Muster ohne Wiederholungen

Habilitationsvortrag von Thomas Eckl

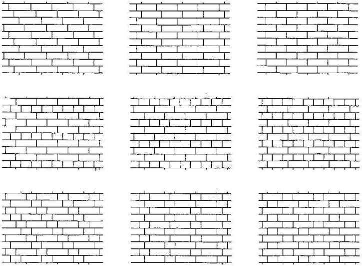
Universität zu Köln

28. Juni 2007

KACHELUNGEN — PARKETTIERUNGEN — PFLASTERUNGEN

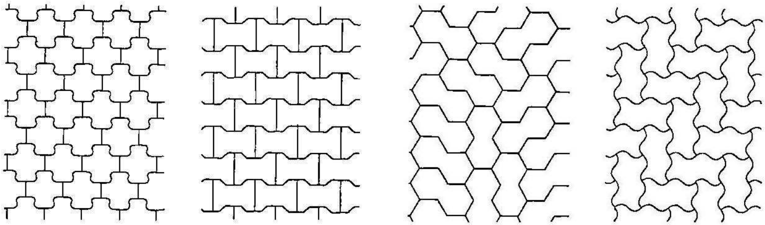
Parkettierungen — Pflasterungen — Kachelungen

... an Mauern ...



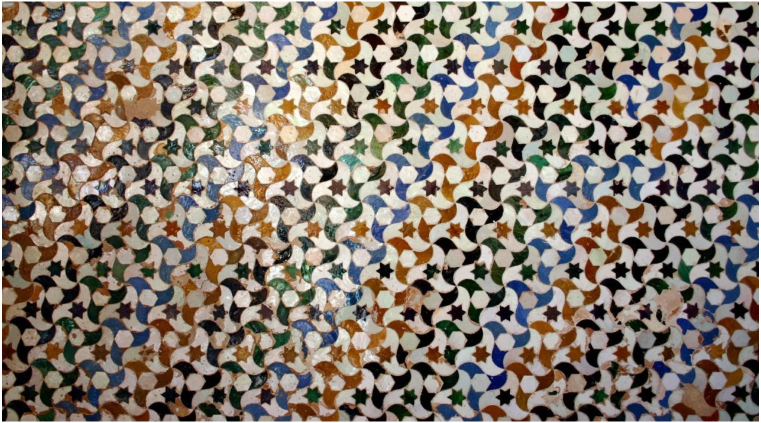
Parkettierungen — Pflasterungen — Kachelungen

... auf Straßen ...



Parkettierungen — Pflasterungen — Kachelungen

... und in der Alhambra, Granada.

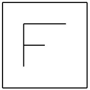


Definition einer Kachelung

Kachelung = Lückenlose überschneidungsfreie Überdeckung der Ebene mit vorgegebenen Typen von Kacheln

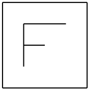
Definition einer Kachelung

Kachelung = Lückenlose überschneidungsfreie Überdeckung der Ebene mit vorgegebenen Typen von Kacheln

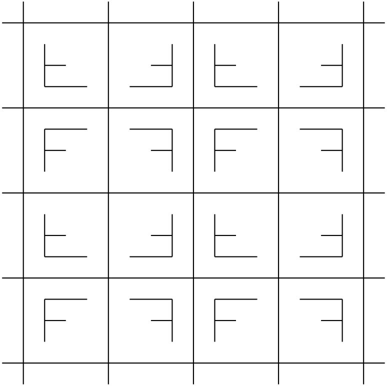


Definition einer Kachelung

Kachelung $=$ Lückenlose überschneidungsfreie Überdeckung der Ebene mit vorgegebenen Typen von Kacheln



$\rightsquigarrow$



Ziele einer Theorie der Kachelungen

- Beschreibe alle möglichen Kachelungen!

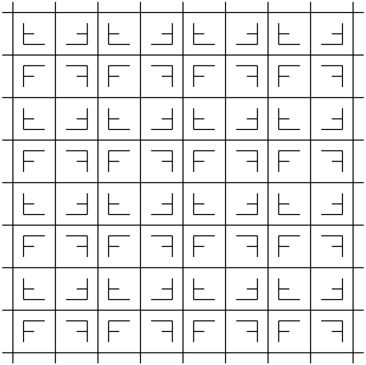
Ziele einer Theorie der Kachelungen

- Beschreibe alle möglichen Kachelungen!
- Spezieller: Beschreibe alle möglichen Kachelungen mit **einem** Typ von Kachel!

