 (iii) Ein Cartier-Divisor D auf X heißt *ample* bzw. *sehr ample*, wenn das korrespondierende Geradenbündel $\mathcal{O}_X(D)$ ample bzw. sehr ample ist.

Satz 1.24.

Seien D_1, \dots, D_n ample Divisoren auf einer projektiven Varietät X der Dimension n . Dann gilt

$$D_1 \cdot \dots \cdot D_n > 0.$$

Beweis: Man kann annehmen, dass die Divisoren alle sehr ample sind. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Bertini. ■

Satz 1.25 (Nakai-Moishezon-Kleiman-Kriterium).

Sei D ein Cartier-Divisor auf einer projektiven Varietät X der Dimension n . Dann ist D genau dann ample, wenn

$$D^k \cdot V > 0$$

für jede irreduzible Untervarietät V der Dimension $k > 0$ auf X gilt.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Theorem 1.2.23. ■

Satz 1.26.

Seien D_1, D_2 Cartier-Divisoren auf einer projektiven Varietät X . Und gelte $D_1 \equiv_{\text{num}} D_2$. Dann ist D_1 genau dann ample, wenn D_2 ample ist.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Korollar 1.2.24. ■

Definition 1.27.

Ein \mathbb{R} -Divisor D heißt ample, wenn er durch eine endliche Summe der Form

$$D = \sum c_i A_i$$

dargestellt werden kann. Dabei sind die $c_i \in \mathbb{R}^+$ und die A_i ample Cartier-Divisoren.

Satz 1.28.

Seien D_1, D_2 \mathbb{R} -Divisoren auf einer projektiven Varietät X . Und gelte $D_1 \equiv_{\text{num}} D_2$. Dann ist D_1 genau dann ample, wenn D_2 ample ist.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Proposition 1.3.13. ■

Definition 1.29.

Sei X eine projektive Varietät und sei D ein Cartier-Divisor auf X . D heißt numerisch-effektiv oder nef, wenn

$$D \cdot C \geq 0$$

für jede irreduzible Kurve $C \subset X$ gilt.

Bemerkung 1.30. Die Definition hängt nur von der numerischen Klasse von D ab. Analog definiert man numerisch-effektiv für \mathbb{R} -Divisoren.

Definition 1.31 (Ample- und Nef-Kegel in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$).

Der Ample-Kegel von X

$$\text{Amp}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

ist der konvexe Kegel aller amplen \mathbb{R} -Divisorenklassen in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Der Nef-Kegel von X

$$\text{Nef}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

ist der konvexe Kegel aller nef \mathbb{R} -Divisorenklassen in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$.

Satz 1.32 (Kleiman).

Sei X eine projektive Varietät.

(i) Der Nef-Kegel ist der Abschluss des Ample-Kegels:

$$\text{Nef}(X) = \overline{\text{Amp}(X)}.$$

(ii) Der Ample-Kegel ist das Innere des Nef-Kegels:

$$\text{Amp}(X) = \overset{\circ}{\text{Nef}(X)}.$$

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Theorem 1.4.23. ■

1.3. Asymptotisches Verhalten von Geradenbündeln und Divisoren

1.3.1. Iitaka-Dimension.

Definition 1.33 (Iitaka-Dimension).

Sei X eine projektive Varietät und L ein Geradenbündel auf X . Wir setzen

$$N(L) := \{m \geq 0 \mid H^0(X, L^{\otimes m}) \neq 0\}.$$

Für $m \in N(L)$ haben wir die vom Linearsystem $|L^{\otimes m}|$ induzierte rationale Abbildung

$$\phi_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, L^{\otimes m}).$$

Wir bezeichnen die Iitaka-Dimension von L auf X mit $\kappa(L)$ und setzen $\kappa(L) = -\infty$, wenn $N(L)$ leer ist und

$$\kappa(L) = \max_{m \in N(L)} \{\dim \phi_m(X)\}$$

sonst.

Bemerkung 1.34.

- (i) Für den Fall $\kappa(L) \neq -\infty$ gilt $0 \leq \kappa(L) \leq \dim X$.
- (ii) Die Iitaka-Dimension des kanonischen Geradenbündels K_X nennt man auch Kodaira-Dimension.

Satz 1.35 (Asymptotische Beschreibung der Iitaka-Dimension).

Sei L ein Geradenbündel auf einer irreduziblen normalen projektiven Varietät X mit Iitaka-Dimension κ . Dann existieren positive, reelle Konstanten a, A , so dass für alle $m \in N(L)$ hinreichend groß gilt:

$$am^{\kappa} \leq h^0(X, L^{\otimes m}) \leq Am^{\kappa}.$$

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Korollar 2.1.38. ■

Definition 1.36.

Sei X eine irreduzible projektive Varietät und L ein Geradenbündel auf X . L heißt *big*, wenn seine Iitaka-Dimension maximal ist, d.h

$$\kappa(L) = \dim(X).$$

Ein Cartier-Divisor D heißt *big*, wenn $O_X(D)$ big ist.

Satz 1.37.

Die Eigenschaft eines Cartier-Divisors big zu sein, hängt nur von seiner numerischen Äquivalenzklasse ab.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Korollar 2.2.8. ■

Definition 1.38.

Ein \mathbb{R} -Divisor $D \in \text{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ heißt *big*, wenn er eine Darstellung als endliche Summe der Form

$$D = \sum a_i D_i$$

mit $a_i > 0$ und D_i big besitzt.

1.3.2. Die Kegel Big und Psef.**Definition 1.39.**

Der Big-Kegel von X

$$\text{Big}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

ist der konvexe Kegel aller big \mathbb{R} -Divisorenklassen in $N^1(X)_{\mathbb{R}}$.

Definition 1.40.

Der pseudo-effektive Kegel von X

$$\text{Psef}(X) \subset N^p(X)_{\mathbb{R}}$$

ist der Abschluss des konvexen Kegels, der von den numerischen Klassen der effektiven \mathbb{R} -Zykel in $N^p(X)_{\mathbb{R}}$ aufgespannt wird.

Satz 1.41.

Sei X eine projektive Varietät.

- (i) Der pseudo-effektive Kegel ist der Abschluss des Big-Kegels:

$$\text{Psef}(X) = \overline{\text{Big}(X)}.$$

- (ii) Der Big-Kegel ist das Innere des pseudo-effektiven Kegels:

$$\text{Big}(X) = \overset{\circ}{\text{Psef}(X)}.$$

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Theorem 2.2.26. ■

1.4. Volumen von Divisoren

Definition 1.42.

Das Volumen eines Big-Geradenbündels L auf einer projektiven Varietät X der Dimension n ist durch

$$\text{vol}_X(L) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, kL)$$

gegeben. Das Volumen eines Cartier-Divisors D ist durch das Volumen des Geradenbündels $\mathcal{O}_X(D)$ definiert.

Bemerkung 1.43. Das Volumen eines Big-Geradenbündels ist wegen Satz 1.35 wohldefiniert.

Satz 1.44.

Das Volumen eines Divisors D auf einer projektiven Varietät X der Dimension n ist genau dann positiv, wenn D big ist. Wenn D nef ist, gilt

$$\text{vol}_X(D) = D^n.$$

Beweis: Die erste Aussage erhält man aus der Definition und Satz 1.35. Die zweite Aussage folgt sofort aus dem asymptotischen Satz von Riemann-Roch. Dieser ist zum Beispiel in [Laz04a] Korollar 1.4.41. zu finden. ■

Satz 1.45.

Das Volumen eines Divisors hängt nur von dessen numerischer Äquivalenzklasse ab.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Korollar 2.2.41. ■

Satz und Definition 1.46.

Sei D ein \mathbb{Q} -Divisor auf X . Sei $a \in \mathbb{N}$ so, dass aD ein ganzer Divisor ist. Dann ist das Volumen des \mathbb{Q} -Divisors definiert durch

$$\text{vol}_X(D) := \frac{1}{a^n} \text{vol}_X(aD).$$

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Theorem 2.2.35. ■

Satz 1.47 (Stetigkeit der Volumenfunktion).

Sei X eine irreduzible projektive Varietät der Dimension n . Dann kann die Abbildung $\xi \rightarrow \text{vol}_X(\xi)$ auf $N^1(X)_{\mathbb{Q}}$ eindeutig zu einer stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} \text{vol}_X : N^1(X)_{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \text{vol}_X(\xi) \end{aligned}$$

fortgesetzt werden. Ferner ist die Abbildung homogen vom Grad n .

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Korollar 2.2.45 und Proposition 2.2.35. ■

Satz 1.48 (Birationale Invarianz des Volumens).

Sei $\mu : X' \rightarrow X$ ein birationaler Morphismus zwischen irreduziblen projektiven Varietäten. Dann gilt

$$\text{vol}_{X'}(\mu^*(\xi)) = \text{vol}_X(\xi)$$

für jede Klasse $\xi \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04a] Beispiel 2.2.49. ■

Wir folgen nun [Laz04a] Beispiel 2.2.46 und betrachten

Beispiel 1.49 (Die Volumenfunktion auf der Aufblasung von \mathbb{P}^2 in einem Punkt). Wir können nun die Volumenfunktion für den einfachen Fall einer, in einem Punkt aufgeblasenen Fläche explizit angeben. Sei $\mu : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in p . Der reelle Néron-Severi-Raum $N^1(X)$ wird von den Klassen des exceptionellen Divisors und dem Pullback einer Hyperebene H , die durch p geht, erzeugt. Bezeichnen wir diese Klassen mit e und h , dann ist der Raum $N^1(X)$ isomorph zu \mathbb{R}^2 mit Basis $\{-e, h\}$. Die Klassen h und $h - e$ erzeugen den Nef-Kegel, denn wenn wir für einen Nef-Divisor $\alpha = \lambda h + \mu(h - e)$ schreiben, folgt mit den Regeln des Schnittproduktes auf X

$$0 \leq (\lambda h + \mu(h - e)) \cdot e = \mu$$

und

$$0 \leq (\lambda h + \mu(h - e)) \cdot (h - e) = \lambda.$$

Da $h - e$ die Klasse der strikten Transformierten von H ist, ist $h - e$ effektiv. Auf glatten projektiven Flächen gilt wegen [Laz04a] Beispiel 2.2.27, dass ein Divisor genau dann pseudo-effektiv ist, wenn sein Schnittprodukt mit jedem Nef-Divisor größer gleich Null ist. Für einen pseudo-effektiven Divisor α schreiben wir nun $\alpha = \lambda e + \mu(h - e)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$0 \leq (\lambda e + \mu(h - e)) \cdot h = \lambda$$

und

$$0 \leq (\lambda e + \mu(h - e)) \cdot (h - e) = \mu.$$

Also wird der pseudo-effektive Kegel von $h - e$ und e erzeugt. Das Schnittprodukt lässt sich nun mit den bereits bekannten Resultaten leicht berechnen. Auf dem Nef-Kegel haben wir für $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$\text{vol}_X(xh - ye) = (xh - ye)^2 = x^2h^2 - 2xyhe + y^2e^2 = x^2 - y^2$$

Der Kegel der effektiven Divisoren, die nicht nef sind, wird von h und e erzeugt. In $|kH + lE|$ ist lE stets eine feste Komponente, daher haben wir

$$\mu_*\mathcal{O}_X(kH + lE) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_*(kH + lE)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_*kH) = \mu_*\mathcal{O}_X(kH)$$

und damit sind $H^0(X, \mathcal{O}_X(kH))$ und $H^0(X, \mathcal{O}_X(kH + lE))$ isomorph. Das Volumen kann daher über die Selbstschnittzahl des Nef-Divisors kH berechnet werden. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^-$ haben wir

$$\text{vol}_X(xh - ye) = ((xh)^2) = x^2$$

Außerhalb dieser Bereiche sind die Divisoren nicht big, also ist das Volumen dort null.

Bemerkung 1.50. Mit dem obigen Beispiel haben wir gezeigt, dass die Volumenfunktion im allgemeinen auf dem Big-Kegel nicht zweimal differenzierbar ist.

KAPITEL 2

Die Differenzierbarkeit der Volumenfunktion

2.1. Der Riemann-Zariski-Raum

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass die Volumenfunktion für Nef-Divisoren durch das Schnittprodukt ausgedrückt werden kann. Für Big-Divisoren funktioniert dies leider nicht. Allerdings haben wir nach Fujitas Approximationstheorem die Möglichkeit, das Volumen eines solchen Divisors als Grenzwert von amplen Divisoren in geeigneten birationalen Modellen der Varietät aufzufassen. Wir werden diese Konstruktion detailliert beschreiben und damit zeigen, dass die Volumenfunktion stetig differenzierbar auf dem Big-Kegel ist. Dabei folgen wir während des ganzen Kapitels der Arbeit [BFJ06] und arbeiten die Beweise dort detailliert aus.

Notation 2.1.

Im Folgenden ist X stets eine irreduzible projektive Varietät der Dimension n über \mathbb{C} . Eine Modifikation von X ist ein birationaler Morphismus $\pi : X_\pi \rightarrow X$, wobei X_π eine **glatte** projektive Varietät ist. Wir werden mit $N^p(X)$ im Folgenden stets die reellen Vektorräume numerischer Klassen bezeichnen.

Wenn π, π' zwei Modifikationen von X sind, dann sagen wir, π' dominiert π , wenn ein birationaler Morphismus $\mu : X_{\pi'} \rightarrow X_\pi$ existiert, so dass $\pi' = \pi \circ \mu$.

$$\begin{array}{ccc} X_{\pi'} & \xrightarrow{\mu} & X_\pi \\ & \searrow \pi' & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Offenbar liefert uns dies eine partielle Ordnung auf der Menge der Modifikationen von X und wir schreiben $\pi \leq \pi'$, wenn π von π' dominiert wird. Unser Ziel ist es nun, den projektiven Limes über dieses System zu bilden. Dafür müssen wir sicherstellen, dass die Menge der Modifikationen nicht leer ist. Dies liefert uns ein bemerkenswertes Theorem von Hironaka, das wir noch öfter benutzen werden.

Satz 2.2 (Hironakas Desingularisierungstheorem).

Sei X eine irreduzible komplexe algebraische Varietät und sei $D \subset X$ ein effektiver Cartier-Divisor auf X . Dann gelten

- 1.) Es existiert ein birationaler, projektiver Morphismus

$$\mu : X' \rightarrow X,$$

so dass X' nicht-singulär ist und μ einen divisoriiellen exzeptionellen Ort $\text{exc}(\mu)$ hat, so dass

$$\mu^* D + \text{exc}(\mu)$$

ein Divisor mit „simple normal crossing support“ ist.

- 2.) X' kann durch eine Folge von Aufblasungen entlang glatter Zentren konstruiert werden, die Träger im singulären Ort von D und X haben. Insbesondere kann man annehmen, dass μ ein Isomorphismus auf $X - (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(D))$ ist.

Für Details verweisen wir auf [Laz04a] 4.1.3.

Definition 2.3.

Der Riemann-Zariski-Raum von X ist der projektive Limes

$$\mathfrak{X} := \varprojlim_{\pi} X_{\pi} = \left\{ x \in \prod_{\pi} X_{\pi} \mid \forall \pi \leq \pi' : pr_{\pi}(x) = \mu_{\pi}^{\pi'} \circ pr_{\pi'}(x) \right\}$$

Dabei ist $\mu_{\pi}^{\pi'} : X_{\pi'} \rightarrow X_{\pi}$ der zur Ungleichung $\pi \leq \pi'$ zugehörige birationale Morphismus und $pr_{\pi}, pr_{\pi'}$ sind die Projektionen aus dem kartesischen Produkt nach X_{π} bzw. $X_{\pi'}$.

Der Raum \mathfrak{X} trägt die vom projektiven Limes induzierte Topologie, auf die wir in Abschnitt 2.1.2 noch eingehen werden. Anschaulich gesprochen ist jedes Element des Riemann-Zariski-Raumes eine Familie von Elementen der einzelnen Modifikationen, die kompatibel unter den Modifikationsmorphismen sind.

Unser nächstes Ziel ist es, einen Vektorraum numerischer Divisorenklassen auf \mathfrak{X} so zu definieren, dass wir eine kanonische Einbettung für die Räume $N^p(X_{\pi})$ haben. Wir fassen noch einmal kurz die Ergebnisse aus Kapitel 1 zusammen.

Wenn Y eine glatte projektive Varietät der Dimension n ist, haben wir den endlich-dimensionalen reellen Vektorraum $N^k(Y)$ für $0 \leq k \leq n$. Birationale Morphismen $\mu : Y' \rightarrow Y$ induzieren Vektorraumhomomorphismen

$$\mu_* : N^k(Y')_{\mathbb{R}} \rightarrow N^k(Y)_{\mathbb{R}}$$

durch Pushforward und

$$\mu^* : N^k(Y)_{\mathbb{R}} \rightarrow N^k(Y')_{\mathbb{R}}$$

durch Pullback. Diese Morphismen sind unter dem Schnittprodukt $N^p(Y) \times N^q(Y) \rightarrow N^{p+q}(Y)$ adjungiert zueinander. Ferner ist das Schnittprodukt verträglich mit birationalem Pullback, wie man in folgendem Satz sieht.

Satz 2.4.

Sei $\mu : Y' \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus zwischen glatten projektiven Varietäten und $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in N^1(Y)$. Dann gilt

$$\mu^*(\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p) = \mu^*(\alpha_1) \cdot \dots \cdot \mu^*(\alpha_p)$$

Beweis: Wir können jede dieser Klassen als Differenz zweier sehr ample Divisorenklassen schreiben. Also nehmen wir an, dass unsere Divisorenklassen bereits sehr ample sind. Nach dem Satz von Bertini finden wir Divisoren in den korrespondierenden Linearsystemen, die sich transversal schneiden. Nun existieren offene Mengen $U \subset Y'$ und $V \subset Y$, so dass $\mu|_U : U \rightarrow V$ ein Isomorphismus ist. Wieder können wir voraussetzen, dass die irreduziblen Komponenten des Schnittes der Divisoren V schneiden. Dann ist die Vertauschung von Rückzug und Schnittprodukt aber klar. ■

2.1.1. Der Vektorraum $N^p(\mathfrak{X})$.

Definition 2.5.

Der Raum der p -kodimensionalen Weil-Klassen auf dem Riemann-Zariski-Raum \mathfrak{X} ist gegeben durch

$$N^p(\mathfrak{X}) := \varprojlim_{\pi} N^p(X_{\pi}) = \left\{ \alpha \in \prod_{\pi} N^p(X_{\pi}) \mid \forall \pi \leq \pi' : pr_{\pi}(\alpha) = \mu_{\pi, \pi'}^{\pi'} \circ pr_{\pi'}(\alpha) \right\}$$

Dabei ist $\mu_{\pi, \pi'}^{\pi'} : X_{\pi'} \rightarrow X_{\pi}$ der Pushforward des birationalen Morphismus, der zur Ungleichung $\pi \leq \pi'$ gehört und $pr_{\pi}, pr_{\pi'}$ sind die Projektionen aus dem kartesischen Produkt nach $N^p(X_{\pi})$ bzw. $N^p(X_{\pi'})$.

Für $\dim X \geq 2$ und $p \neq 0, n$ ist dies ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Jedes Element von $N^p(\mathfrak{X})$ ist eine Familie von Vektoren aus $N^p(X_{\pi})$, die miteinander kompatibel unter der Pushforwardabbildung sind. Jedes Element einer solchen Familie nennen wir eine Inkarnation auf X_{π} . Wir möchten uns nun klarmachen, wie die Topologie auf diesem Vektorraum aussieht. Um diese beschreiben zu können, benötigen wir die Notation der „Netze“ oder „Umgebungsfilter“. Für eine detaillierte Einführung der Begriffe und ihren Zusammenhang verweisen wir auf [Dug78] Kapitel X. Wir fassen die Ergebnisse von dort in folgendem Satz zusammen.

Satz 2.6.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist äquivalent:

- (1) f ist stetig
- (2) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung W von $f(x)$ in Y existiert eine Umgebung V von x , so dass $f(V) \subset W$.
- (3) Für jedes $x \in X$ und für jede Filterbasis \mathfrak{U} mit $\mathfrak{U} \rightarrow x$ gilt $f(\mathfrak{U}) \rightarrow f(x)$
- (4) Für jedes $x \in X$ und für jedes Netz (x_i) in X mit $x_i \rightarrow x$, konvergiert das Netz $(f(x_i))$ gegen $f(x)$.

Beweis: Für einen Beweis verweisen wir auf [Dug78] Kapitel III Satz 8.3 und Kapitel X, Korollar 5.2. Für die Äquivalenz zwischen der Konvergenz von Filtern und Netzen, siehe [Dug78] Kapitel X Ex. 5. ■

Auch Abgeschlossenheit können wir durch Netze und Filter charakterisieren.

Satz 2.7.

Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes X . Dann ist äquivalent.

- (1) $y \in \bar{A}$
- (2) Es existiert eine Filterbasis auf A , die gegen y konvergiert.
- (3) Es existiert ein Netz in A , das gegen y konvergiert.

Beweis: Für einen Beweis verweisen wir auf [Dug78] Kapitel X, Satz 4.1. ■

Bemerkung 2.8.

- (1) Die Begriffe Filterbasis und Netzkonvergenz sind nötig, da wir in nicht-metrischen Räumen aus der Folgenstetigkeit einer Abbildung nicht deren Stetigkeit folgern können.
- (2) Die Aussage über die Abgeschlossenheit bleibt nicht wahr, wenn man lediglich Folgen betrachtet.
- (3) Sollten wir in Satz 2.6 (2) eine Basis der Topologie auf Y gegeben haben, so müssen wir lediglich die Elemente dieser Basis auf die geforderte Eigenschaft prüfen.

Definition 2.9.

Für jedes π bezeichnen wir die kanonische Abbildung

$$N^P(\mathfrak{X}) \rightarrow N^P(X_\pi)$$

mit h_π .

2.1.2. Topologie auf $N^P(\mathfrak{X})$.

Die Topologie auf $N^P(\mathfrak{X})$ wird durch den projektiven Limes induziert („initiale Topologie“). Damit meinen wir, dass $N^P(\mathfrak{X})$ die gröbste Topologie trägt, so dass die kanonischen Abbildungen $h_\pi : N^P(\mathfrak{X}) \rightarrow N^P(X_\pi)$ aus der universellen Eigenschaft stetig sind. Oftmals schreiben wir für das Bild von α unter der Abbildung h_π kurz α_π . Ist auf den einzelnen $N^P(X_\pi)$ eine Basis der Topologie gegeben, so erhält man auch eine Basis der Topologie auf dem projektiven Limes. Das wird zum Beispiel in [Bou66] Kapitel 4.4 Proposition 9 beschrieben. Dort wird gezeigt, dass die Urbilder einer Basis unter den kanonischen Abbildungen h_π , eine Basis auf dem projektiven Limes liefern. Dies werden wir später noch nutzen, wenn wir die Umgebungen in $N^P(\mathfrak{X})$ konkret bestimmen möchten.

Aus dieser Eigenschaft und der Definition von Netzkonvergenz kann man aber bereits sagen, was Konvergenz in $N^P(\mathfrak{X})$ bedeutet und dass die Topologie Hausdorffsch ist. Wir fassen dies in folgendem Satz zusammen und nennen diese Topologie die „schwache Topologie“.

Satz 2.10.

Die Topologie in $N^P(\mathfrak{X})$ ist Hausdorffsch. Ein Netz $(\alpha_i)_{i \in I}$ von Weil-Divisorenklassen in $N^P(\mathfrak{X})$ konvergiert gegen α genau dann, wenn es auf allen Inkarnationen konvergiert. Also $\lim_{i \in I} \alpha_{i,\pi} = \alpha_\pi$ für alle π .

Beweis: Wir zeigen zunächst das Trennungssaxiom. Seien $\alpha, \beta \in N^P(\mathfrak{X})$ zwei verschiedene Klassen. Jede der Inkarnationen $N^P(X_\pi)$ ist Hausdorffsch und wir finden disjunkte Umgebungen $U(\alpha_\pi)$ und $U(\beta_\pi)$ in $N^P(X_\pi)$. Dann sind aber die Umgebungen $h_\pi^{-1}(U(\alpha_\pi))$ und $h_\pi^{-1}(U(\beta_\pi))$ disjunkt und trennen α und β .

Nun zeigen wir, dass aus Netzkonvergenz in $N^P(\mathfrak{X})$ Konvergenz auf allen Inkarnationen folgt. Sei $U(\alpha_\pi)$ eine offene Umgebung von α_π in $N^P(X_\pi)$. Dann ist $h_\pi^{-1}(U(\alpha_\pi))$ eine offene Umgebung von α , also existiert nach der Definition von Netzkonvergenz ein i_0 so, dass für alle $i \geq i_0$ gilt: $\alpha_i \in h_\pi^{-1}(U(\alpha_\pi))$. Das heißt aber genau, dass $\alpha_{i,\pi}$ in $U(\alpha_\pi)$ für $i \geq i_0$ liegt. Also liegt Konvergenz in jeder Inkarnation vor. Für die andere Richtung betrachten wir ein Netz $(\alpha_i)_{i \in I}$, so dass $\alpha_{i,\pi}$ für alle π gegen α_π konvergiert. Sei nun $U(\alpha)$ eine Umgebung von α . Dann existiert ein π und eine offene Umgebung $U(\alpha_\pi) \subset N^P(X_\pi)$, so dass

$$h_\pi^{-1}(U(\alpha_\pi)) \subset U(\alpha)$$

gilt, da nach Abschnitt 2.1.2 solche Mengen eine Basis der Topologie bilden. Wegen der Konvergenz auf allen Inkarnationen existiert insbesondere ein i_π so, dass für alle $i \geq i_\pi$ gilt: $\alpha_{i,\pi} \in U(\alpha_\pi)$. Dann ist aber

$$\alpha_i \in h_\pi^{-1}(U(\alpha_\pi)) \subset U(\alpha)$$

für alle $i \geq i_\pi$. Genau dies bedeutet aber Konvergenz in $N^p(\mathfrak{X})$. ■

Korollar 2.11.

Sei V ein topologischer Vektorraum und sei $f : V \rightarrow N^p(\mathfrak{X})$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig, wenn für jedes π die Komposition

$$V \xrightarrow{f} N^p(\mathfrak{X}) \xrightarrow{h_\pi} N^p(X_\pi)$$

stetig ist.

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.6 und der obigen Beschreibung von Netzkonvergenz. ■

2.1.3. Der Vektorraum $CN^p(\mathfrak{X})$.

Satz und Definition 2.12.

Für $\pi' \geq \pi$ haben wir die durch Rückzug induzierte Abbildung $N^p(X_\pi) \rightarrow N^p(X_{\pi'})$. Dadurch erhalten wir ein gerichtetes System auf der Menge der Modifikationen und der Vektorraum der p -kodimensionalen Cartier-Klassen auf \mathfrak{X} ist definiert durch den direkten (induktiven) Limes

$$CN^p(\mathfrak{X}) := \varinjlim_\pi N^p(X_\pi).$$

Für jedes π bezeichnen wir die natürliche Abbildung

$$N^p(X_\pi) \rightarrow CN^p(\mathfrak{X})$$

mit g_π .

Beweis: Seien $X_\pi, X_{\pi'}$ zwei Modifikationen der projektiven Varietät X . Wir müssen zeigen, dass eine Modifikation \tilde{X} von X zusammen mit mit birationalen Morphismen $\mu : \tilde{X} \rightarrow X_\pi, \mu' : \tilde{X} \rightarrow X_{\pi'}$ existiert. Wegen Satz 2.2 brauchen wir nicht mehr zu zeigen, dass \tilde{X} glatt ist. Die Morphismen von X_π bzw. $X_{\pi'}$ nach X induzieren eine birationale Abbildung $\varphi : X_\pi \dashrightarrow X_{\pi'}$ und daher einen Morphismus zwischen einer dichten, offenen Menge $U \subset X_\pi$ und $X_{\pi'}$. Der Graph Γ_φ der birationalen Abbildung ist der Zariski-Abschluss vom Graphen des Morphismus $U \rightarrow X_{\pi'}$. Es folgt sofort, dass Γ_φ eine projektive Untervarietät von $X_\pi \times X_{\pi'}$ ist. Ferner existieren birationale Morphismen $\mu : \Gamma_\varphi \rightarrow X_\pi$ und $\mu' : \Gamma_\varphi \rightarrow X_{\pi'}$. Für die letzte Aussage reicht es aus den Morphismus μ zu konstruieren und zu zeigen, dass er ein birationales Inverses besitzt. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu : \Gamma_\varphi &\rightarrow X_\pi \\ x &\mapsto \text{pr}_{X_\pi}|_{\Gamma_\varphi}(x) \end{aligned}$$

Das ist offenbar ein Morphismus. Wir definieren sein birationales Inverses auf einer dichten, offenen Teilmenge $U \subset X_\pi$ indem wir

$$\begin{aligned} \nu : U &\rightarrow \Gamma_\varphi \\ x &\mapsto (x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

setzen. Dessen Äquivalenzklasse liefert uns einen birationalen Morphismus

$$\nu : X_\pi \dashrightarrow \Gamma_\varphi.$$

Man sieht sofort, dass diese Morphismen zueinander invers sind. Damit ist das System gerichtet und der direkte Limes existiert. ■

In unserem Fall können wir den direkten Limes als eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung der Räume $N^p(X_\pi)$ auffassen, was es uns ermöglicht auf $CN^p(\mathfrak{X})$ mit Repräsentanten zu arbeiten. Genauer gilt

$$(2.1) \quad CN^p(\mathfrak{X}) = \bigsqcup_{\pi} N^p(X_\pi) / \sim$$

Unter der Relation \sim sind zwei Klassen $\alpha_\pi \in N^p(X_\pi)$ und $\alpha_{\pi'} \in N^p(X_{\pi'})$ genau dann äquivalent, wenn ihre Rückzüge auf einer gemeinsamen Modifikation übereinstimmen. Im weiteren Verlauf werden wir dies nutzen, wenn wir Beweise direkt auf Repräsentantenniveau führen. Dann müssen wir lediglich sicherstellen, dass die Eigenschaften invariant unter Pullback sind. Für $\dim X \geq 2$ und $p \neq 0, n$ ist auch $CN^p(\mathfrak{X})$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum.

2.1.4. Topologie auf $CN^p(\mathfrak{X})$.

Die Topologie auf dem direkten Limes ist gegeben als die feinste Topologie, so dass die kanonischen Abbildungen $g_\pi : N^p(X_\pi) \rightarrow CN^p(\mathfrak{X})$ stetig sind. Dies nennt man auch die finale Topologie. Eine Menge $U \subset CN^p(\mathfrak{X})$ ist genau dann offen, wenn für alle π die Menge $g_\pi^{-1}(U) \subset N^p(X_\pi)$ offen ist. Der direkte Limes induziert eine Topologie, die wir die „starke Topologie“ nennen.

Bemerkung 2.13. Leider haben wir im direkten Limes keine so gute Beschreibung der Netzkonvergenz wie im projektiven Limes. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass wir den Limes über ein überabzählbares gerichtetes System bilden. Insbesondere können wir nicht schließen, dass Konvergenz eines Netzes in der starken Topologie, die Konvergenz eines Netzen von Repräsentanten impliziert.

Satz 2.14.

Sei W ein topologischer Vektorraum und $f : CN^p(\mathfrak{X}) \rightarrow W$. Dann ist f genau dann stetig, wenn für jedes π die Komposition

$$N^p(X_\pi) \xrightarrow{g_\pi} CN^p(\mathfrak{X}) \xrightarrow{f} W$$

stetig ist.

Beweis: Wir verweisen auf [Bou66] §2.4 Proposition 6. ■

Lemma 2.15.

Seien X, Y glatte projektive Varietäten, $\mu : X \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus und $\alpha \in N^p(Y)$. Dann gilt

$$(2.2) \quad \mu_* \mu^*(\alpha) = \alpha$$

Beweis:

$$\mu_* \mu^*(\alpha) = \mu_*(X \cdot \mu^*(\alpha)) \stackrel{A4.}{=} \mu_*(X) \cdot \alpha = Y \cdot \alpha = \alpha$$

■

Korollar und Definition 2.16.

Die natürliche Abbildung

$$g_\pi : N^p(X_\pi) \rightarrow CN^p(\mathfrak{X})$$

ist injektiv und linear. Insbesondere ist das Bild von $N^p(X_\pi)$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von $CN^p(\mathfrak{X})$. Wir nennen π eine „Determination“ von α , wenn $\alpha \in CN^p(\mathfrak{X})$ im Bild von g_π liegt.

Beweis: Die Linearität ist schon in der universellen Eigenschaft des direkten Limes enthalten. Für die Injektivität können wir nun annehmen, dass $g_\pi(\alpha) = 0$ in $CN^p(\mathfrak{X})$ ist. Dann folgt $\mu^*(\alpha) = \mu'^*(0) = 0$ mit geeigneten birationalen Morphismen $\mu : X_{\pi'} \rightarrow X_\pi$ und $\mu' : X_{\pi'} \rightarrow X_{\pi'}$. Wegen der Gleichung (2.2) ist μ^* injektiv, also muss α schon Null gewesen sein. ■

Satz 2.17.

Es existiert eine natürliche, stetige Injektion

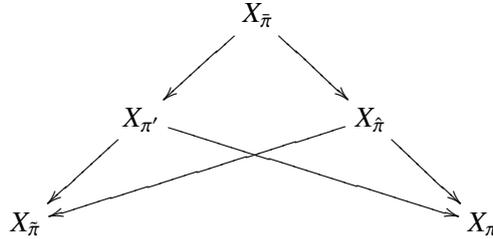
$$\iota : CN^p(\mathfrak{X}) \rightarrow N^p(\mathfrak{X})$$

mit dichtem Bild.