Ziele einer Theorie der Kachelungen

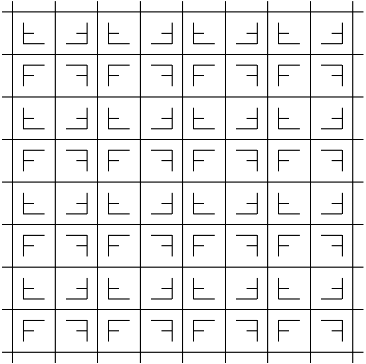
- Beschreibe alle möglichen Kachelungen!
- Spezieller: Beschreibe alle möglichen Kachelungen mit **einem** Typ von Kachel!
- Beschreibe die **Muster** in Kachelungen!

Ziele



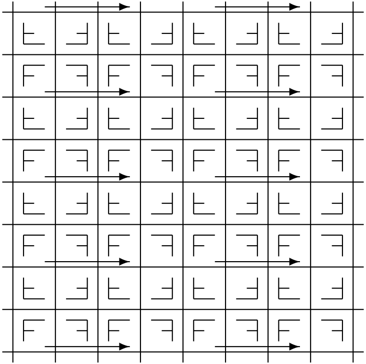
SYMMETRIEN VON KACHELUNGEN

Symmetrie einer Kachelung: Abbildung der Ebene auf sich selbst, die die Kachelung in sich selbst überführt

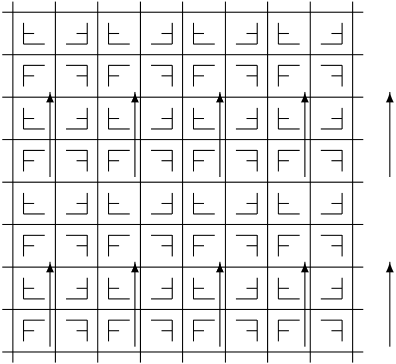


Symmetrie einer Kachelung: Abbildung der Ebene auf sich selbst, die die Kachelung in sich selbst überführt

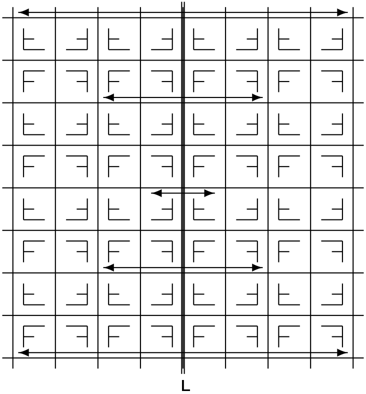
Verschiebung nach rechts



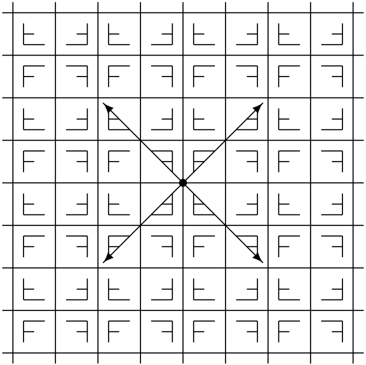
Verschiebung nach oben



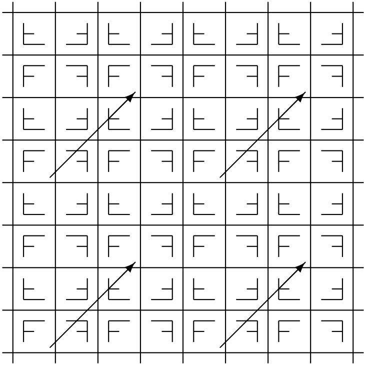
Spiegelung an Achse L



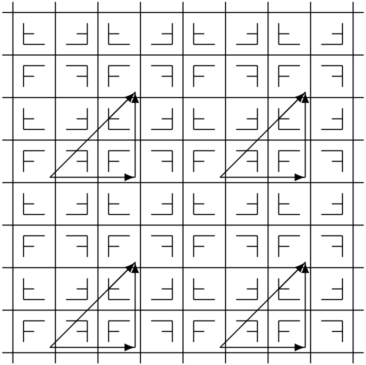
180°-Drehung um Punkt



Beispiele von Symmetrien



Verschiebung diagonal nach oben = Verschiebung nach rechts, dann Verschiebung nach oben



Definition: Die Menge aller Symmetrien einer Kachelung, zusammen mit der Operation des Hintereinander-ausführens, heißt **Symmetriegruppe** der Kachelung.