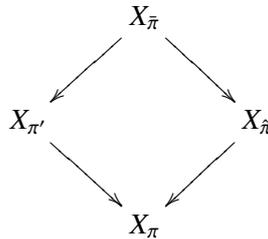
Beweis: Sei $\alpha \in CN^p(\mathfrak{X})$ beliebig. Wir wählen einen Repräsentanten $\alpha_{\tilde{\pi}} \in N^p(X_{\tilde{\pi}})$ und geben das Element $\iota(\alpha)$ durch eine, unter Pushforward kompatible Familie $(\iota(\alpha)_\pi)_\pi$ an. Ein Element $\iota(\alpha)_\pi$ dieser Familie konstruieren wir, indem wir eine gemeinsame Modifikation $X_{\pi'}$ von X_π und $X_{\tilde{\pi}}$ betrachten,

$$\begin{array}{ccc} & X_{\pi'} & \\ \tilde{\mu} \swarrow & & \searrow \mu \\ X_{\tilde{\pi}} & & X_\pi \end{array}$$

und $\iota(\alpha)_\pi := \mu_* \circ \tilde{\mu}^*(\alpha_{\tilde{\pi}}) \in N^p(X_\pi)$ setzen. Wir müssen noch zeigen, dass die Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten und der gemeinsamen Modifikation $X_{\pi'}$ ist und dass die konstruierten Elemente kompatibel unter der Pushforward Abbildung sind. Wir zeigen zunächst die Unabhängigkeit von der Modifikation $X_{\pi'}$. Ist eine zweite gemeinsame Modifikation $X_{\hat{\pi}'}$ von X_π und $X_{\tilde{\pi}}$ gegeben, so finden wir wiederum eine gemeinsame Modifikation $X_{\hat{\pi}'}$ der beiden dominierenden Modifikationen. Wir erhalten das kommutative Diagramm



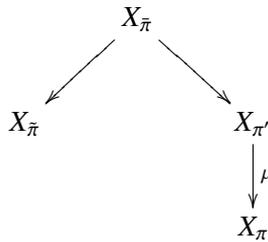
Man sieht leicht, dass in dem Diagramm das Quadrat



kommutiert und wegen Lemma 2.15 ergibt sich die Unabhängigkeit der Modifikation. Als nächstes zeigen wir, dass die Abbildung nicht von dem gewählten Repräsentanten auf $X_{\tilde{\pi}}$ abhängt. Dazu konstruieren wir zu einem weiteren Repräsentanten auf $X_{\hat{\pi}}$ eine gemeinsame Modifikation auf der die Repräsentanten übereinstimmen. Weil wir schon die Unabhängigkeit der Modifikation gezeigt haben, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass diese auch X_{π} dominiert. Aus der Konstruktion der Abbildung wird dann sofort klar, dass die Wahl unabhängig vom Repräsentanten war. Es bleibt noch zu zeigen, dass die konstruierte Familie ein wohldefiniertes Element des projektiven Limes ist. Wenn $\mu : X_{\pi'} \rightarrow X_{\pi}$ eine Modifikation ist, dann müssen wir zeigen, dass

$$\mu_*(\iota(\alpha)_{\pi'}) = \iota(\alpha)_{\pi}$$

gilt. Dies wird aber sofort aus dem Diagramm



und der Unabhängigkeit von der gemeinsamen Modifikation klar.

Die Injektivität der konstruierten Abbildung sieht man, indem man für zwei verschiedene Elemente von $CN^p(\mathfrak{X})$ die Abbildung auf einer gemeinsamen Determination X_{π} konstruiert. In der Inkarnation $N^p(X_{\pi})$ von $N^p(\mathfrak{X})$ sind die Bilder dann aber schon verschieden, also auch im projektiven Limes.

Für die Stetigkeit müssen wir wegen Satz 2.14 lediglich prüfen, dass für jedes π die Komposition

$$N^p(X_{\pi}) \rightarrow CN^p(\mathfrak{X}) \rightarrow N^p(\mathfrak{X})$$

stetig ist. Wegen Korollar 2.11 zeigen wir dies, indem wir die Stetigkeit der Komposition

$$N^P(X_\pi) \rightarrow CN^P(\mathfrak{X}) \rightarrow N^P(\mathfrak{X}) \rightarrow N^P(X_{\pi'})$$

für jedes π und jedes π' überprüfen. Die ist aber klar, denn die Komposition besteht lediglich aus Pushforwards und Pullbacks. Diese Abbildungen sind aber stetig, also auch deren Komposition

Es bleibt zu zeigen, dass das Bild dicht ist. Wir geben uns eine Weil-Klasse $\alpha \in N^P(\mathfrak{X})$ vor und betrachten das Netz $(\iota \circ g_\pi \circ h_\pi(\alpha))_\pi$ auf $N^P(\mathfrak{X})$. Man sieht leicht, dass das Netz gegen α konvergiert, denn die Inkarnationen $\alpha_{\pi'}$ und $(\iota \circ g_\pi \circ h_\pi(\alpha))_{\pi'}$ stimmen überein für $\pi' \leq \pi$. ■

Bemerkung 2.18. Die Injektion $CN^P(\mathfrak{X}) \rightarrow N^P(\mathfrak{X})$ liefert eine weitere Topologie, die Relativtopologie auf $CN^P(\mathfrak{X})$.

$$U \subset CN^P(\mathfrak{X}) \text{ ist offen} \Leftrightarrow \exists V \subset N^P(\mathfrak{X}) \text{ offen mit } U = \iota^{-1}(V).$$

Trivialerweise ist ι unter dieser Topologie stetig und wir nennen diese Topologie die „schwache Topologie“. Man sieht sofort, dass ein Netz (α_i) in $CN^P(\mathfrak{X})$ bezüglich der schwachen Topologie konvergiert, wenn das Netz $(\iota(\alpha_i))$ in $N^P(\mathfrak{X})$ konvergiert. Damit sieht man leicht, dass die kanonischen Abbildungen g_π auch bezüglich der schwachen Topologie stetig sind.

Bemerkung 2.19.

- (1) Wir werden im Folgenden zwischen Elementen aus $N^P(X_\pi)$ und deren Bildern in $CN^P(\mathfrak{X})$ nicht mehr unterscheiden. Analog verfahren wir für die Abbildung $CN^P(\mathfrak{X}) \rightarrow N^P(\mathfrak{X})$.
- (2) Ein Folge aus $CN^P(\mathfrak{X})$, die in der schwachen Topologie von $N^P(\mathfrak{X})$ konvergiert, muss nicht notwendig in der starken Topologie von $CN^P(\mathfrak{X})$ konvergieren.

Definition 2.20.

Statt numerischen Äquivalenzklassen können wir auch Divisoren direkt zurückziehen und erhalten wieder ein gerichtetes System. Ein \mathbb{R} -Cartier-Divisor ist dann ein Element des Raumes

$$\text{CDiv}(\mathfrak{X}) := \varinjlim_{\pi} \text{Div}_{\mathbb{R}}(X_\pi)$$

Wegen der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Num}_{\mathbb{R}}(X_\pi) \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{R}}(X_\pi) \rightarrow N^P(X_\pi) \rightarrow 0$$

und der Exaktheit des direkten Limes ([Eis95] Proposition A6.4) gilt

$$CN^1(\mathfrak{X}) \cong \text{CDiv}(\mathfrak{X}) \Big/ \varinjlim_{\pi} \text{Num}_{\mathbb{R}}(X_\pi)$$

Wir nennen $CN^1(\mathfrak{X})$ den Néron-Severi-Raum von \mathfrak{X} .

2.2. Positive Klassen

2.2.1. Der pseudo-effektive Kegel in $N^p(\mathfrak{X})$.

Definition 2.21.

Ein Kegel C in einem Vektorraum V heißt strikt, wenn

$$\pm x \in C \Rightarrow x = 0$$

gilt.

Zunächst benötigen wir ein Lemma über Kegel im \mathbb{R}^n .

Lemma 2.22.

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer, abgeschlossener, strikter Kegel. Sei $b \in C$ beliebig, aber fest. Dann ist

$$B_b := \{a \in C \mid b - a \in C\}$$

kompakt. Wir nennen B_b die Basis von C bezüglich b .

Beweis: Wir zeigen zuerst die Abgeschlossenheit von B_b . Sei (a_n) eine konvergente Folge in B_b . Dann gilt $b - a_n \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil C abgeschlossen ist, ist dann auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (b - a_n) \in C$. Also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in B_b$. Also ist B_b abgeschlossen. Für die Beschränktheit nehmen wir an, dass eine Folge (a_n) in B_b existiert, so dass $\|a_n\|$ streng monoton gegen unendlich konvergiert. Ohne Einschränkung sei 0 die Spitze von C . Wir wissen, dass eine Hyperebene H existiert, so dass C in dem von H induzierten oberen, abgeschlossenen Halbraum H_+ liegt. Sei H_- der untere abgeschlossene Halbraum zu H . Weil C strikt ist, können wir annehmen, dass $C \cap H = \{0\}$ ist. Nun ist $a_n \in H_+$, also $-a_n \in H_-$. Da b fest ist, gilt $\|b - a_n\| \rightarrow \infty$. Wir können nun aus der Strikt- und Abgeschlossenheit von C folgern, dass höchstens endlich viele a_n zwischen einer Hyperebene in H_+ , die parallel zu H ist und H selbst liegen. Wenn nicht, können wir eine Folge von Strahlen konstruieren, die in C liegen, aber gegen einen Strahl konvergieren, der in H liegt. Zusammen mit der Abgeschlossenheit von C würde dies die Bedingung verletzen, dass die Hyperebene den Kegel nur die Null schneidet. Nun ist klar, dass fast alle $b - a_n$ in H_- liegen müssen. Da sie aber auch in C liegen, müssen sie schon Null sein. Dies ist ein Widerspruch zur strengen Monotonie der Folge. ■

Lemma 2.23.

Für jede glatte projektive Varietät Y ist der pseudo-effektive Kegel strikt und besitzt eine kompakte Basis (d.h für jedes pseudo-effektive $\alpha \in N^p(Y)$ ist die Menge aller pseudo-effektiven Klassen $\beta \in N^p(Y)$ mit $\alpha - \beta$ pseudo-effektiv kompakt).

Beweis: Nach Lemma 2.22 hat jeder strikte, konvexe, abgeschlossene Kegel in einem endlich-dimensionalen Vektorraum eine kompakte Basis. Wir haben schon gesehen, dass $N^p(Y)$ endlich-dimensional ist und wir wissen, dass der pseudo-effektive Kegel abgeschlossen und konvex ist. Wir müssen also nur noch die Strikttheit zeigen. Sei $\alpha \in N^p(Y)$ mit $\pm \alpha$ psef. Wegen der Stetigkeit des Schnittproduktes gilt dann für ample Klassen h_1, \dots, h_{n-p}

$$\pm \alpha \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_{n-p} \geq 0$$

also

$$\alpha \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_{n-p} = 0$$

Da der ample Kegel den Néron-Severi-Raum erzeugt, folgt

$$(2.3) \quad \alpha \cdot \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_{n-p} = 0$$

mit $\beta_i \in N^1(Y)$ für $i = 1, \dots, n-p$.

Sei nun E ein Vektorbündel vom Rang $e+1$ über Y . Wir betrachten den kanonischen Morphismus $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow Y$. Wegen der Surjektivität von f ist $\pm f^*(\alpha) \in N^p(\mathbb{P}(E))$ pseudo-effektiv und mit Gleichung 2.3 folgt sofort, dass der Schnitt von $f^*(\alpha)$ mit jeder vollständigen Durchschnittsklasse gleich Null sein muss. Insbesondere gilt:

$$f^*(\alpha) \cdot c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{n+e-p} = 0.$$

Dabei bezeichnen wir mit $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$ die erste Chern-Klasse des Geradenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Das ist nichts anderes, als die zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ assoziierte Cartier-Divisorenklasse auf $\mathbb{P}(E)$. Durch Anwenden der Projektionsformel erhalten wir die Gleichung

$$\alpha \cdot f_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{n+e-p}) = 0.$$

$f_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{n+e-p})$ ist aber genau die $(n-p)$ -te Segre-Klasse des Vektorbündels E auf Y . Wir wissen aus Satz 1.14, dass diese Segre-Klassen $N^{n-p}(Y)$ erzeugen, also ist α numerisch trivial. ■

Aus der Definition des Pushforwards von Divisorenklassen sieht man, dass der Pushforward eines effektiven Divisors effektiv ist. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch Pseudo-Effektivität invariant unter birationalem Pushforward. Daher macht die folgende Definition Sinn.

Definition 2.24.

Eine Weil-Klasse $\alpha \in N^p(\mathfrak{X})$ heißt pseudo-effektiv (oder kurz „psef“), wenn alle Inkarnationen $\alpha_\pi \in N^p(X_\pi)$ pseudo-effektiv sind. Wir schreiben auch $\alpha \geq 0$, falls α psef ist.

Bemerkung 2.25. Die pseudo-effektiven Klassen bilden einen strikten, konvexen Kegel in $N^p(\mathfrak{X})$. Dieser ist bezüglich der schwachen Topologie abgeschlossen. Er liefert uns in natürlicher Weise eine partielle Ordnung auf $N^p(\mathfrak{X})$.

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta \text{ ist psef.}$$

Beweis: Da wir schon wissen, dass die Kegel auf den Inkarnationen strikt und konvex sind, folgt der erste Teil der Aussage aus der Kompatibilität von psef und Pushforward. Die Abgeschlossenheit folgt aus dem Konvergenzverhalten von Netzen in $N^p(\mathfrak{X})$, da alle pseudo-effektiven Kegel auf den Inkarnationen abgeschlossen sind. ■

Wir können nun die folgende Verallgemeinerung von Lemma 2.23 beweisen. Diese ist notwendig, um das positive Produkt von Divisorenklassen einzuführen. Um den Beweis zu führen, benötigen wir das Tychonoff-Theorem aus der Topologie. Der Beweis ist umfangreich und wir verweisen daher auf [Dug78] Kapitel XI Theorem 1.4. Man kann sogar zeigen, dass das Theorem äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

Satz 2.26 (Tychonoff).

Das topologische Produkt beliebig vieler kompakter topologischer Räume ist kompakt.

Wir zeigen nun den folgenden Satz.

Satz 2.27.

Der pseudo-effektive Kegel in $N^p(\mathfrak{X})$ hat eine kompakte Basis, d.h. für jede Psef-Klasse $\alpha \in N^p(\mathfrak{X})$ ist die Menge der Weil-Klassen $\beta \in N^p(\mathfrak{X})$ mit $0 \leq \beta \leq \alpha$ in der schwachen Topologie kompakt.

Beweis: Sei $\alpha \in N^p(\mathfrak{X})$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass die Menge

$$K_\alpha := \{\beta \in N^p(\mathfrak{X}) \mid 0 \leq \beta \leq \alpha\}$$

kompakt in der schwachen Topologie ist. Sei α_π eine Inkarnation von α auf $N^p(X_\pi)$. Dann ist

$$K_{\alpha,\pi} := \{\beta_\pi \in N^p(X_\pi) \mid 0 \leq \beta_\pi \leq \alpha_\pi\}$$

nach Lemma 2.23 kompakt und wegen Tychonoffs Theorem auch

$$\prod_{\pi} K_{\alpha,\pi}.$$

Nun ist K_α eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\prod_{\pi} K_{\alpha,\pi}$, also ist auch K_α kompakt. ■

2.2.2. Nef- und Big-Kegel im Riemann-Zariski-Raum.

Wir wollen die Begriffe pseudo-effektiv, nef und big auf dem Néron-Severi-Raum von \mathfrak{X} einführen. Dazu müssen wir wissen, wie sich die Eigenschaften unter Pullback und Pushforward verhalten.

Lemma 2.28.

Sei $\mu : Y' \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus. Dann ist $\mu_*(\alpha')$ genau dann pseudo-effektiv, wenn $\alpha' \in N^1(Y')$ pseudo-effektiv war.

Beweis: Es reicht wegen der Stetigkeit des Pushforwards zu zeigen, dass die Behauptung für effektive Divisoren gilt. Der Pushforward eines Divisors α' ist aber per Definition genau dann effektiv, wenn α' es war. ■

Lemma 2.29.

Sei $\mu : Y' \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus. Dann ist $\mu^*(\alpha) \in N^1(Y')$ genau dann nef (psef, big), wenn $\alpha \in N^1(Y)$ nef (psef, big) war.

Beweis: Der Fall α big ergibt sich aus [Laz04a] Lemma 2.1.13 und Definition 2.1.11. Für pseudo-effektives α können wir in der einen Richtung wegen der Stetigkeit des Pullbacks annehmen, dass die α definierenden lokalen Funktionen regulär sind. Dann sind aber auch deren Rückzüge regulär, also ist auch $\mu^*(\alpha)$ effektiv. Für die andere Richtung wendet man lediglich obiges Lemma auf die Gleichung $\mu_*(\mu^*(\alpha)) = \alpha$ an. Es bleibt der Fall, dass α numerisch-effektiv ist. Dann ergibt sich

die Behauptung aber aus der Projektionsformel und der Surjektivität des Pushforwards, denn für jede irreduzible Kurve C' auf Y' gilt:

$$\mu^*(\alpha) \cdot C' \geq 0 \Leftrightarrow \mu_*(\mu^*(\alpha) \cdot C') \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \mu_*(C') \geq 0.$$

■

Lemma 2.30.

Sei $\mu : Y' \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus und $\alpha' \in N^1(Y')$ big. Dann ist auch $\mu_*(\alpha') \in N^1(Y)$ big.

Beweis: Wir wissen schon, dass $\mu_*(\alpha')$ pseudo-effektiv ist. Da μ_* surjektiv und linear ist, ist μ_* eine offene Abbildung und daher ist das Bild des Big-Kegels unter der Pushforwardabbildung eine offene Teilmenge des pseudo-effektiven Kegels in $N^1(Y)$. Also liegt das Bild im Inneren des pseudo-effektiven Kegels, d.h. im Big-Kegel. ■

Wir sind nun in der Lage die obigen Eigenschaften für Divisoren im Néron-Severi-Raum von \mathfrak{X} einzuführen, indem wir sie auf Repräsentanten definieren. Die Wohldefiniertheit ergibt sich dann sofort aus Lemma 2.29.

Definition 2.31.

Eine Cartier-Divisorenklasse $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ heißt nef (psef oder big), wenn ein Repräsentant α_π auf X_π existiert mit α_π nef (psef oder big).

Satz 2.32.

Die pseudo-effektiven Cartier-Klassen bilden einen abgeschlossenen, konvexen Kegel in $CN^1(\mathfrak{X})$, den wir mit $\text{Psef}(\mathfrak{X})$ bezeichnen. Sein Urbild unter den kanonischen Abbildungen g_π ist genau der pseudo-effektive Kegel in $N^1(X_\pi)$. Die pseudo-effektiven Weil- und Cartier-Divisorenklassen entsprechen sich unter der stetigen Injektion $CN^p(\mathfrak{X}) \rightarrow N^p(\mathfrak{X})$.

Beweis: $\text{Psef}(\mathfrak{X})$ ist ein konvexer Kegel, denn die Addition und die skalare Multiplikation werden auf den Repräsentanten ausgeführt. Die Entsprechung von pseudo-effektiven Weil- und Cartier-Divisorenklassen ist sofort klar, wenn man die Konstruktion der Abbildung in Satz 2.17 und die obigen Lemmata benutzt. Es bleibt die Gleichung

$$g_\pi^{-1}(\text{Psef}(\mathfrak{X})) = \text{Psef}(X_\pi)$$

für alle π zu zeigen. Wegen der Stetigkeit von g_π und der Beschreibung der starken Topologie in Abschnitt 2.1.4 ist dann der pseudo-effektive Kegel in $CN^1(\mathfrak{X})$ abgeschlossen. Die Inklusion $g_\pi^{-1}(\text{Psef}(\mathfrak{X})) \supset \text{Psef}(X_\pi)$ ist trivial. Für die andere Inklusion wählen wir $\gamma \in g_\pi^{-1}(\text{Psef}(\mathfrak{X}))$ beliebig. Dann gilt: $g_\pi(\gamma) \in \text{Psef}(\mathfrak{X})$, also existiert ein Repräsentant $\gamma' \in \text{Psef}(X_{\pi'})$ mit $g_\pi(\gamma) = g_{\pi'}(\gamma')$. Dann existiert eine gemeinsame Modifikation $X_{\bar{\pi}}$ zusammen mit Morphismen

$$\begin{array}{ccc} & X_{\bar{\pi}} & \\ \mu' \swarrow & & \searrow \mu \\ X_{\pi'} & & X_\pi \end{array}$$

und

$$\gamma = \mu_* \circ \mu'^*(\gamma').$$

Weil γ' psef war, und Pullback und Pushforward die Pseudo-Effektivität nicht verändern, ist auch γ psef, also ist die Inklusion gezeigt. ■

Definition 2.33.

Für $\alpha, \beta \in CN^1(\mathfrak{X})$ setzen wir

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \text{ ist pseudo-effektiv.}$$

In Kapitel 1 haben wir gesehen, wie die Kegel der einzelnen Divisorenklassen zusammenhängen. In $CN^1(\mathfrak{X})$ werden einige, aber nicht alle dieser Zusammenhänge übernommen.

Satz 2.34.

Die Big-Divisoren bilden einen offenen, konvexen Kegel in $CN^1(\mathfrak{X})$, den wir $\text{Big}(\mathfrak{X})$ nennen. Sein Urbild unter den kanonischen Abbildungen g_π ist genau der Big-Kegel in $N^1(X_\pi)$. Der pseudo-effektive Kegel ist der Abschluss des Big-Kegels. Der Big-Kegel ist das Innere des pseudo-effektiven Kegels.

Beweis: Die Konvexität und die Kegeleigenschaft folgt wie beim pseudo-effektiven Kegel sofort aus der Definition. Durch Rückzug auf eine geeignete Determination sieht man auch leicht, dass $\text{Big}(\mathfrak{X}) \subset \text{Psef}(\mathfrak{X})$ gilt. Wir zeigen zunächst:

$$g_\pi^{-1}(\text{Big}(\mathfrak{X})) = \text{Big}(X_\pi)$$

für alle π . Wegen der Stetigkeit von g_π und der Beschreibung der starken Topologie in Abschnitt 2.1.4 ist $\text{Big}(\mathfrak{X})$ dann offen. Die Inklusion $g_\pi^{-1}(\text{Big}(\mathfrak{X})) \supset \text{Big}(X_\pi)$ ist trivial. Für die andere Inklusion wählen wir $\gamma \in g_\pi^{-1}(\text{Big}(\mathfrak{X}))$ beliebig. Dann gilt: $g_\pi(\gamma) \in \text{Big}(\mathfrak{X})$, also existiert ein Repräsentant $\gamma' \in \text{Big}(X_{\pi'})$ mit $g_\pi(\gamma) = g_{\pi'}(\gamma')$. Also existiert eine gemeinsame Modifikation $X_{\tilde{\pi}}$ zusammen mit Morphismen

$$\begin{array}{ccc} & X_{\tilde{\pi}} & \\ \mu' \swarrow & & \searrow \mu \\ X_{\pi'} & & X_\pi \end{array}$$

und

$$\gamma = \mu_* \circ \mu'^*(\gamma').$$

Weil γ' big war, und Pullback und Pushforward das Big-sein nicht verändern, ist auch γ big, also ist die Inklusion gezeigt.

Als nächstes möchten wir

$$\overline{\text{Big}(\mathfrak{X})} = \text{Psef}(\mathfrak{X})$$

zeigen. Die Inklusion $\overline{\text{Big}(\mathfrak{X})} \subset \text{Psef}(\mathfrak{X})$ ergibt sich aus der Definition des Abschlusses, denn $\text{Psef}(\mathfrak{X})$ ist eine abgeschlossene Menge, die $\text{Big}(\mathfrak{X})$ enthält. Für die andere Richtung geben wir uns $\alpha \in \text{Psef}(\mathfrak{X})$ vor. Dann existiert ein pseudo-effektiver Repräsentant $\alpha_\pi \in N^1(X_\pi)$. Wegen Satz 1.41 liegt dann α_π im Abschluss des Big-Kegels von $N^1(X_\pi)$, also existiert eine Folge von Big-Divisoren, die gegen α_π konvergiert. Unter der stetigen Abbildung g_π sind die Bilder dieser Folge big in $CN^1(\mathfrak{X})$ und konvergieren gegen α . Damit liegt α wegen Satz 2.7 im Abschluss des Big-Kegels.

Schließlich müssen wir noch

$$\text{Big}(\mathfrak{X}) = \overset{\circ}{\text{Psef}(\mathfrak{X})}$$

zeigen. Die Inklusion $\text{Big}(\mathfrak{X}) \subset \overset{\circ}{\text{Psef}}(\mathfrak{X})$ folgt sofort aus der Definition des Inneren, denn der Big-Kegel ist eine offene Teilmenge des pseudo-effektiven Kegels. Für die andere Richtung geben wir uns α im Inneren des pseudo-effektiven Kegels vor. Wir finden dann eine offene Umgebung $U = U(\alpha) \subset \text{Psef}(\mathfrak{X})$. Wenn α_π ein Repräsentant von α auf X_π ist, dann ist $g_\pi^{-1}(U) \subset \text{Psef}(X_\pi)$ eine offene Umgebung von α_π , also liegt α_π im Inneren des pseudo-effektiven Kegels. Wir wenden wieder Satz 1.41 an und folgern daraus, dass α_π big ist. Somit ist auch $\alpha \in \text{CN}^1(\mathfrak{X})$ big und die Behauptung ist gezeigt. ■

Auch die Nef-Divisoren bilden in natürlicher Weise einen abgeschlossenen, konvexen Kegel in $\text{CN}^1(\mathfrak{X})$. Im Gegensatz zum Néron-Severi-Raum von X_π ist das Innere des Nef-Kegels leer. Wir können also nicht von einem Ample-Kegel im Riemann-Zariski-Raum sprechen. Im Wesentlichen liegt das daran, dass Amplesein nur unter endlichem Pullback erhalten bleibt. An folgendem Beispiel können wir gut sehen, was passiert.

Beispiel 2.35. Sei $X = \text{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$ die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in einem Punkt p . Sei $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ ein ample Divisor auf \mathbb{P}^2 , der p enthält. Dann ist der Rückzug $\pi^*(D) = F + E$, wobei E der exzeptionelle Divisor und F die strikte Transformierte von D ist. Dann kann $\pi^*(D)$ nicht ample sein, denn

$$\pi^*(D) \cdot E = (F + E) \cdot E = F \cdot E + E^2 = 1 - 1 = 0.$$

Das wäre ein direkter Widerspruch zum Satz von Nakai-Moishezon-Kleiman.

Da wir im Néron-Severi-Raum von \mathfrak{X} alle Modifikationen betrachten, gibt es für jeden Divisor auch immer einen Rückzug, der nicht ample ist. Das können wir z.B. erreichen, indem wir die Varietät in einem Punkt aufblasen, der auf dem Divisor liegt.

2.3. Das positive Schnittprodukt

Wir wollen zunächst das gewöhnliche Schnittprodukt und dessen Eigenschaften auf den Riemann-Zariski-Raum übertragen.

2.3.1. Das Schnittprodukt im Néron-Severi-Raum von \mathfrak{X} .

Satz und Definition 2.36.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \text{CN}^1(\mathfrak{X})$. Wegen Definition 2.12 können wir annehmen, dass für $i = 1, \dots, p$ die Divisoren α_i einen Repräsentanten $\alpha_{i,\pi}$ auf X_π haben. Wir definieren das Schnittprodukt $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \in \text{CN}^p(\mathfrak{X})$ durch

$$\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p := g_\pi(\alpha_{1,\pi} \cdot \dots \cdot \alpha_{p,\pi})$$

Das Schnittprodukt ist wohldefiniert und stetig in der starken Topologie auf $\text{CN}^1(\mathfrak{X})$.

Beweis: Wegen Satz 2.4 ist die Wohldefiniertheit klar. Die Stetigkeit ergibt sich sofort aus der Stetigkeit des Schnittproduktes auf $N^1(X_\pi)$ und der Definition der Stetigkeit im direkten Limes. ■

Das Schnittprodukt lässt sich nun ähnlich wie das Schnittprodukt für numerische Äquivalenzklassen als bilineare Abbildung auffassen. Dies fassen wir nun zusammen.

Satz 2.37.

Die Schnittprodukt induziert eine bilineare Abbildung

$$CN^p(\mathfrak{X}) \times N^q(\mathfrak{X}) \rightarrow N^{p+q}(\mathfrak{X})$$

und für $p = 1, q = n - 1$ eine Dualität

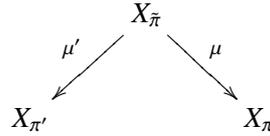
$$CN^1(\mathfrak{X}) \times N^{n-1}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R},$$

die für feste $\omega \in N^{n-1}(\mathfrak{X})$ eine in der starken Topologie stetige Linearform

$$A_\omega : CN^1(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}$$

liefert.

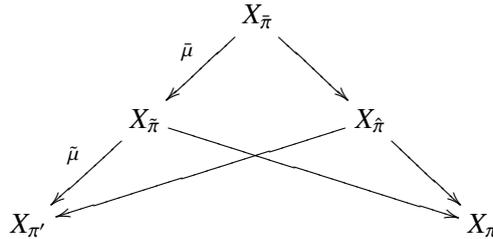
Beweis: Sei $\alpha \in CN^p(\mathfrak{X})$ eine Cartier-Klasse und $\beta \in N^q(\mathfrak{X})$ eine Weil-Klasse. Wir wählen einen Repräsentanten $\alpha_{\pi'}$ auf $X_{\pi'}$ von α und definieren das Element $\alpha \cdot \beta \in N^{p+q}(\mathfrak{X})$ indem wir die Inkarnationen $(\alpha \cdot \beta)_\pi$ angeben und zeigen, dass sie kompatibel unter Pushforward sind. Um $(\alpha \cdot \beta)_\pi$ zu konstruieren, wählen wir eine gemeinsame Modifikation $X_{\tilde{\pi}}$ von $X_{\pi'}$ und X_π



und setzen

$$(\alpha \cdot \beta)_\pi := \mu_* (\mu'^*(\alpha_{\pi'}) \cdot \beta_{\tilde{\pi}}).$$

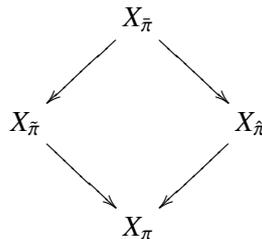
Wie in Satz 2.17 müssen wir uns wieder von der Wohldefiniertheit der Abbildung überzeugen. Wir beginnen wieder mit der Unabhängigkeit von $X_{\tilde{\pi}}$ und konstruieren Modifikationen wie im Beweis von Satz 2.17 und erhalten das Diagramm



Die Projektionsformel liefert uns die Identität

$$\tilde{\mu}_*(\tilde{\mu}^* \circ \tilde{\mu}^*(\alpha_{\pi'}) \cdot \beta_{\tilde{\pi}}) = \tilde{\mu}^*(\alpha_{\pi'}) \cdot \beta_{\tilde{\pi}},$$

die uns zusammen mit der Kommutativität des Quadrates



die Unabhängigkeit von $X_{\bar{\pi}}$ liefert. Die Unabhängigkeit des Repräsentanten ergibt sich nun leicht, denn wir können für einen weiteren Repräsentanten einen gemeinsamen Rückzug finden, auf dem die Rückzüge der Repräsentanten übereinstimmen. Wegen der bereits gezeigten Unabhängigkeit des gemeinsamen Rückzugs ist dann aber die konstruierte Abbildung nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängig. Dass die konstruierte Familie ein Element im projektiven Limes ist, zeigt man nun exakt wie in Satz 2.17, indem man die Projektionsformel anwendet. Die Bilinearität folgt dann sofort aus der Konstruktion und der Linearität der kanonischen Abbildungen in den direkten bzw. aus dem projektiven Limes. Es bleibt die Stetigkeit der Abbildung A_ω zu zeigen. Dies können wir anhand der Komposition

$$N^1(X_\pi) \rightarrow CN^1(\mathfrak{X}) \rightarrow N^n(\mathfrak{X}) \rightarrow N^n(X_{\pi'}) \rightarrow \mathbb{R}$$

überprüfen. Aus der obigen Konstruktion ergibt sich aber, dass dies nur eine Komposition von Rückzügen, Pushforwards, dem gewöhnlichen Schnittprodukt und der Gradabbildung ist. Diese Abbildungen sind aber alle stetig. ■

Wir werden nun einige Abschätzungen des Schnittproduktes beweisen, die wir für die Definition des positiven Schnittproduktes benötigen werden.

Lemma 2.38.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in CN^1(\mathfrak{X})$ mit α_1 pseudo-effektiv und α_i nef für $2 \leq i \leq p$. Dann ist das Schnittprodukt $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \in CN^p(\mathfrak{X})$ pseudo-effektiv.

Beweis: Wegen der Stetigkeit des Schnittproduktes kann man annehmen, dass α_1 effektiven und $\alpha_2, \dots, \alpha_p$ ample Repräsentanten haben. Ein geeignetes positives Vielfaches der Divisoren ist dann sehr ample. Dann ist aber das Schnittprodukt der Repräsentanten nach dem Satz von Bertini effektiv. ■

Satz 2.39 (Monotonie des Schnittproduktes).

Seien α_i, α'_i nef in $CN^1(\mathfrak{X})$ für $1 \leq i \leq p$ und sei $\alpha_i \geq \alpha'_i$ für alle i . Dann gilt

$$\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \geq \alpha'_1 \cdot \dots \cdot \alpha'_p$$

in $N^p(\mathfrak{X})$.

Beweis: Wir haben $\alpha_1 - \alpha'_1 \geq 0$ und $\alpha_2, \dots, \alpha_p$ nef nach Voraussetzung. Mit obigem Lemma folgt

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p \geq 0$$

also

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p \geq \alpha'_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p$$

Das selbe Argument können wir wegen der Symmetrie des Schnittproduktes auf die rechte Seite der Ungleichung anwenden und erhalten

$$\alpha_2 \cdot \alpha'_1 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_p \geq \alpha'_2 \cdot \alpha'_1 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_p$$

und nach p Schritten wegen der Transitivität von \geq die Aussage

$$\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \geq \alpha'_1 \cdot \dots \cdot \alpha'_p.$$

■

Wir erhalten nun leicht die wichtige Abschätzung

Korollar 2.40.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in CN^1(\mathfrak{X})$ und sei $0 \leq p \leq n$ so, dass α_i nef ist für $i \leq p$. Ferner existiere eine Nef-Klasse $\omega \in CN^1(\mathfrak{X})$, so dass $\omega \pm \alpha_i$ nef ist für jedes $i > p$. Dann existiert eine Konstante C_n , die nur von n abhängt mit

$$|\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n| \leq C_n(\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \omega^{n-p})$$

Beweis: Für $i > p$ schreiben wir α_i als Differenz der Nef-Klassen $\beta_i := \alpha_i + \omega$ und ω . Weil auch $\omega - \alpha_i$ nef ist, gilt $\omega \geq \alpha_i$ und daher $\beta_i \leq 2\omega$ für $p < i \leq n$. Wir bekommen

$$(\beta_{p+1} - \omega) \cdot \dots \cdot (\beta_n - \omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sigma_{i_1, \dots, i_k} \beta_{i_1} \cdot \dots \cdot \beta_{i_k} \cdot \omega^{n-p-k}$$

mit $\sigma_{i_1, \dots, i_k} \in \{-1, 1\}$. Wir schätzen nun ab

$$\begin{aligned} |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n| &= |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot (\beta_{p+1} - \omega) \cdot \dots \cdot (\beta_n - \omega)| \\ &= |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sigma_{i_1, \dots, i_k} \beta_{i_1} \cdot \dots \cdot \beta_{i_k} \cdot \omega^{n-p-k}| \\ &\leq \sum_{i_1 < \dots < i_k} |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \beta_{i_1} \cdot \dots \cdot \beta_{i_k} \cdot \omega^{n-p-k}| \\ &\stackrel{2.38}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \beta_{i_1} \cdot \dots \cdot \beta_{i_k} \cdot \omega^{n-p-k} \\ &\stackrel{2.39}{\leq} \sum_{i_1 < \dots < i_k} 2^k \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \omega^{n-p} = C_n \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \cdot \omega^{n-p} \end{aligned}$$

■

2.3.2. Positive Schnitte.

Während wir bisher nur die Ergebnisse für das gewöhnliche Schnittprodukt auf die Situation im Riemann-Zariski-Raum übersetzt haben, werden wir nun ein Schnittprodukt einführen, das die Struktur des Riemann-Zariski-Raumes zwingend voraussetzt. Dieses wurde bereits im analytischen Kontext in [BDPP04] eingeführt und wurde in [BFJ06] algebraisch beschrieben. An dieser Stelle werden wir die dort angegebene Konstruktion detailliert ausarbeiten.