Definition: Die Menge aller Symmetrien einer Kachelung, zusammen mit der Operation des Hintereinanderausführens, heißt **Symmetriegruppe** der Kachelung.

Theorem (Fedorov 1891)

Wenn die Symmetriegruppe einer Kachelung 2 Translationen in verschiedene Richtungen zuläßt, dann muss die Gruppe einem von genau 17 Typen angehören.

Definition: Die Menge aller Symmetrien einer Kachelung, zusammen mit der Operation des Hintereinanderausführens, heißt **Symmetriegruppe** der Kachelung.

Theorem (Fedorov 1891)

Wenn die Symmetriegruppe einer Kachelung 2 Translationen in verschiedene Richtungen zuläßt, dann muss die Gruppe einem von genau 17 Typen angehören.

Ebene kristallographische Gruppen

Frage: Gibt es Kachelungen aus möglichst wenig Kachel-Typen, die **keine** Translationssymmetrie besitzen = aperiodisch sind ?

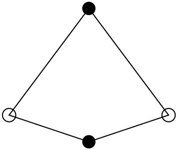
Frage: Gibt es Kachelungen aus möglichst wenig Kachel-Typen, die **keine** Translationssymmetrie besitzen = aperiodisch sind ?

Roger Penrose, 1974

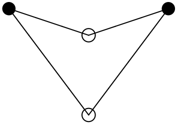
Konstruktion von aperiodischen Kachelungen aus 2 Kacheltypen

PENROSE-KACHELUNGEN

Eine Penrose-Kachelung entsteht aus den folgenden beiden Typen von Kacheln:

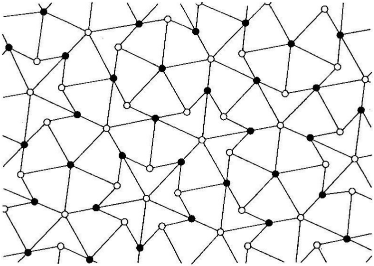


kite



dart

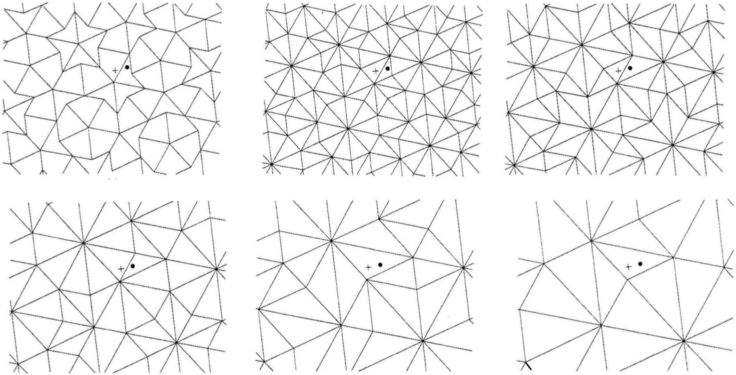
Eine Penrose-Kachelung entsteht aus den folgenden beiden Typen von Kacheln:



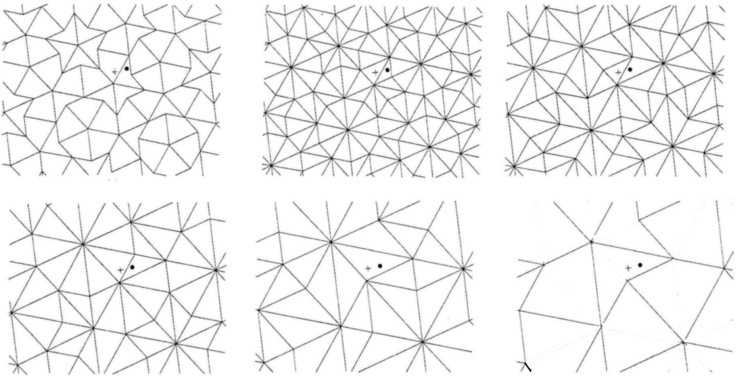
Theorem (Penrose 1974)

Jede Penrose-Kachelung ist aperiodisch.

Zusammenfügen (Robinson 1975)



Zusammenfügen (Robinson 1975)



Theorem (Penrose 1974)

Jede Penrose-Kachelung ist aperiodisch.

Beweis:

Theorem (Penrose 1974)

Jede Penrose-Kachelung ist aperiodisch.

Beweis:

- Durch Zusammenfügen produziert man aus einer vorgegebenen Penrose-Kachelung eine neue Penrose-Kachelung mit vergrösserten Kacheln.