Satz und Definition 2.41.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in CN^1(\mathfrak{X})$ Big-Klassen. Das positive Schnittprodukt

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle \in N^p(\mathfrak{X})$$

ist definiert als die kleinste obere Schranke (im Sinne der Bemerkung 2.25) der Produkte

$$(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p)$$

mit $(\alpha_i - D_i)$ nef und effektiven \mathbb{Q} -Divisoren D_i für $i = 1, \dots, p$, die auf geeigneten Modifikationen von X existieren. Dabei fassen wir die D_i in natürlicher Weise als Elemente von $CN^1(\mathfrak{X})$ auf. Das positive Schnittprodukt ist wohldefiniert.

Bemerkung 2.42. Wenn das Supremum einer partiell geordneten Menge existiert, so ist es eindeutig bestimmt.

Um den Beweis führen zu können, teilen wir ihn in mehrere Lemmata auf. Zunächst benötigen wir einige Details über Aufblasungen von Idealgarben. Diese finden wir etwa in [Har77], II.7.

Lemma 2.43.

Seien D_1, D_2 effektive Divisoren auf einer glatten projektiven Varietät X und sei $\pi : X_\pi \rightarrow X$ der normalisierte Blow-up in der Idealgarbe $\mathcal{I} := \mathcal{O}_X(-D_1) + \mathcal{O}_X(-D_2)$. Dann ist $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_\pi}$ invertierbar und es gilt

$$\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_\pi} = \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*(D_1)) + \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*(D_2)).$$

Ferner ist $D = \min(\pi^*(D_1), \pi^*(D_2))$ für den zu $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_\pi}$ gehörigen Divisor D . Hier betrachten wir das Minimum als koeffizientenweises Minimum der entsprechenden Weil-Divisoren.

Beweis: Für die erste Aussage betrachten wir den Rückzug der Garben

$$\pi^*(\mathcal{I}) = \pi^*(\mathcal{O}_X(-D_1) + \mathcal{O}_X(-D_2)).$$

Wir haben kanonische Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi^*(\mathcal{I}) &\rightarrow \mathcal{O}_{X_\pi} \\ \pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) + \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) &\rightarrow \mathcal{O}_{X_\pi}, \end{aligned}$$

die von der Inklusion der entsprechenden Idealgarben in \mathcal{O}_X induziert werden. Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht links-exakt, daher müssen die induzierten Abbildungen nicht injektiv sein. Wegen

$$\pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) + \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) = \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*D_1) + \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*D_2)$$

ist $\pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) + \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2)$ als Summe zweier Idealgarben bereits eine Idealgarbe in \mathcal{O}_{X_π} . Somit ist die induzierte Abbildung auch injektiv. Als nächstes betrachten wir die kanonische, surjektive Abbildung

$$\mathcal{O}_X(-D_1) \oplus \mathcal{O}_X(-D_2) \rightarrow \mathcal{O}_X(-D_1) + \mathcal{O}_X(-D_2) \rightarrow 0$$

π^{-1} ist exakt, das Tensorprodukt über $\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_\pi}$ ist rechts-exakt und die direkte Summe vertauscht mit dem Tensorprodukt. Also ist

$$\pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) \oplus \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) \rightarrow \pi^*(\mathcal{O}_X(-D_1) + \mathcal{O}_X(-D_2)) \rightarrow 0$$

exakt. Andererseits haben wir die exakte Sequenz

$$\pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) \oplus \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) \rightarrow \pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) + \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) \rightarrow 0.$$

Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) \oplus \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) & \twoheadrightarrow & \pi^*(\mathcal{I}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) + \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{X_\pi} \end{array}$$

Wenn wir zeigen, dass es kommutativ ist, sind wir fertig, denn dann stimmen die Bilder der Garbe $\pi^*(\mathcal{I})$ und der Idealgarbe $\pi^*\mathcal{O}_X(-D_1) + \pi^*\mathcal{O}_X(-D_2)$ in \mathcal{O}_{X_π} überein. Dafür betrachten wir die Kompositionen auf den Halmen und geben die Abbildungen explizit an. Für $y \in X_\pi$ erhalten wir aus den oben beschriebenen Konstruktionen die Abbildungen der Kompositionen auf den Halmen

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_X(-D_1)_{\pi(y)} \oplus \mathcal{O}_X(-D_2)_{\pi(y)}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,\pi(y)}} \mathcal{O}_{X_\pi,y} &\rightarrow \mathcal{O}_{X_\pi,y} \\ (f_{\pi(y)}, g_{\pi(y)}) \otimes h_y &\mapsto ((g + f) \circ \pi)_y \cdot h_y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_X(-D_1)_{\pi(y)} \oplus \mathcal{O}_X(-D_2)_{\pi(y)}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,\pi(y)}} \mathcal{O}_{X_\pi,y} &\rightarrow \mathcal{O}_{X_\pi,y} \\ (f_{\pi(y)}, g_{\pi(y)}) \otimes h_y &\mapsto ((g \circ \pi + f \circ \pi)_y \cdot h_y \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die Abbildungen auf den Halmen gleich sind und daher sind auch die Garbenmorphismen identisch.

Für die zweite Aussage bemerken wir, dass die Idealgarben $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_\pi}, \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*D_1), \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*D_2)$ jeweils lokal von einem Element erzeugt werden, denn $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_\pi}$ ist nach [Har77] II. Prop. 7.13 invertierbar. Sei daher $x \in X_\pi$ beliebig und sei $U = U_x$ eine Umgebung von x , so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X_\pi}(U) &= (h) \\ \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*D_1)(U) &= (f_1) \\ \mathcal{O}_{X_\pi}(-\pi^*D_2)(U) &= (f_2) \end{aligned}$$

Die Erzeuger der Idealgarben liefern natürlich genau die Funktionen, die die entsprechenden Cartier-Divisoren definieren ([Har77] II. Prop. 6.18) und daher haben wir

$$\begin{aligned} D|_U &= (h) \\ \pi^*D_1|_U &= (f_1) \\ \pi^*D_2|_U &= (f_2). \end{aligned}$$

und es gilt $(h) = (f_1) + (f_2)$. Wir wollen die Aussage lokal zeigen und wir schreiben dazu

$$\begin{aligned} \pi^*D_i|_U &= \sum_Y \nu_{Y \cap U}(f_i) \cdot Y \text{ für } i = 1, 2 \\ D|_U &= \sum_Y \nu_{Y \cap U}(h) \cdot Y \end{aligned}$$

wobei die Summen über alle irreduziblen Untervarietäten Y von X der Kodimension 1 laufen. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass U affin ist und $\mathbb{I}(Y \cap U)$ von einem Element $u \in k[U]$ des affinen Koordinatenrings von U erzeugt wird. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \nu_{Y \cap U}(f_i) &= \max \{n \in \mathbb{N} | f_i \in (u)^n\} \text{ für } i = 1, 2 \\ \nu_{Y \cap U}(h) &= \max \{n \in \mathbb{N} | h \in (u)^n\} \end{aligned}$$

Wegen

$$f_1, f_2 \in (u)^{\min(\nu_{Y \cap U}(f_1), \nu_{Y \cap U}(f_2))}$$

gilt auch

$$h \in (u)^{\min(\nu_{Y \cap U}(f_1), \nu_{Y \cap U}(f_2))},$$

denn $(h) = (f_1) + (f_2)$. Damit haben wir

$$v_{Y \cap U}(h) \geq \min(v_{Y \cap U}(f_1), v_{Y \cap U}(f_2)).$$

h teilt f_1 und f_2 , deshalb folgt $f_1, f_2 \in (u)^{v_{Y \cap U}(h)}$, also

$$v_{Y \cap U}(h) \leq \min(v_{Y \cap U}(f_1), v_{Y \cap U}(f_2))$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. \blacksquare

Lemma 2.44.

Sei $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ big. Die Menge

$$\mathcal{D}(\alpha) := \left\{ D \in CN^1(\mathfrak{X}) \mid D \text{ ein effektiver } \mathbb{Q}\text{-Divisor und } (\alpha - D) \text{ nef} \right\}$$

ist nicht-leer und gefiltert. Das heißt für alle $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\alpha)$ existiert ein $D \in \mathcal{D}(\alpha)$ so, dass $\alpha - D \geq \alpha - D_i$ ist für $i=1,2$.

Beweis: Da α eine Big-Klasse ist, finden wir einen Repräsentanten α_π auf X_π und einen effektiven \mathbb{Q} -Divisor D_π , so dass $\alpha_\pi - D_\pi$ ample auf X_π ist. Dies wird zum Beispiel in [Laz04a] 2.27 gezeigt. Damit ist $\mathcal{D}(\alpha)$ nicht-leer. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{D}(\alpha)$ gefiltert ist. Dazu nehmen wir an, dass D_1, D_2 durch effektive \mathbb{Q} -Divisoren auf X repräsentiert werden. Durch Multiplizieren mit dem Hauptnenner können wir auch erreichen, dass D_1 und D_2 ganzzahlig sind. Wir wenden nun Lemma 2.43 an und erhalten nach Übergang auf die zu D_1 und D_2 äquivalenten Repräsentanten π^*D_1 und π^*D_2 auf der Modifikation $\pi : X_\pi \rightarrow X$, den Divisor D_π auf X_π mit

$$D_\pi = \min(\pi^*(D_1), \pi^*(D_2))$$

Damit folgt sofort

$$\alpha_\pi - D_\pi \geq \alpha_\pi - \pi^*D_i, \text{ für } i = 1, 2.$$

Somit liefert uns D_π eine Cartier-Klasse $D \in CN^1(\mathfrak{X})$ mit

$$\alpha - D \geq \alpha - D_i, \text{ für } i = 1, 2.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Klasse $\alpha - D$ nef ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und A ein ample Divisor, $i \in \{1, 2\}$. Wir benutzen [Laz04a] Korollar 1.4.10. und folgern, dass

$$\alpha - D_i + \frac{1}{n}A$$

ample ist, also auch

$$n\alpha - nD_i + A.$$

Daher existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$mn\alpha + mA - mnD_i$$

global erzeugt ist. Sei $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_X(-mnD_1) + \mathcal{O}_X(-mnD_2)$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_X(-mnD_1) \oplus \mathcal{O}_X(-mnD_2) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

und erhalten durch Tensorieren

$$\mathcal{O}_X(mn\alpha + mA) \otimes (\mathcal{O}_X(-mnD_1) \oplus \mathcal{O}_X(-mnD_2)) \rightarrow \mathcal{O}_X(mn\alpha + mA) \otimes \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Offenbar ist die linke Seite global erzeugt, also ist wegen der Surjektivität der Abbildung

$$\mathcal{O}_X(mn\alpha + mA) \otimes \tilde{\mathcal{F}}$$

global erzeugt. Damit ist aber auch der Rückzug

$$\pi^*(\mathcal{O}_X(mn\alpha + mA) \otimes \tilde{\mathcal{F}}) = \pi^*\mathcal{O}_X(mn\alpha + mA) \otimes \pi^*\tilde{\mathcal{F}}$$

global erzeugt. Mit $\tilde{D} := \min(\pi^*mnD_1, \pi^*mnD_2)$ und Lemma 2.43 haben wir dann, dass der korrespondierende Divisor

$$(mn\pi^*\alpha + m\pi^*A) - \tilde{D}$$

als Bild von $\pi^*\mathcal{O}_X(mn\alpha + mA) \otimes \pi^*\tilde{\mathcal{F}}$ global erzeugt ist. Für $D := \min(\pi^*D_1, \pi^*D_2)$, ist dann

$$(mn\pi^*\alpha + m\pi^*A) - mnD$$

global erzeugt und damit insbesondere nef. Daher ist auch

$$\pi^*\alpha - D + \frac{1}{n}\pi^*A$$

nef und wir erhalten wegen der Abgeschlossenheit des Nef-Kegels, dass der Limes $\pi^*\alpha - D$ nef ist. ■

Als nächstes benötigen wir ein topologisches Lemma über die Konvergenzeigenschaften von Netzen in kompakten Räumen. Für die entsprechenden Definitionen verweisen wir auf [Dug78].

Lemma 2.45.

Sei V ein topologischer Vektorraum mit Hausdorffeigenschaft und K ein strikter, abgeschlossener, konvexer Kegel. Sei ferner \geq die zu diesem Kegel assoziierte partielle Ordnung. Dann besitzt jede Teilmenge $S \subset V$, die gefiltert und in einer kompakten Teilmenge von V enthalten ist, eine bezüglich \geq kleinste obere Schranke. Diese ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Filtrierung von S bedeutet exakt, dass wir ein Netz in S bezüglich der partiellen Ordnung \geq auf S haben ([Dug78] Kap. X, Definition 1.2). Dieses induziert eine Filterbasis ([Dug78] Kap. X, Definition 2.1, Ex. 2), so dass sich die Häufungspunkte des Netzes ([Dug78] Kap. X, Definition 1.2 (2)) und die der Filterbasis entsprechen ([Dug78] Kap. X, Ex. 5).

Wir zeigen als erstes, dass jeder Häufungspunkt des Netzes ein Supremum von S bezüglich \geq ist. Sei daher $x_0 \in V$ ein Häufungspunkt. Angenommen, x_0 ist keine obere Schranke für S . Dann existiert ein $y \in S$ mit $y \geq x_0$ und $y \neq x_0$. Der Kegel, der die Ordnung liefert, ist abgeschlossen, also ist die Menge

$$K_y := \{x \in V \mid x \geq y\} \subset V$$

abgeschlossen und $x_0 \notin K_y$, wegen der Antisymmetrie von \geq . Es folgt, dass $V \setminus K_y$ offen ist. Da $x_0 \in V \setminus K_y$ ein Häufungspunkt ist, existiert ein $\tilde{y} \in S$ mit $\tilde{y} \geq y$ (d.h. $\tilde{y} \in K_y$) und $\tilde{y} \in V \setminus K_y$. Widerspruch.

Wir müssen noch zeigen, dass jeder Häufungspunkt x_0 auch die kleinste obere Schranke für S ist. Angenommen, es gäbe noch eine weitere obere Schranke $y \in V$ mit $x_0 \geq y$ und $y \neq x_0$. Dann ist

$$S \subset \widetilde{K}_y := \{x \in V \mid y \geq x\} \subset V$$

abgeschlossen und wegen $K_y \cap \widetilde{K}_y = \{y\} \neq x_0$ gilt $x_0 \notin \widetilde{K}_y$. Daher ist x_0 in der offenen Menge $V \setminus \widetilde{K}_y \subset V$ enthalten, und weil x_0 ein Häufungspunkt ist, existiert ein $s \in S$ mit $s \in V \setminus \widetilde{K}_y$. Das steht aber im Widerspruch zu $S \subset \widetilde{K}_y$.

S liegt in einer kompakten Menge. Also besitzt die zu dem Netz gehörige Filterbasis nach [Dug78] Kap. XI Theorem 1.3 einen Häufungspunkt, also auch das Netz selbst. Da dieser aber, wie oben gezeigt, bereits ein Supremum von S und damit des Netzes bezüglich der partiellen Ordnung \geq ist, kann es nur einen Häufungspunkt geben, denn das Supremum einer partiell geordneten Menge ist eindeutig bestimmt. Also konvergiert das Netz gegen das gesuchte Supremum und besitzt damit eine kleinste obere Schranke. ■

Wir sind nun in der Lage, Satz 2.41 zu beweisen.

Beweis: Wir wollen Lemma 2.45 auf $V = N^p(\mathfrak{X})$, $K = \text{Psef}(\mathfrak{X})$ und $S = \{(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p) \mid D_i \in \mathcal{D}(\alpha_i) \text{ für } i = 1, \dots, p\}$ anwenden. Die Filtrierung von S ergibt sich sofort aus Lemma 2.44. Wir wählen Repräsentanten $\alpha_{1,\pi}, \dots, \alpha_{p,\pi}$ auf einer gemeinsamen Modifikation X_π und $\omega_\pi \in N^1(X_\pi)$ so groß, dass $\omega_\pi \geq \alpha_{i,\pi}$ für $i = 1, \dots, p$. Dann liefert das Bild $\omega \in CN^1(\mathfrak{X})$ von ω_π eine Cartier-Klasse mit $0 \leq \alpha_i \leq \omega$ für alle i . Damit gilt

$$S \subset \{\beta \in N^p(\mathfrak{X}) \mid 0 \leq \beta \leq \omega^p\}.$$

Die rechte Menge ist aber nach Satz 2.27 kompakt in V . Damit können wir das Lemma anwenden und erhalten die Existenz und Eindeutigkeit für das positive Schnittprodukt auf dem Big-Kegel. ■

Das positive Schnittprodukt erbt viele Eigenschaften vom gewöhnlichen Schnittprodukt. Es gilt

Satz 2.46.

Das positive Schnittprodukt

$$\begin{aligned} \text{Big}(\mathfrak{X}) \times \dots \times \text{Big}(\mathfrak{X}) &\rightarrow N^p(\mathfrak{X}) \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) &\mapsto \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle \end{aligned}$$

ist symmetrisch, homogen vom Grad 1 (für nicht-negative reelle Skalare) und superadditiv in jeder Variablen. Ferner ist es stetig auf dem p -fachen Produkt des Big-Kegels aus $CN^1(\mathfrak{X})$.

Beweis: Wegen der Symmetrie des gewöhnlichen Schnittproduktes ist sie auch für positive Produkte klar. Als nächstes untersuchen wir die Homogenität. Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial. Wir zeigen zunächst den Fall $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ und folgern den allgemeinen Fall aus der Stetigkeit des positiven Schnittproduktes. Für den rationalen Fall ist die Homogenität aber leicht zu sehen, denn $\lambda\alpha_i - D_i$ ist genau dann nef, wenn $\alpha_i - \frac{1}{\lambda}D_i$ nef ist. Daher erfüllt die Darstellung

$$(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot (\lambda\alpha_i - D_i) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p)$$

die Bedingungen aus Definition 2.41 genau dann, wenn

$$(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot (\alpha_i - \frac{1}{\lambda}D_i) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p)$$

sie erfüllt. Diese unterscheiden sich aber exakt um den Faktor λ . Das Supremum über alle D_i der Darstellungen unterscheidet sich damit genau um den Faktor λ .

Wir zeigen als nächstes die Superadditivität. Ohne Einschränkung reicht es aus die Behauptung in einer Variablen zu zeigen. Das positive Produkt

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle + \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \beta_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$$

ist als Supremum von Schnittprodukten der Form

$$(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot (\alpha_i - D_i) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p) + (\alpha_1 - \widetilde{D}_1) \cdot \dots \cdot (\beta_i - \widetilde{D}_i) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - \widetilde{D}_p)$$

gegeben. Wegen der Monotonie aus Satz 2.39 des Schnittproduktes können wir ferner annehmen, dass $\widetilde{D}_k = D_k$ für $k \neq i$ ist. Also erhalten wir Schnittprodukte der Form

$$(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot ((\alpha_i + \beta_i) - (D_i + \widetilde{D}_i)) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p).$$

Damit ist aber klar, dass die Ungleichung

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot (\alpha_i + \beta_i) \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle \geq \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle + \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \beta_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$$

gilt, weil wir das Supremum insbesondere über die Darstellungen bilden, die von den Summen der Einzeldarstellungen kommen.

Wir möchten nun die Stetigkeit mit Satz 2.6 (2) zeigen: Für jede Umgebung $U \subset N^p(\mathfrak{X})$ von $\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$, existiert eine Umgebung V von $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \text{Big}(\mathfrak{X}) \times \dots \times \text{Big}(\mathfrak{X})$, so dass

$$\langle \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_p \rangle \in U$$

für alle $(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in V$ gilt.

Dazu seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \text{Big}(\mathfrak{X})$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ beliebig. Da jedes der α_i im Inneren des pseudo-effektiven Kegels liegt und $\varepsilon\alpha_i$ big ist, finden wir eine offene Umgebung V_i der Null, so dass $\varepsilon\alpha_i + V_i \subset \text{Big}(\mathfrak{X})$ gilt. Indem wir V_i mit $-V_i$ schneiden, können wir annehmen, dass $V_i = -V_i$ gilt. Das Produkt $V := V_1 \times \dots \times V_p$ ist dann eine offene Umgebung der Null in der Produkttopologie und es gilt für $i = 1, \dots, p$

$$\varepsilon\alpha_i \pm \gamma_i \in \text{Big}(\mathfrak{X}) \subset \text{Psef}(\mathfrak{X})$$

für alle $\gamma_i \in V_i$. Damit folgt sofort für $i = 1, \dots, p$

$$\varepsilon\alpha_i \geq \pm\gamma_i$$

für alle $\gamma_i \in V_i$. Also gilt

$$(1 - \varepsilon)\alpha_i \leq \alpha_i + \gamma_i \leq (1 + \varepsilon)\alpha_i$$

für alle $\gamma_i \in V_i$. Da $\varepsilon\alpha_i + \gamma_i$ sogar big ist, folgt nun leicht mit der Superadditivität und der \mathbb{Q}^+ -Homogenität

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)^p \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle &= \langle (1 - \varepsilon)\alpha_1 \cdot \dots \cdot (1 - \varepsilon)\alpha_p \rangle \\ &\leq \langle (1 - \varepsilon)\alpha_1 \cdot \dots \cdot (1 - \varepsilon)\alpha_p \rangle + \langle (\varepsilon\alpha_1 + \gamma_1) \cdot \dots \cdot (\varepsilon\alpha_p + \gamma_p) \rangle \\ &\leq \langle ((1 - \varepsilon)\alpha_1 + \varepsilon\alpha_1 + \gamma_1) \cdot \dots \cdot ((1 - \varepsilon)\alpha_p + \varepsilon\alpha_p + \gamma_p) \rangle \\ &= \langle \alpha_1 + \gamma_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p + \gamma_p \rangle. \end{aligned}$$

Auch $\varepsilon\alpha_i - \gamma_i$ ist big, also schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 + \gamma_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p + \gamma_p \rangle &\leq \langle \alpha_1 + \gamma_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p + \gamma_p \rangle + \langle \varepsilon\alpha_1 - \gamma_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon\alpha_p - \gamma_p \rangle \\ &\leq \langle (1 + \varepsilon)\alpha_1 \cdot \dots \cdot (1 + \varepsilon)\alpha_p \rangle = (1 + \varepsilon)^p \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$(1 - \varepsilon)^p \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle \leq \langle \alpha_1 + \gamma_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p + \gamma_p \rangle \leq (1 + \varepsilon)^p \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$$

für alle $(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in V$.

Sei U eine Umgebung von $\alpha \in N^p(\mathfrak{X})$. Wir definieren

$$K_\varepsilon(\alpha_\pi) := \{\gamma_\pi \in N^1(X_\pi) \mid (1 - \varepsilon)\alpha_\pi \leq \gamma_\pi \leq (1 + \varepsilon)\alpha_\pi\} \subset N^1(X_\pi)$$

und

$$K_\varepsilon(\alpha) := \{\gamma \in N^1(\mathfrak{X}) \mid (1 - \varepsilon)\alpha \leq \gamma \leq (1 + \varepsilon)\alpha\} \subset N^1(\mathfrak{X}).$$

In Abschnitt 2.1.2 haben wir gesehen, dass die Mengen der Form

$$h_\pi^{-1}(K_\varepsilon(\alpha_\pi))$$

eine Basis der Topologie auf $N^1(\mathfrak{X})$ bilden, denn die Mengen $K_\varepsilon(\alpha_\pi)$ bilden offenbar eine Basis der Topologie auf $N^1(X_\pi)$. Also existieren π, ε , so dass $h_\pi^{-1}(K_\varepsilon(\alpha_\pi))$ offen in U liegt. Man rechnet leicht nach, dass dann aber

$$K_{\frac{\varepsilon}{2}}(\alpha) \subset h_\pi^{-1}(K_\varepsilon(\alpha_\pi)) \subset U \subset N^p(\mathfrak{X})$$

gilt.

Nun folgt die Stetigkeit leicht: Zu einer gegebenen Umgebung $U \subset N^p(\mathfrak{X})$ von $\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$, finden wir ein $\delta \in \mathbb{Q}^+$, so dass

$$\{\beta \in N^p(\mathfrak{X}) \mid (1 - \delta)\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle \leq \beta \leq (1 + \delta)\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle\} \subset U$$

gilt. Wir wählen nun oben $\varepsilon = 1 - \sqrt[p]{1 - \delta}$. Dann folgt mit der obigen Rechnung sofort, dass das positive Produkt die offene Umgebung $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) + V$ in U abbildet. Damit ist die Stetigkeit gezeigt.

Die Homogenität für $\lambda \in \mathbb{R}^+$ folgt nun leicht. Wenn $(q_n) \subset \mathbb{Q}^+$ eine Folge ist, die gegen λ konvergiert. Dann gilt für alle n

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot q_n \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle = q_n \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot q_n \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle.$$

und wegen der Folgenstetigkeit des positiven Produktes also auch

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \lambda \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle = \lambda \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle.$$

■

Lemma 2.47.

Sei $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$ ein Netz in $N^p(\mathfrak{X})$ (mit der kanonischen Ordnung auf \mathbb{R}^+) und sei α ein Häufungspunkt des Netzes. Für $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ gelte: $0 \leq \alpha_{\varepsilon_1} \leq \alpha_{\varepsilon_2}$. Dann konvergiert das Netz mit Grenzwert α .

Beweis: Konvergenz in $N^p(\mathfrak{X})$ testen wir, indem wir sie auf allen Inkarnationen überprüfen. Weil ein Element im projektiven Limes genau dann pseudo-effektiv ist, wenn es auf allen Inkarnationen pseudo-effektiv ist, reicht es aus die Aussage für ein \mathbb{R}^+ -Netz mit obigen Eigenschaften in $N^p(X_\pi)$ zu zeigen. Sei also $\alpha \in N^p(X_\pi)$ ein Häufungspunkt. Die Mengen

$$K_\delta := \{\gamma \in N^p(X_\pi) \mid (1 - \delta)\alpha \leq \gamma \leq (1 + \delta)\alpha\}$$

sind eine Umgebungsbasis von α , also existiert nach der Definition eines Häufungspunktes für alle $\delta > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ mit $\alpha_{\varepsilon'} \in K_\delta$, also

$$(1 - \delta)\alpha \leq \alpha_{\varepsilon'} \leq (1 + \delta)\alpha.$$

Für $\varepsilon'' < \varepsilon'$ gilt dann auch

$$(1 - \delta)\alpha \leq \alpha_{\varepsilon''} \leq (1 + \delta)\alpha.$$

Die rechte Ungleichung folgt dabei sofort aus der Voraussetzung $0 \leq \alpha_{\varepsilon''} \leq \alpha_{\varepsilon'}$. Für die linke Ungleichung reicht es einzusehen, dass $\alpha \leq \alpha_{\varepsilon''}$ gilt. Das ist aber klar, denn alle kleineren Elemente des Netzes liegen in der Menge $\{\gamma \in N^p(X_\pi) \mid 0 \leq \gamma \leq \alpha_{\varepsilon''}\}$. Also muss auch der Häufungspunkt α dort drin liegen. Insgesamt liegen alle $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon'$ in K_δ und die Behauptung ist gezeigt. ■

Nun können wir das positive Produkt durch eine Grenzwertbildung auf den gesamten Psef-Kegel ausdehnen.

Satz und Definition 2.48.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in CN^1(\mathfrak{X})$ Psef-Klassen. Ihr positives Produkt ist definiert als Grenzwert von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle (\alpha_1 + \varepsilon\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon\omega) \rangle.$$

Dabei ist $\omega \in CN^1(\mathfrak{X})$ eine beliebige Big-Klasse.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert des \mathbb{R}^+ -Netzes

$$\langle \langle (\alpha_1 + \varepsilon\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon\omega) \rangle \rangle_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$$

stets existiert und dass die Definition unabhängig von ω ist. Zuerst bemerken wir, dass für $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$0 \leq \langle (\alpha_1 + \varepsilon\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon\omega) \rangle \leq \langle (\alpha_1 + \omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \omega) \rangle$$

wegen der Superadditivität gilt. Damit können wir annehmen, dass nach Satz 2.27 die Elemente des Netzes alle in einer kompakten Menge enthalten sind. Jedes Netz in einem kompakten (Hausdorff-)Raum besitzt aber einen Häufungspunkt und wegen

$$0 \leq \langle (\alpha_1 + \varepsilon_1\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon_1\omega) \rangle \leq \langle (\alpha_1 + \varepsilon_2\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon_2\omega) \rangle$$

für $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ muss das Netz nach Lemma 2.47 konvergieren. Die Unabhängigkeit von ω ergibt sich, wenn wir einsehen, dass für jede weitere Big-Klasse ω' ein $C > 0$ existiert, so dass $C^{-1}\omega \leq \omega' \leq C\omega$. Denn dann lässt sich für $i = 1, \dots, p$ leicht abschätzen

$$\alpha_i + C^{-1}\varepsilon\omega \leq \alpha_i + \varepsilon\omega'$$

und wegen der Superadditivität haben wir

$$\langle (\alpha_1 + C^{-1}\varepsilon\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + C^{-1}\varepsilon\omega) \rangle \leq \langle (\alpha_1 + \varepsilon\omega') \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon\omega') \rangle.$$

Für die andere Ungleichung gilt dies völlig analog, so dass die Grenzwerte für ε gegen Null übereinstimmen. Es bleibt die Existenz eines geeigneten C für ω und ω' zu beweisen. Die Aussage ist symmetrisch (ggf. wähle man das Maximum), also zeigen wir nur dass ein C^{-1} existiert, so dass $C^{-1}\omega \leq \omega'$. Da ω' im Inneren des pseudo-effektiven Kegels liegt, finden wir eine offene Umgebung U von 0 im pseudo-effektiven Kegel, so dass $0 \leq \alpha \leq \omega'$ für alle $\alpha \in U$ gilt. Für hinreichend

großes C liegt aber $C^{-1}\omega$ stets in U . Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Bemerkung 2.49. Im allgemeinen ist das positive Produkt auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels nicht mehr stetig.

Satz 2.50.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in CN^1(\mathfrak{X})$ nef. Dann gilt

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle = (\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p).$$

Beweis: Die Aussage ist sofort klar, wenn die α_i auch big sind. Dann können wir in der Definition 2.41 $D_i = 0$ für $i = 1, \dots, p$ wählen. Wenn ein α_i auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels liegt, können wir in Definition 2.48 ω big und nef wählen. Die Approximationen $\alpha_i + \varepsilon\omega$ sind dann auch big und nef, so dass wir $\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$ als Grenzwert der Schnittprodukte $(\alpha_1 + \varepsilon\omega) \cdot \dots \cdot (\alpha_p + \varepsilon\omega)$ erhalten. Das ist aber wegen der Stetigkeit des Schnittproduktes genau $(\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p)$. ■

Als nächstes werden wir die Definition für das positive Produkt von Big-Klassen vereinfachen. Dies wird es uns erlauben, viele der Aussagen über Schnittprodukte auch für positive Schnittprodukte zu zeigen.

Satz 2.51.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in CN^1(\mathfrak{X})$ big. Dann ist das positive Schnittprodukt $\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$ die kleinste obere Schranke der Schnittprodukte $\beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_p \in N^p(\mathfrak{X})$ mit

$$\beta_i \in CN^1(\mathfrak{X}) \text{ nef und } \beta_i \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, \dots, p \quad (*)$$

Beweis: Sei $\omega \in CN^1(\mathfrak{X})$ big. Für alle β_1, \dots, β_p , die (*) erfüllen, und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_p &= \langle \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_p \rangle \leq \underbrace{\langle \beta_1 + \varepsilon\omega \cdot \dots \cdot \beta_p + \varepsilon\omega \rangle}_{\text{big}} \\ &\leq \langle \beta_1 + \varepsilon\omega \cdot \dots \cdot \beta_p + \varepsilon\omega \rangle + \underbrace{\langle (\alpha_1 - \beta_1) + \varepsilon\omega \cdot \dots \cdot (\alpha_p - \beta_p) + \varepsilon\omega \rangle}_{\text{psef}} \\ &\leq \langle \alpha_1 + 2\varepsilon\omega \cdot \dots \cdot \alpha_p + 2\varepsilon\omega \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sup \{ \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_p \mid \text{die } \beta_i \text{ erfüllen } (*) \} \leq \langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle.$$

Für die andere Richtung erinnern wir, dass für $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ big, das Schnittprodukt als kleinste obere Schranke der Schnittprodukte

$$(\alpha_1 - D_1) \cdot \dots \cdot (\alpha_p - D_p)$$

definiert ist. Dabei wird gefordert, dass die $(\alpha_i - D_i)$ nef und D_i effektive \mathbb{Q} -Divisoren sind. Insbesondere erfüllen sie die Bedingung (*), also gilt

$$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle \leq \sup \{ \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_p \mid \text{die } \beta_i \text{ erfüllen } (*) \}.$$

■

2.4. Die Volumenfunktion

Im Folgenden werden wir das Volumen für Divisoren auf dem Riemann-Zariski-Raum einführen und zeigen, dass es auf den einzelnen birationalen Modellen mit dem Volumen aus Kapitel 1.4 übereinstimmt. Entscheidend für die stetige Differenzierbarkeit der Volumenfunktion auf $CN^1(\mathfrak{X})$ wird sein, dass wir das Differential mit Hilfe eines positiven Produktes darstellen können.