Theorem (Penrose 1974)

Jede Penrose-Kachelung ist aperiodisch.

Beweis:

- Durch Zusammenfügen produziert man aus einer vorgegebenen Penrose-Kachelung eine neue Penrose-Kachelung mit vergrösserten Kacheln.
- Da das Zusammenfügen kanonisch ist, muss jede Translationssymmetrie der Ausgangskachelung auch eine Symmetrie der neuen Kachelung sein.

Theorem (Penrose 1974)

Jede Penrose-Kachelung ist aperiodisch.

Beweis:

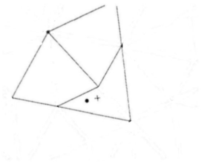
- Durch Zusammenfügen produziert man aus einer vorgegebenen Penrose-Kachelung eine neue Penrose-Kachelung mit vergrösserten Kacheln.
- Da das Zusammenfügen kanonisch ist, muss jede Translationssymmetrie der Ausgangskachelung auch eine Symmetrie der neuen Kachelung sein.
- Iteriertes Zusammenfügen macht die neuen Kacheln beliebig groß: Widerspruch.

Frage: Wie konstruiert man eine Penrose-Kachelung ?

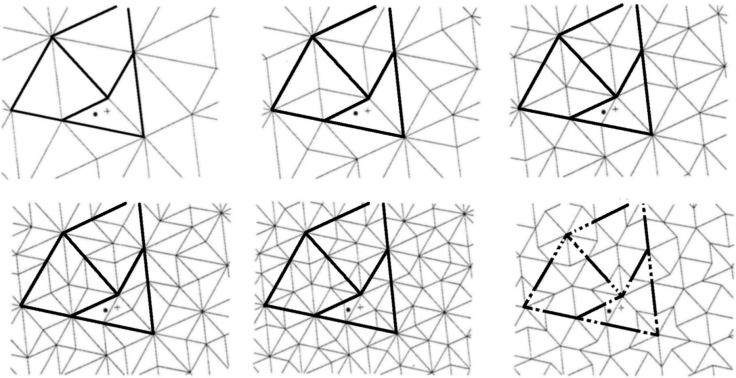
Frage: Wie konstruiert man eine Penrose-Kachelung ?

Problem: Beim sukzessiven Anlegen kann man in eine Sackgasse geraten.

Zerlegen



Zerlegen



Satz

Durch Zerlegen kann man beliebig große Teile der Ebene mit Penrose-Kacheln überdecken.

Satz

Durch Zerlegen kann man beliebig große Teile der Ebene mit Penrose-Kacheln überdecken.

Erweiterungstheorem (Grünbaum/Shepherd 1987)

Falls sich beliebig große Teile der Ebene durch Kacheln aus endlich vielen "kreisförmigen" Typen überdecken lassen, können aus diesen Typen Kachelungen der ganzen Ebene konstruiert werden.

Satz

Durch Zerlegen kann man beliebig große Teile der Ebene mit Penrose-Kacheln überdecken.

Erweiterungstheorem (Grünbaum/Shepherd 1987)

Falls sich beliebig große Teile der Ebene durch Kacheln aus endlich vielen “kreisförmigen” Typen überdecken lassen, können aus diesen Typen Kachelungen der ganzen Ebene konstruiert werden.

$$\text{Satz} + \text{Erweiterungstheorem} \Rightarrow \text{Penrose-Kachelung}$$

Theorem (Penrose, ...)

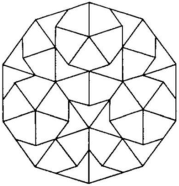
Jedes Teilstück einer bestimmten Penrose-Kachelung taucht in jeder beliebigen Penrose-Kachelung unendlich oft auf.

Theorem (Penrose, ...)

Jedes Teilstück einer bestimmten Penrose-Kachelung taucht in jeder beliebigen Penrose-Kachelung unendlich oft auf.