Wir wiederholen kurz, dass das Volumen eines Big-Geradenbündels L auf einer projektiven Varietät X durch

$$\text{vol}_X(L) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, kL)$$

gegeben ist.

Satz und Definition 2.52.

Sei $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ eine Cartier-Klasse. Wir definieren

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) := \text{vol}_{X_{\pi}}(\alpha_{\pi}).$$

Dabei ist α_{π} ein Repräsentant von α auf X_{π} . Die Abbildung ist wohldefiniert, stetig und homogen vom Grad n .

Beweis: Wir überlegen uns zunächst, dass die Definition unabhängig vom gewählten Repräsentanten α_{π} ist. Dazu sei $\alpha_{\pi'}$ ein weiterer Repräsentant von α . Dann existieren birationale Morphismen $\mu : X_{\bar{\pi}} \rightarrow X_{\pi}$ und $\mu' : X_{\bar{\pi}} \rightarrow X_{\pi'}$, so dass $\mu^*(\alpha_{\pi}) = \mu'^*(\alpha_{\pi'})$ gilt. Dann folgt aber mit Satz 1.47 und Satz 1.48:

$$\text{vol}_{X_{\pi}}(\alpha_{\pi}) = \text{vol}_{X_{\bar{\pi}}}(\mu^*(\alpha_{\pi})) = \text{vol}_{X_{\bar{\pi}}}(\mu'^*(\alpha_{\pi'})) = \text{vol}_{X_{\pi'}}(\alpha_{\pi'}).$$

Die Homogenität ergibt sich sofort aus der Homogenität der Volumenfunktion auf den einzelnen Inkarnationen. Um die Stetigkeit der Funktion zu zeigen, reicht es wieder einzusehen, dass die Kompositionen

$$N^1(X_{\pi}) \rightarrow CN^1(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}$$

für alle Modifikationen X_{π} stetig sind. Das ist aber klar, denn die Komposition ist nichts anderes als die Volumenfunktion $\text{vol}_{X_{\pi}}$ auf X_{π} . Von ihr wissen wir aber bereits, dass sie stetig ist. ■

Entscheidend für den Zusammenhang des positiven Produktes und der Volumenfunktion auf $CN^1(\mathfrak{X})$ wird das Approximationstheorem von Fujita sein. Dafür definieren wir zunächst, was wir unter einer „Fujita-Approximation“ verstehen wollen.

Definition 2.53 (Fujita-Approximation einer Big-Klasse).

Sei $\xi \in N^1(X)$ big. Eine Fujita-Approximation für ξ besteht aus einem projektiven, birationalen Morphismus $\mu : X' \rightarrow X$, mit X' irreduzibel und einer Zerlegung

$$\mu^*(\xi) = a + e$$

in $N^1(X')$, so dass a ample und e effektiv ist.

Da e effektiv ist, sieht man leicht

$$\text{vol}_X(\xi) = \text{vol}_{X'}(\mu^*(\xi)) \geq \text{vol}_{X'}(a) = (a^n).$$

Satz 2.54 (Fujitas Approximationstheorem).

Sei ξ eine Big-Klasse auf einer Varietät X und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert eine Fujita-Approximation

$$\mu : X' \rightarrow X, \mu^*(\xi) = a + e$$

so, dass

$$\text{vol}_{X'}(a) > \text{vol}_X(\xi) - \varepsilon$$

gilt. Wenn ξ eine rationale Klasse ist, können auch a und e rational gewählt werden. Ferner kann man annehmen, dass X' glatt ist.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04b] Theorem 11.4.4 für einen Beweis. Die Tatsache, dass X' glatt gewählt werden kann, folgt aus dem Beispiel 11.4.5 in [Laz04b]. ■

Nun sind wir in der Lage, den Zusammenhang zwischen positiven Produkten und dem Volumen auf $CN^1(\mathfrak{X})$ zu sehen. Wir formulieren dies in

Korollar 2.55.

Sei $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ big. Dann gilt

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \langle \alpha^n \rangle.$$

Insbesondere gilt für jedes Big-Geradenbündel L auf einer projektiven Varietät X der Dimension n :

$$\text{vol}_X(L) = \langle L^n \rangle.$$

Dabei fassen wir L im positiven Produkt in natürlicher Weise als Element von $CN^1(\mathfrak{X})$ auf.

Beweis: Sei $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ big. Wir wählen einen Repräsentanten α_π im Big-Kegel von $N^1(X_\pi)$. Wegen Satz 2.54 finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Modifikation $\mu : X_{\pi'} \rightarrow X_\pi$ und Divisoren $a_{\pi'}, e_{\pi'}$, so dass $\mu^*(\alpha_\pi) = a_{\pi'} + e_{\pi'}$ gilt und $a_{\pi'}$ ample und $e_{\pi'}$ effektiv ist. Wir erhalten daher

$$\langle a^n \rangle = (a^n) \leq \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) \leq (a^n) + \varepsilon = \langle a^n \rangle + \varepsilon$$

und

$$\alpha = a + e \in CN^1(\mathfrak{X}),$$

wenn wir die entsprechenden Divisoren mit ihren Bildern a, e in $CN^1(\mathfrak{X})$ identifizieren. Insbesondere ist a nef und e pseudo-effektiv. Damit ist klar, dass $(a^n) \leq \langle a^n \rangle$, denn a erfüllt die Bedingung (*) in Satz 2.51 für α . Wegen der rechten Ungleichung muss dann auch $\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) \leq \langle a^n \rangle$ sein.

Die andere Richtung sieht man schnell. Jedes β , das (*) für α in Satz 2.51 erfüllt, besitzt einen Repräsentanten β_π auf X_π mit $\alpha_\pi - \beta_\pi$ pseudo-effektiv und β_π nef. Wegen der Stetigkeit der Volumenfunktion auf $N^1(X_\pi)$ und Beispiel 2.2.48 in [Laz04a] folgt damit

$$(\beta^n) = (\beta_\pi^n) = \text{vol}_{X_\pi}(\beta_\pi) \leq \text{vol}_{X_\pi}(\alpha_\pi) = \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha).$$

Damit gilt dies aber auch für das Supremum über alle β , die (*) erfüllen. ■

Das positive Produkt ist im allgemeinen auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels nicht stetig. Für den Spezialfall aus dem Satz oben können wir dies aber nun zeigen.

Satz 2.56.

Die Funktion $\alpha \mapsto \langle \alpha^n \rangle$ ist auf dem pseudo-effektiven Kegel stetig. Sie verschwindet auf dessen Rand und kann zu einer stetigen Funktion

$$CN^1(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} \langle \alpha^n \rangle & \text{falls } \alpha \text{ psef} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

fortgesetzt werden. Diese stimmt mit der Volumenfunktion aus Definition 2.52 überein.

Beweis: Sei $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels in $CN^1(\mathfrak{X})$. Dann existiert ein Repräsentant α_π auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels in $N^1(X_\pi)$. Damit ist mit [Laz04a] Definition 2.2.31. klar, dass $\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) = 0$ ist. Ferner gilt für eine Big-Klasse ω :

$$0 \leq \langle \alpha^n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle (\alpha + \varepsilon\omega)^n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + \varepsilon\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{vol}_{X_\pi}(\alpha_\pi + \varepsilon\omega_\pi) = 0$$

wegen der Stetigkeit der Volumenfunktion auf $N^1(X_\pi)$ und deren Verschwinden auf dem Rand des Psef-Kegels. Damit stimmt die Abbildung $\alpha \rightarrow \langle \alpha^n \rangle$ mit der Volumenfunktion auf $CN^1(\mathfrak{X})$ auf dem gesamten pseudo-effektiven Kegel überein. Insbesondere ist die Abbildung sogar auf dem Rand noch stetig und verschwindet dort. Dann aber lässt sie sich zu der geforderten Abbildung fortsetzen. ■

Um die Differenzierbarkeit der Volumenfunktion zu zeigen, benötigen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 2.57.

Seien $\alpha, \beta \in CN^1(\mathfrak{X})$ nef. Dann gilt

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha - \beta) \geq (\alpha^n) - n(\alpha^{n-1} \cdot \beta).$$

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus [Laz04a] Beispiel 2.2.33, wenn man zu den geeigneten Repräsentanten übergeht. ■

Wir kommen nun zur entscheidenden Abschätzung dieses Kapitels.

Lemma 2.58.

Sei $\beta \in CN^1(\mathfrak{X})$ nef und $\gamma \in CN^1(\mathfrak{X})$ beliebig. Sei $\omega \in CN^1(\mathfrak{X})$ nef und big, so dass $\beta \leq \omega$ und $\omega \pm \gamma$ nef ist. Dann gilt

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\beta + t\gamma) \leq (\beta^n) + nt(\beta^{n-1} \cdot \gamma) - Ct^2$$

für jedes $0 \leq t \leq 1$ und einer Konstanten $C > 0$, die nur von (ω^n) abhängt.

Beweis: Für β, γ, ω wie oben und $0 \leq t \leq 1$ schreiben wir

$$(\beta + t\gamma)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\beta^k) t^{n-k} (\gamma^{n-k}) = (\beta^n) + nt(\beta^{n-1}) \cdot \gamma + O(t^2).$$

Dabei wird $O(t^2)$ von den Schnittprodukten $(\beta^k \cdot \gamma^{n-k})$ für $k = 0, \dots, n-2$ kontrolliert. Nun gilt nach Lemma 2.40

$$|(\beta^k \cdot \gamma^{n-k})| \leq C_n(\beta^k \cdot \omega^{n-k}) \leq C_n(\omega^n).$$

Damit können wir $O(t^2)$ durch (ω^n) kontrollieren. Wir definieren nun die Nef-Klassen $A := \beta + t(\gamma + \omega)$ und $B := t\omega$ und schreiben

$$(\beta + t\gamma)^n = (A - B)^n = A^n - n(A^{n-1} \cdot B) + O'(t^2).$$

Dabei wird $O'(t^2)$ von $(A^k \cdot \omega^{n-k})$ für $k = 0, \dots, n-2$ kontrolliert. Wegen $\beta \leq \omega$ und $\gamma \leq \omega$ haben wir mit $|t| \leq 1 : A \leq 3\omega$. Damit wird wegen der Monotonie des Schnittproduktes auch $O'(t^2)$ von (ω^n) kontrolliert. Insgesamt erhalten wir nun mit Lemma 2.57

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(A - B) \geq (A^n) - n(A^{n-1} \cdot B) = (\beta + t\gamma)^n - O'(t^2) = (\beta^n) + nt(\beta^{n-1}) \cdot \gamma + O(t^2) - O'(t^2).$$

Daher haben wir

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(A - B) \geq (\beta^n) + nt(\beta^{n-1}) \cdot \gamma + O(t^2)$$

für ein Polynom $O(t^2)$, dessen Summanden durch (ω^n) beschränkt werden. Für $0 \leq t \leq 1$ finden wir daher eine Konstante $C > 0$, die nur von (ω^n) abhängt so, dass

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(A - B) \geq (\beta^n) + nt(\beta^{n-1}) \cdot \gamma - Ct^2.$$

■

Nun können wir das Hauptresultat dieses Kapitels beweisen

Satz 2.59.

Die Volumenfunktion $\text{vol}_{\mathfrak{X}}$ besitzt auf dem Big-Kegel des unendlich-dimensionalen Raumes $CN^1(\mathfrak{X})$ in jede Richtung eine Richtungsableitung, die durch eine stetige Linearform auf $CN^1(\mathfrak{X})$ gegeben ist. Genauer gilt für jede Big-Klasse $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ und jedes $\gamma \in CN^1(\mathfrak{X})$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\gamma) = n\langle \alpha^{n-1} \rangle \cdot \gamma$$

Beweis: Sei also $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ big und $\gamma \in CN^1(\mathfrak{X})$ beliebig. Wir wählen eine Klasse $\omega = \omega(\alpha, \gamma) \in CN^1(\mathfrak{X})$ mit den Eigenschaften: ω ist big und nef, $\alpha \leq \omega$ und $\omega \pm \gamma$ ist nef. Wenn $\beta \leq \alpha$ eine weitere Nef-Klasse in $CN^1(\mathfrak{X})$ ist, so gilt auch $\beta \leq \omega$ und mit Lemma 2.58 können wir schließen:

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\gamma) \geq \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\beta + t\gamma) \geq (\beta^n) + nt(\beta^{n-1}) \cdot \gamma - Ct^2$$

für jedes $0 \leq t \leq 1$ und einer Konstanten $C > 0$, die nur von (ω^n) abhängt. Diese Ungleichung gilt für jedes β , das nef ist und $\beta \leq \alpha$ erfüllt. Bilden wir auf der rechten Seite das Supremum über alle β , die diese Eigenschaften erfüllen, bleibt die Ungleichung erhalten und wir erhalten wegen Satz 2.51 und $\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \langle \alpha^n \rangle$ exakt

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\gamma) \geq \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) + nt\langle \alpha^{n-1} \rangle \cdot \gamma - Ct^2$$

für alle $0 \leq t \leq 1$. Ersetzen wir γ durch $-\gamma$, sieht man sofort, dass die Ungleichung sogar für $-1 \leq t \leq 1$ gilt. Durch Vertauschen der Rollen von $\alpha + t\gamma \leq 2\omega$ und $\alpha = (\alpha + t\gamma) - t\gamma$ erhalten wir analog die Abschätzung

$$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) \geq \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\gamma) - nt\langle (\alpha + t\gamma)^{n-1} \rangle \cdot \gamma - Ct^2$$

mit einer (geeignet vergrößerten) Konstanten $C > 0$, die nur von (ω^n) abhängt und für $|t| < 1$ so klein, dass $\alpha + t\gamma$ big ist. Für $t \neq 0$ erhalten wir als Kombination dieser

Ungleichungen

$$\frac{nt\langle\alpha^{n-1}\rangle \cdot \gamma - Ct^2}{t} \leq \frac{\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\gamma) - \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha)}{t} \leq \frac{nt\langle(\alpha + t\gamma)^{n-1}\rangle \cdot \gamma + Ct^2}{t}.$$

Daher folgt für $0 < |t|$ hinreichend klein

$$n\langle\alpha^{n-1}\rangle \cdot \gamma - Ct \leq \frac{\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\gamma) - \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha)}{t} \leq n\langle(\alpha + t\gamma)^{n-1}\rangle \cdot \gamma + Ct$$

und wir erhalten wegen der Stetigkeit des positiven Produktes auf dem Big-Kegel den Grenzwert

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}(\alpha + t\gamma) = n\langle\alpha^{n-1}\rangle \cdot \gamma.$$

Nach Satz 2.37 ist die Abbildung

$$\begin{aligned} d_{\text{vol}_{\mathfrak{X}}}(\alpha) : CN^1(\mathfrak{X}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto n\langle\alpha^{n-1}\rangle \cdot \gamma \end{aligned}$$

eine stetige Linearform und der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Big}(\mathfrak{X}) &\rightarrow CN^1(\mathfrak{X})^* \\ \alpha &\mapsto d_{\text{vol}_{\mathfrak{X}}}(\alpha) \end{aligned}$$

stetig ist. Dazu geben wir uns ein auf dem Big-Kegel konvergentes Netz $(\alpha_i)_{i \in I}$ mit $\lim_{i \in I} \alpha_i = \alpha$ vor. Dann gilt wegen der Stetigkeit des positiven Produktes auf dem Big-Kegel für alle $\gamma \in CN^1(\mathfrak{X})$

$$\lim_{i \in I} d_{\text{vol}_{\mathfrak{X}}}(\alpha_i)(\gamma) = \lim_{i \in I} n\langle\alpha_i^{n-1}\rangle \cdot \gamma = n\langle\alpha^{n-1}\rangle \cdot \gamma = d_{\text{vol}_{\mathfrak{X}}}(\alpha)(\gamma).$$

Damit ist die Stetigkeit gezeigt. ■

In der Tat liefert uns dieses Resultat auch die Differenzierbarkeit der Volumenfunktion in unserem ursprünglichen Raum $N^1(X)$.

Korollar 2.60.

Die Volumenfunktion vol_X besitzt auf dem Big-Kegel des Raumes $N^1(X)$ in jede Richtung eine Richtungsableitung, die durch eine stetige Linearform auf $N^1(X)$ gegeben ist. Genauer gilt für jede Big-Klasse $\alpha \in N^1(X)$ und jedes $\gamma \in N^1(X)$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}_X(\alpha + t\gamma) = n\langle\bar{\alpha}^{n-1}\rangle \cdot \bar{\gamma}.$$

Dabei sind $\bar{\alpha}$ und $\bar{\gamma}$ die Bilder von α und γ unter der kanonischen Abbildung $N^1(X) \rightarrow CN^1(\mathfrak{X})$.