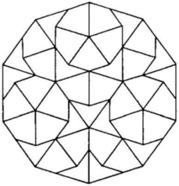
Theorem + Aperiodizität → "Muster ohne Wiederholungen"

Überdeckung mit Wagenrädern

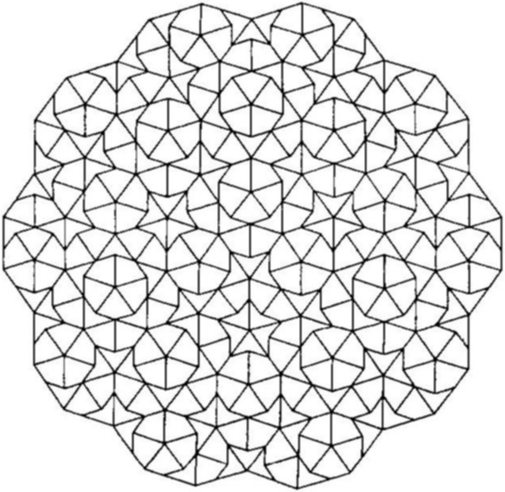


Wagenrad

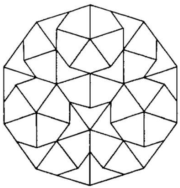
Überdeckung mit Wagenrädern



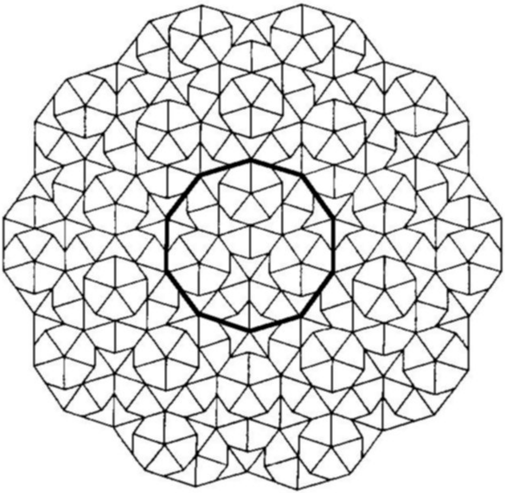
Wagenrad



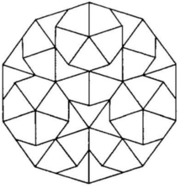
Überdeckung mit Wagenrädern



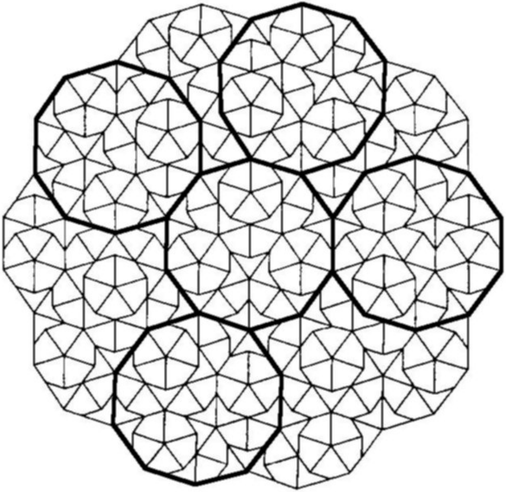
Wagenrad



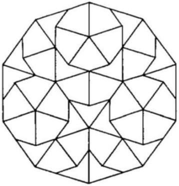
Überdeckung mit Wagenrädern



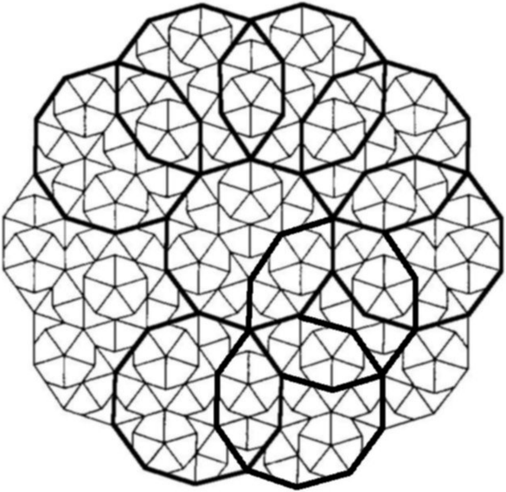
Wagenrad



Überdeckung mit Wagenrädern



Wagenrad

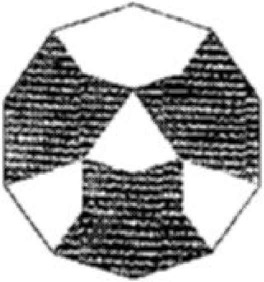


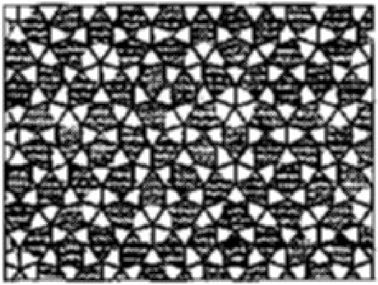
Theorem (P. Gummelt, 1996)

Jede Penrose-Kachelung läßt sich als Überdeckung von regulären Zehnecken konstruieren, wobei die Zehnecke sich nur auf bestimmte Weisen überschneiden dürfen.

Theorem (P. Gummelt, 1996)

Jede Penrose-Kachelung läßt sich als Überdeckung von regulären Zehnecken konstruieren, wobei die Zehnecke sich nur auf bestimmte Weisen überschneiden dürfen.





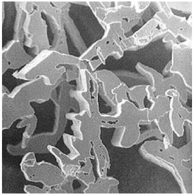
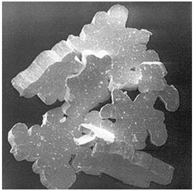
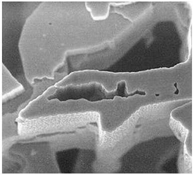
Quelle: Petra Gummelt: Penrose tilings as coverings of congruent decagons. Geometriae dedicata 62 (1996), 1-17

SCHLUSS

Quasi-Kristalle aus Tantal und Tellur

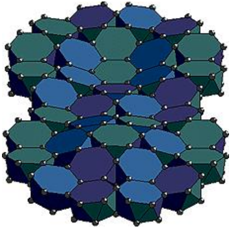
Quasi-Kristalle aus Tantal und Tellur

Rasterelektronenmikroskopische Aufnahmen von $dd - Ta_{1.6}Te$

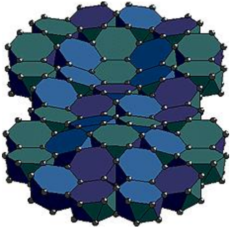
Quelle: Matthias Conrad, Frank Krumeich, Bernd Harbrecht: Über ein dodekagonales quasikristallines Chalkogenid, Angewandte Chemie, Volume 110(10), 1999, pp.1453–1457

Die Struktur von $dd - Ta_{1.6}Te$



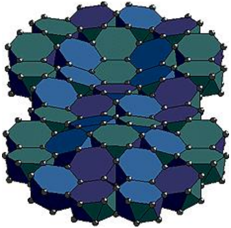
- Basis-Baugruppe: Trommelförmige Cluster aus 13 Tantal-Atomen.
- 19 dieser Trommel-Cluster bilden einen 12-eckigen Cluster.

Die Struktur von $dd - Ta_{1.6}Te$



- Basis-Baugruppe: Trommelförmige Cluster aus 13 Tantal-Atomen.
- 19 dieser Trommel-Cluster bilden einen 12-eckigen Cluster.
- Diese 12-eckigen Cluster überlagern sich zu einer Schicht.
- Die Schichten werden übereinandergestapelt, getrennt durch eine Lage Tellur-Atome.

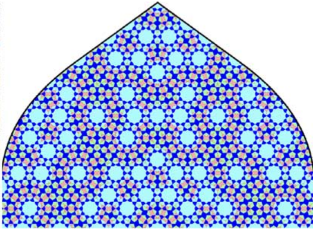
Die Struktur von $dd - Ta_{1.6}Te$



- Basis-Baugruppe: Trommelförmige Cluster aus 13 Tantal-Atomen.
- 19 dieser Trommel-Cluster bilden einen 12-eckigen Cluster.
- Diese 12-eckigen Cluster überlagern sich zu einer Schicht.
- Die Schichten werden übereinandergestapelt, getrennt durch eine Lage Tellur-Atome.

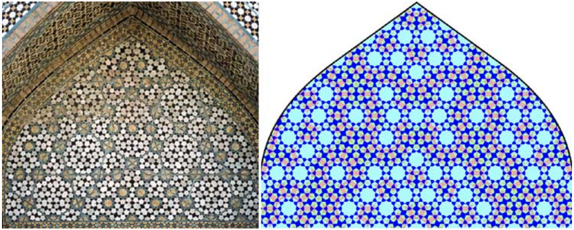
$$dd - Ta_{2\sqrt{3}+3}Te_4$$

Aperiodische Kachelungen in Moscheen?

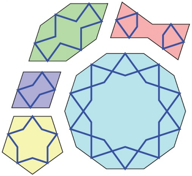



Darb-i-Imam-Schrein aus Isfahan (Iran), 1453

Aperiodische Kachelungen in Moscheen?



Darb-i-Imam-Schrein aus Isfahan (Iran), 1453



Quelle: P. J. Lu, P. J. Steinhardt: Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Science 315 (2007), pp.1106-1110

Kites auf Rasierern