Beweis: Weil wir $\text{vol}_{\mathfrak{X}}$ auf einem birationalen Modell ausrechnen und das Volumen invariant unter Pullback ist, sieht man sofort, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N^1(X) & \longrightarrow & CN^1(\mathfrak{X}) \\ & \searrow \text{vol}_X & \downarrow \text{vol}_{\mathfrak{X}} \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

kommutiert. Daher gilt

$$\frac{\text{vol}_X(\alpha + t\gamma) - \text{vol}_X(\alpha)}{t} = \frac{\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\bar{\alpha} + t\bar{\gamma}) - \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\bar{\alpha})}{t}$$

und damit

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}_X(\alpha + t\gamma) = n \langle \bar{\alpha}^{n-1} \rangle \cdot \bar{\gamma}.$$

Dann ist die Behauptung aber bewiesen, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} d_{\text{vol}_X}(\alpha) : N^1(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto n \langle \bar{\alpha}^{n-1} \rangle \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

ist als Komposition von linearen und stetigen Abbildungen eine Linearform auf $N^1(X)$. Es bleibt die Stetigkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Big}(X) &\rightarrow N^1(X)^* \\ \alpha &\mapsto d_{\text{vol}_X}(\alpha) \end{aligned}$$

zu zeigen. Diese ist aber sofort klar, denn nach Konstruktion ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Big}(X) & \longrightarrow & N^1(X)^* \\ \downarrow & & \uparrow \\ \text{Big}(\mathfrak{X}) & \longrightarrow & CN^1(\mathfrak{X})^* \end{array}$$

kommutativ. ■

Wir erhalten nun als Korollar eine Orthogonalitätseigenschaft

Korollar 2.61.

Für jede pseudo-effektive Klasse $\alpha \in CN^1(\mathfrak{X})$ gilt

$$\langle \alpha^n \rangle = \langle \alpha^{n-1} \rangle \cdot \alpha$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall α big. Es gilt

$$n \langle \alpha^{n-1} \rangle \cdot \alpha = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha + t\alpha) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (1+t)^n \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) = n \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha) = n \langle \alpha^n \rangle.$$

Sei nun α pseudo-effektiv. Es gilt per Definition

$$\langle \alpha^n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle (\alpha + \varepsilon\omega)^n \rangle$$

mit ω big und wegen der Stetigkeit des Schnittproduktes auch

$$\langle \alpha^{n-1} \rangle \cdot \alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle (\alpha + \varepsilon\omega)^{n-1} \rangle \cdot (\alpha + \varepsilon\omega)$$

mit $\alpha + \varepsilon\omega$ big. Also gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\langle (\alpha + \varepsilon\omega)^n \rangle = \langle (\alpha + \varepsilon\omega)^{n-1} \rangle \cdot (\alpha + \varepsilon\omega)$$

und damit auch

$$\langle \alpha^n \rangle = \langle \alpha^{n-1} \rangle \cdot \alpha. \quad \blacksquare$$

Das Duale des pseudo-effektiven Kegels

3.1. Bewegliche Kurven

Definition 3.1 (duale Kegel).

Sei K ein abgeschlossener, konvexer Kegel in einem endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V . Dann ist der duale Kegel $K^* \subset V^*$ durch

$$K^* := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

gegeben.

Bemerkung 3.2. Sei $\overline{\text{NE}}(X) \subset N^{n-1}(X)$ der Abschluss des Kegels, der von den Kurven auf X erzeugt wird. Dann gilt nach [Laz04a] Proposition 1.4.28.

$$\overline{\text{NE}}(X) = \{\gamma \in N^{n-1}(X) \mid (\delta \cdot \gamma) \geq 0 \quad \forall \delta \in \text{Nef}(X)\}.$$

Also sind $\text{Nef}(X)$ und $\overline{\text{NE}}(X)$ dual zueinander.

Wir kennen noch einen weiteren abgeschlossenen Kegel in $N^1(X)$, den pseudo-effektiven Kegel. Um den dazu gehörigen dualen Kegel zu charakterisieren, benötigen wir die Theorie der „beweglichen Kurven“.

Definition 3.3 (Bewegliche Kurven).

Sei X eine irreduzible projektive Varietät der Dimension n . Eine Klasse $\gamma \in N^{n-1}(X)$ heißt strikt beweglich oder „strongly movable“, wenn ein birationaler Morphismus $\mu : X' \rightarrow X$ mit amplen Klassen a_1, \dots, a_{n-1} in $N^1(X')$ existiert, so dass

$$\gamma = \mu_*(a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1})$$

gilt. Der Kegel der beweglichen Kurven („movable cone“)

$$\overline{\text{Mov}}(X) \subset N^{n-1}(X)$$

ist der Abschluss des konvexen Kegels, der von den strikt beweglichen Klassen erzeugt wird.

Eine grundlegende Eigenschaft dieses Kegels liefert uns

Lemma 3.4.

Sei $\gamma \in N^{n-1}(X)$ eine strikt bewegliche Klasse. Dann gilt

$$(\gamma \cdot e) \geq 0$$

für jede effektive Klasse $e \in N^1(X)$.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04b] Lemma 11.4.18. ■

Korollar 3.5.

Sei X eine irreduzible projektive Varietät der Dimension n . Dann gilt:

$$\text{Psef}(X) \subset \overline{\text{Mov}}(X)^*.$$

Beweis: Sei $\xi \in N^1(X)$ pseudo-effektiv. Dann existiert eine Folge effektiver Divisoren $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ξ konvergiert. Nach dem Lemma gilt für alle k und alle beweglichen Klassen $\gamma \in \overline{\text{Mov}}(X)$

$$(\gamma \cdot \xi_k) \geq 0$$

und wegen der Stetigkeit des Schnittproduktes auch

$$(\gamma \cdot \xi) \geq 0.$$

Also liefert uns ξ eine Linearform

$$\begin{aligned} \varphi_\xi : N^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto (\gamma \cdot \xi) \end{aligned}$$

in $\overline{\text{Mov}}(X)^*$. ■

3.2. BDPP

Bevor wir den Beweis für den Satz von Boucksom, Demailly, Paun und Peternell führen können, benötigen wir noch ein Lemma über den Rand des Kegels der beweglichen Kurven.

Lemma 3.6.

Sei X eine projektive Varietät der Dimension n , $\mu : X' \rightarrow X$ ein birationaler Morphismus und sei $\alpha \in N^1(X')$ nef. Dann ist die Klasse $\mu_*(\alpha^{n-1})$ im Kegel der beweglichen Kurven enthalten.

Beweis: Sei $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge ampler Divisoren, die gegen α konvergiert. Dann sind die Klassen $\mu_*(\alpha_i^{n-1})$ strikt beweglich, also $\mu_*(\alpha_i^{n-1}) \in \overline{\text{Mov}}(X)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit des Pushforwards ist dann

$$\mu_*(\alpha^{n-1}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_*(\alpha_i^{n-1}) \in \overline{\text{Mov}}(X). \quad \blacksquare$$

Ferner gilt

Lemma 3.7.

Falls $\text{Psef}(X)$ eine echte Teilmenge von $\overline{\text{Mov}}(X)^*$ ist, so existiert ein $\alpha \in N^1(X)$ auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels, dass im Inneren von $\overline{\text{Mov}}(X)^*$ liegt.

Beweis: Wegen $\text{Psef}(X) \subsetneq \overline{\text{Mov}}(X)^*$ gilt

$$\text{Big}(X) = \overset{\circ}{\text{Psef}}(X) \subsetneq \overset{\circ}{\overline{\text{Mov}}}(X)^*,$$

denn der Big-Kegel ist bereits eine offene Teilmenge in $N^1(X)$. Wähle nun $\beta_1 \in \text{Big}(X)$ und $\beta_2 \in \overset{\circ}{\overline{\text{Mov}}}(X)^*$. Sei S die Strecke, die β_1 und β_2 verbindet. Weil das Innere von $\overline{\text{Mov}}(X)^*$ ein konvexer Kegel ist, liegen alle Punkte von S

im Inneren von $\overline{\text{Mov}}(X)^*$. Da der Anfangspunkt im Big-Kegel und der Endpunkt außerhalb des Big-Kegels liegt, muss daher ein Punkt von S auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels liegen. ■

Wir sind nun in der Lage, mit Hilfe des Kalküls aus Kapitel 2 die andere Inklusion zu zeigen.

Satz 3.8 (BDPP, Boucksom-Demailly-Paun-Peternell).

Sei X eine projektive Varietät der Dimension n . Dann sind die Kegel $\overline{\text{Mov}}(X)$ und $\text{Psef}(X)$ dual zueinander, d.h.

$$\overline{\text{Mov}}(X)^* = \text{Psef}(X).$$

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass $\text{Psef}(X) \subset \overline{\text{Mov}}(X)^*$ gilt. Angenommen die Ungleichung ist strikt. Dann existiert nach Lemma 3.7 ein α auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels, das im Inneren von $\overline{\text{Mov}}(X)^*$ liegt. Wir wählen eine ample Klasse $h \in N^1(X)$. Weil α im Inneren liegt, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\alpha - \varepsilon h \in \overline{\text{Mov}}(X)^*$ gilt. Nach der Definition des dualen Kegels gilt dann

$$(3.1) \quad \frac{\langle \alpha \cdot \gamma \rangle}{\langle h \cdot \gamma \rangle} \geq \varepsilon$$

für alle $\gamma \in \overline{\text{Mov}}(X)$.

Wir betrachten nun die Divisoren als Cartier- oder Weil-Klassen im Riemann-Zariski-Raum von X . Für $\omega \in \text{Big}(\mathfrak{X})$ und $t > 0$ ist $\alpha + t\omega$ als Summe einer Psef- und einer Big-Klasse big und es gilt wegen dem Orthogonalitätskriterium aus Korollar 2.61:

$$\alpha \cdot \langle (\alpha + t\omega)^{n-1} \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \alpha \cdot \langle \alpha^{n-1} \rangle = \langle \alpha^n \rangle = \text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha).$$

Die verallgemeinerte Hodge-Typ-Ungleichung ([Laz04a] Theorem 1.6.1) liefert uns nun

$$h \cdot \beta_t^{n-1} \geq (h^n)^{\frac{1}{n}} \cdot (\beta_t^n)^{\frac{n-1}{n}}$$

für alle $\beta_t \leq \alpha + t\omega$ mit β_t nef. Wenn wir das Supremum auf beiden Seiten bilden, erhalten wir

$$h \cdot \langle (\alpha + t\omega)^{n-1} \rangle \geq (h^n)^{\frac{1}{n}} \cdot \langle (\alpha + t\omega)^n \rangle^{\frac{n-1}{n}}.$$

Zusammen mit Satz 2.56 ergeben diese Ungleichungen die Abschätzung

$$\frac{\alpha \cdot \langle (\alpha + t\omega)^{n-1} \rangle}{h \cdot \langle (\alpha + t\omega)^{n-1} \rangle} \leq \frac{\alpha \cdot \langle (\alpha + t\omega)^{n-1} \rangle}{(h^n)^{\frac{1}{n}} \cdot \langle (\alpha + t\omega)^n \rangle^{\frac{n-1}{n}}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\langle \alpha^n \rangle}{(h^n)^{\frac{1}{n}} \cdot \langle \alpha^n \rangle^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{(h^n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \langle \alpha^n \rangle^{\frac{1}{n}} = 0,$$

da α auf dem Rand des pseudo-effektiven Kegels liegt.

Wir wählen nun $t_0 > 0$ so, dass

$$\frac{\alpha \cdot \langle (\alpha + t_0\omega)^{n-1} \rangle}{h \cdot \langle (\alpha + t_0\omega)^{n-1} \rangle} < \varepsilon$$

gilt. Wir wissen, dass nach Satz 2.51 und dem Existenzbeweis des positiven Produktes eine Indexmenge I und ein Netz $(\beta_i)_{i \in I}$ in $CN^1(\mathfrak{X})$ existiert mit β_i nef, $\beta_i \leq \alpha + t_0\omega$ und

$$(\beta_i)^{n-1} \xrightarrow{i \in I} \langle (\alpha + t_0\omega)^{n-1} \rangle,$$

denn $\langle(\alpha + t_0\omega)^{n-1}\rangle$ ist als Supremum insbesondere ein Häufungspunkt. Wegen der Stetigkeit des Schnittproduktes haben wir nun:

$$\alpha \cdot (\beta_i)^{n-1} \xrightarrow{i \in I} \alpha \cdot \langle(\alpha + t_0\omega)^{n-1}\rangle \in \mathbb{R}$$

und

$$h \cdot (\beta_i)^{n-1} \xrightarrow{i \in I} h \cdot \langle(\alpha + t_0\omega)^{n-1}\rangle \in \mathbb{R}$$

also insgesamt

$$\frac{\alpha \cdot (\beta_i)^{n-1}}{h \cdot (\beta_i)^{n-1}} \xrightarrow{i \in I} \frac{\alpha \cdot \langle(\alpha + t_0\omega)^{n-1}\rangle}{h \cdot \langle(\alpha + t_0\omega)^{n-1}\rangle} < \varepsilon.$$

Also existiert ein $i_0 \in I$ so, dass

$$\frac{\alpha \cdot (\beta_{i_0})^{n-1}}{h \cdot (\beta_{i_0})^{n-1}} < \varepsilon$$

gilt.

Wir wählen einen Nef-Repräsentanten $\beta_{i_0,\pi} \in N^1(X_\pi)$ für β_{i_0} . Wegen Lemma 3.6 ist für die zugehörige Modifikation $\mu : X_\pi \rightarrow X$ der Pushforward $\mu_*(\beta_{i_0,\pi}^{n-1})$ in $\overline{\text{Mov}}(X)$ und es gilt wegen der Projektionsformel

$$\frac{\alpha \cdot \mu_*(\beta_{i_0,\pi}^{n-1})}{h \cdot \mu_*(\beta_{i_0,\pi}^{n-1})} = \frac{\mu^*(\alpha) \cdot (\beta_{i_0,\pi})^{n-1}}{\mu^*(h) \cdot (\beta_{i_0,\pi})^{n-1}} = \frac{\alpha \cdot (\beta_{i_0})^{n-1}}{h \cdot (\beta_{i_0})^{n-1}} < \varepsilon.$$

Dabei fassen wir auf der linken Seite α und h als Elemente von $N^1(X)$ auf. Auf der rechten Seite können wir dann α statt $\mu^*(\alpha)$ schreiben, denn die zugehörigen Cartier-Klassen und Schnittprodukte in $CN^1(\mathfrak{X})$ sind gleich. Damit haben wir aber einen Widerspruch zu Gleichung (3.1) und der Satz ist bewiesen. ■

Man erhält als Kombination des obigen Satzes und einem Satz von Miyaoka und Mori eine Charakterisierung von unigeregelten Varietäten.

Satz 3.9 (Charakterisierung von unigeregelten Varietäten).

Sei X eine glatte projektive Varietät. Dann ist X genau dann unigeregelt, wenn das kanonische Bündel K_X nicht pseudo-effektiv ist.

Beweis: Wir verweisen auf [Laz04b] Korollar 11.4.20. ■

Literaturverzeichnis

- [BDPP04] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Paun, and Thomas Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. <http://arxiv.org/abs/math/0405285>, Preprint, 2004.
- [BFJ06] Sébastien Boucksom, Charles Favre, and Mattias Jonsson. Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier. <http://arxiv.org/abs/math/0608260>, Preprint, 2006.
- [Bou66] Nicolas Bourbaki. *Elements of mathematics. General topology. Part I*. Hermann, Paris, 1966.
- [Dug78] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1978. Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Torward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1995. Graduate Texts in Mathematics, No. 150.
- [Ful84] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Laz04a] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.
- [Laz04b] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

Notation

$Z^k(X)$	Gruppe der k -Zykel auf einer Varietät X
$A^k(X)$	Gruppe der rationalen k -Zykel auf einer Varietät X
$A(X)$	Chow-Ring einer Varietät X
$N^k(X)$	Gruppe der numerischen k -Zykel auf einer Varietät X
$c_1(L)$	erste Chern-Klasse eines Geradenbündels L
$ch(L)$	Chern-Charakter eines Geradenbündels L
$K(X)$	Grothendieck-Gruppe einer Varietät X
$N^k(X)_{\mathbb{R}}$	der reelle Vektorraum der numerischen k -Zykel auf einer Varietät X
$\text{Amp}(X)$	Kegel der amplen Divisoren auf einer Varietät X
$\text{Nef}(X)$	Kegel der numerisch-effektiven Divisoren auf einer Varietät X
$\kappa(L)$	Iitaka-Dimension des Geradenbündels L
$\text{Psef}(X)$	Kegel der pseudo-effektiven Divisoren auf einer Varietät X
$\text{Big}(X)$	Kegel der Big-Divisoren auf einer Varietät X
$\text{vol}_X(L)$	Volumen des Geradenbündels L auf der Varietät X
$\text{vol}_X(D)$	Volumen des Divisors D auf der Varietät X
\mathfrak{X}	Riemann-Zariski-Raum einer Varietät X
$N^p(\mathfrak{X})$	Raum der p -kodimensionalen Weil-Klassen auf \mathfrak{X}
h_π	die kanonische Abbildung $h_\pi : N^p(\mathfrak{X}) \rightarrow N^p(X_\pi)$
$CN^p(\mathfrak{X})$	Raum der p -kodimensionalen Cartier-Klassen auf \mathfrak{X}
g_π	die kanonische Abbildung $g_\pi : N^p(X_\pi) \rightarrow CN^p(\mathfrak{X})$
ι	die kanonische Injektion $\iota : CN^p(\mathfrak{X}) \rightarrow N^p(\mathfrak{X})$
$\text{Psef}(\mathfrak{X})$	Kegel der pseudo-effektiven Divisoren auf \mathfrak{X}
$\text{Big}(\mathfrak{X})$	Kegel der Big-Divisoren auf \mathfrak{X}
$\langle \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p \rangle$	das positive Schnittprodukt
$\text{vol}_{\mathfrak{X}}(\alpha)$	Volumen des Cartier-Divisors α auf \mathfrak{X}
$\overline{\text{Mov}}(X)$	Kegel der beweglichen Kurven auf einer Varietät X

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 30.04.2007

(Florian Wittke)